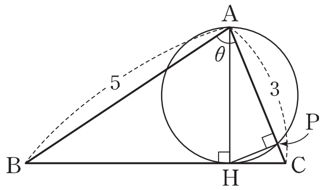
3



삼각형 ABC에서 $\angle CAB=\theta$라 하면

코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=5^2+3^2-2\times5\times3\times\frac{1}{5}$

$=25+9-6$

$=28$

이므로

$\overline{BC}=2\sqrt{7}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$=3\sqrt{6}$

이때 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$이므로

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times\overline{AH}=3\sqrt{6}$

$\overline{AH}=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

따라서 삼각형 AHP에서 $\angle HPA=90°$이므로

삼각형 AHP와 삼각형 ACH는 서로 닮음이다.

$\overline{AP}:\overline{AH}=\overline{AH}:\overline{AC}$이므로

$\overline{AP}\times\overline{AC}=\overline{AH}^2$

$\overline{AP}\times3=\left(\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\right)^2$

따라서

$\overline{AP}=\frac{1}{3}\times\frac{54}{7}$

$=\frac{18}{7}$

답 ①

05 등차수열과 등비수열

유제 본문 73~79쪽

1 ①	2 54	3 ②	4 4	5 ③
6 8	7 143	8 ⑤		

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_1+a_2=a_1+(a_1+d)=5$에서

$2a_1+d=5$ ······ ㉠

$a_3+a_4+a_5=30$에서

a_4는 a_3과 a_5의 등차중항이므로

$a_3+a_5=2a_4$

이때

$a_3+a_4+a_5=2a_4+a_4$

$=3a_4=30$

이므로 $a_4=10$에서

$a_1+3d=10$ ······ ㉡

$3\times$㉠$-$㉡을 하면

$5a_1=5$

$a_1=1$

$a_1=1$을 ㉠에 대입하면

$2+d=5$

$d=3$

따라서 $a_1=1$, $d=3$이므로

$a_6=1+5\times3$

$=16$

답 ①

2 세 수 1, $\log_4 a$, $3\log_2 3$은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항의 성질에 의하여

$2\log_4 a=1+3\log_2 3$

이때

(좌변)$=2\log_4 a$

$=\log_2 a$

(우변)$=1+3\log_2 3$

$=\log_2 2+\log_2 3^3$

$=\log_2(2\times3^3)$

$=\log_2 54$

이므로

$\log_2 a = \log_2 54$

따라서 $a=54$

답 54

3 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9(a_1+23)}{2}=351$에서

$a_1=55$

한편 세 수 a_1, a_5, a_9는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_5=\frac{a_1+a_9}{2}$

$=\frac{55+23}{2}=39$

따라서

$S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}$

$=\frac{5(55+39)}{2}$

$=235$

답 ②

4 첫째항이 2, 항의 개수가 $k+2$, 제$(k+2)$항이 12인 등차수열의 합이 112이므로

$\frac{(k+2)(2+12)}{2}=112$

$7(k+2)=112$

$k+2=16$, $k=14$

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면

12는 제16항이므로

$12=2+15d$

$d=\frac{2}{3}$

따라서

$a_3=2+3d$

$=2+3\times\frac{2}{3}$

$=4$

답 4

5 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$a_1=3$이므로 $a_3+12=4a_2$에서

$3r^2+12=4\times 3r$

$r^2-4r+4=0$

$(r-2)^2=0$

$r=2$

따라서

$a_5-a_4=3\times 2^4-3\times 2^3$

$=48-24$

$=24$

답 ③

6 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$2\sin\frac{3}{2}\pi=2\times(-1)$

$=-2$

세 수 $\frac{1}{2}$, -2, k가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\frac{1}{2}\times k=(-2)^2$

따라서 $k=8$

답 8

7 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.

$a_2a_4=a_3^2$이므로

$a_2a_3a_4=1$에서

$a_3^3=1$

즉, $a_3=1$

이때 $a_1=4$이므로

$4r^2=1$

$r^2=\frac{1}{4}$

$r>0$이므로

$r=\frac{1}{2}$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=\frac{4\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{127}{16}$

따라서 $p=16$, $q=127$이므로

$p+q=143$

답 143

8 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$r=1$이면 $S_5=5a_1=8$에서

$a_1=\frac{8}{5}$

이때 $S_{10}=10a_1=16$이므로

$S_{10}\neq 80$

따라서 $r \neq 1$

$S_5=\dfrac{a_1(r^5-1)}{r-1}$

$=8$ …… ㉠

$S_{10}=\dfrac{a_1(r^{10}-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a_1(r^5-1)(r^5+1)}{r-1}$

$=80$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$8(r^5+1)=80$

$r^5=9$

따라서

$S_{15}=\dfrac{a_1(r^{15}-1)}{r-1}$

$=\dfrac{a_1(r^5-1)\{(r^5)^2+r^5+1\}}{r-1}$

$=8\times(9^2+9+1)$

$=728$

답 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 80~81쪽

1 ⑤	2 ③	3 ⑤	4 ②	5 120
6 ③	7 ①	8 ②	9 ④	10 126

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_3=2+2d=14$에서

$d=6$

따라서 $a_6=2+5\times6=32$

답 ⑤

2 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3-a_5=-2d=6$

$d=-3$

또 $a_{10}=a_1+9\times(-3)=17$에서

$a_1=44$

이때 $a_k=44+(k-1)\times(-3)<0$에서

$3k>47$

$k>\dfrac{47}{3}=15.66\cdots$

따라서 자연수 k의 최솟값은 16이다.

답 ③

3 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2=a_1+d=8$ …… ㉠

$a_{10}-a_6=4d=12$에서

$d=3$

$d=3$을 ㉠에 대입하면

$a_1+3=8$, $a_1=5$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\dfrac{10\{2\times5+(10-1)\times3\}}{2}=185$

답 ⑤

4 $\dfrac{k\{2\times1+(k-1)\times4\}}{2}=91$에서

$2k^2-k-91=0$

$(k-7)(2k+13)=0$

이때 k는 자연수이므로

$k=7$

따라서 $a_7=1+6\times4=25$

답 ②

5 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_2=\dfrac{2(2a+d)}{2}$

$=2a+d=6$ …… ㉠

$S_4=\dfrac{4(2a+3d)}{2}$

$=4a+6d=28$

이므로

$2a+3d=14$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$2d=8$, $d=4$

$d=4$를 ㉠에 대입하면

$2a+4=6$, $a=1$

따라서

$S_8=\dfrac{8\{2\times1+(8-1)\times4\}}{2}=120$

답 120

다른 풀이

$S_2=6$, $S_4=28$이므로

등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 0이 아니다.

$S_n=An^2+Bn$ (A, B는 상수)라 하면

$S_2=4A+2B=6$

즉, $2A+B=3$ …… ㉠

$S_4=16A+4B=28$
즉, $4A+B=7$ ...... ㉡
㉡−㉠을 하면
$2A=4$, $A=2$
$A=2$를 ㉠에 대입하면
$4+B=3$, $B=-1$
따라서 $S_n=2n^2-n$이므로
$S_8=2\times8^2-8=120$

6 $a_1=S_1=4\times1^2-2\times1$
$=2$
$a_5=S_5-S_4$
$=(4\times5^2-2\times5)-(4\times4^2-2\times4)$
$=34$
따라서 $a_1+a_5=2+34=36$

답 ③

7 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_1=3$이므로
$a_2a_3=3r\times3r^2=72$
$9r^3=72$, $r^3=8$
$r=2$
따라서 $a_6=3\times2^5=96$

답 ①

8 세 수 x, y, 14는 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2y=x+14$ ...... ㉠
세 수 1, $2x$, $y+8$은 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$(2x)^2=y+8$
$y=4x^2-8$ ...... ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$2(4x^2-8)=x+14$
$8x^2-16=x+14$
$8x^2-x-30=0$
$(x-2)(8x+15)=0$
$x=2$ 또는 $x=-\frac{15}{8}$
이때 $x>0$이므로
$x=2$
$x=2$를 ㉡에 대입하면
$y=4\times2^2-8=8$
따라서 $x+y=2+8=10$

답 ②

9 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하면
$a_3=16\times r^2=4$에서
$r^2=\frac{1}{4}$
이때 $r>0$이므로
$r=\frac{1}{2}$
따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제6항까지의 합은
$$\frac{16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{63}{2}$$

답 ④

10 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.
$r=1$이면
$S_2=2a_1$, $S_4=4a_1$
이때 $a_1>0$이므로 $S_4=2S_2$가 되어 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $r\neq1$
$$S_2=\frac{a_1(r^2-1)}{r-1}=a_1(r+1)$$
$$S_4=\frac{a_1(r^4-1)}{r-1}=\frac{a_1(r-1)(r+1)(r^2+1)}{r-1}=a_1(r+1)(r^2+1)$$
$S_4=6S_2$에서
$a_1(r+1)(r^2+1)=6a_1(r+1)$
이때 $a_1>0$, $r>0$이므로
$r^2+1=6$, $r^2=5$
따라서
$$\frac{S_{12}}{S_6}=\frac{\frac{a_1(r^{12}-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^6-1)}{r-1}}=\frac{r^{12}-1}{r^6-1}=\frac{(r^6-1)(r^6+1)}{r^6-1}=r^6+1=(r^2)^3+1=5^3+1=126$$

답 126

Level 2 기본 연습 본문 82~84쪽

1 ④	2 ⑤	3 ①	4 ⑤	5 ④
6 20	7 ②	8 ⑤	9 ③	10 ④
11 ③	12 ④	13 325	14 ④	15 ③

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=a_1-6$에서

$a_3-a_1=2d=-6$

$d=-3$

또 $|a_{10}|=|a_8|$에서

$|a_1+9\times(-3)|=|a_1+7\times(-3)|$

$|a_1-27|=|a_1-21|$

$a_1-27=a_1-21$ 또는 $a_1-27=-(a_1-21)$

이때 $a_1-27\neq a_1-21$이므로

$a_1-27=-(a_1-21)$에서

$2a_1=48$

$a_1=24$

따라서

$a_2=a_1+d$

$=24+(-3)$

$=21$

답 ④

2 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2라 하면

$a_n=a_1+(n-1)d_1$

$b_n=a_1+(n-1)d_2$

이때 $a_5=b_5+16$에서

$a_1+4d_1=(a_1+4d_2)+16$

$d_1-d_2=4$

따라서

$a_{10}-b_{10}$

$=(a_1+9d_1)-(a_1+9d_2)$

$=9(d_1-d_2)$

$=9\times4$

$=36$

답 ⑤

3 이차방정식 $x^2-4x-2=0$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-2$

세 수 α^3, k, β^3은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\alpha^3+\beta^3=2k$

따라서

$k=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{2}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{2}$

$=\dfrac{4^3-3\times(-2)\times4}{2}$

$=44$

답 ①

4 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

a_2는 a_1과 a_3의 등차중항이므로

$a_1+a_2+a_3=3a_2$

$=3(a+d)$

$=-3$

$a+d=-1$ ······ ㉠

a_5는 a_4와 a_6의 등차중항이므로

$a_4+a_5+a_6=3a_5$

$=3(a+4d)$

$=24$

$a+4d=8$ ······ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$3d=9$

$d=3$

$d=3$을 ㉠에 대입하면

$a+3=-1$

$a=-4$

따라서

$a_n=-4+(n-1)\times3$

$=3n-7$

이므로

$a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$

$=\dfrac{10(a_{11}+a_{20})}{2}$

$=5(26+53)$

$=395$

답 ⑤

5 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5=a_1+4d=46$ ······ ㉠

$a_{10}=a_1+9d=21$ …… ㉡
㉡－㉠을 하면
$5d=-25$
$d=-5$
$d=-5$를 ㉠에 대입하면
$a_1-20=46$
$a_1=66$
$a_n=66+(n-1)\times(-5)$
$\quad=-5n+71$
$a_n=-5n+71<0$에서
$n>\frac{71}{5}=14.2$
즉, $a_{15}<0<a_{14}$이므로
$n=14$일 때, S_n의 값이 최대이다.
따라서 구하는 최댓값은
$S_{14}=\frac{14\{2\times66+(14-1)\times(-5)\}}{2}$
$\quad=469$

답 ④

6 $\log_2 2=1$
$\log_2 256=\log_2 2^8$
$\quad=8$
등차수열 1, $\log_2 a_1$, $\log_2 a_2$, $\log_2 a_3$, $\cdots$, $\log_2 a_n$, 8의 합이 63이므로
$\frac{(n+2)(1+8)}{2}=63$
$9(n+2)=126$
$n+2=14$
$n=12$
이때 8은 제14항이므로 주어진 등차수열의 공차를 d라 하면
$8=1+(14-1)d$에서
$8=1+13d$
$d=\frac{7}{13}$
$\log_2 a_3-\log_2 a_1=2\times\frac{7}{13}$
$\log_2\frac{a_3}{a_1}=\frac{14}{13}$
$\frac{a_3}{a_1}=2^{\frac{14}{13}}=4^{\frac{7}{13}}$
따라서 $p=13$, $q=7$이므로
$p+q=20$

답 20

7 두 집합 A, B가
$A=\{4n-3\,|\,n$은 자연수$\}$
$\quad=\{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \cdots\}$
$B=\{3n+2\,|\,n$은 자연수$\}$
$\quad=\{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, \cdots\}$
이므로 집합 $A\cap B=\{5, 17, 29, \cdots\}$
한편 첫째항이 5이고 공차가 $17-5=12$인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은
$a_n=5+(n-1)\times12$
$\quad=12n-7$
$a_n\le100$에서
$12n-7\le100$
$n\le\frac{107}{12}=8.91\cdots$
따라서 집합 $C=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$이므로
집합 C의 모든 원소의 합은
$\frac{8(2\times5+7\times12)}{2}=376$

답 ②

8 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_n=a_1+(n-1)d$
$S_{n+2}-S_n=8n$에서
$S_{n+2}-S_n=a_{n+2}+a_{n+1}$이므로
$a_{n+2}+a_{n+1}=8n$에서
$\{a_1+(n+1)d\}+(a_1+nd)=8n$
$(2d-8)n+(2a_1+d)=0$
이 등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립해야 하므로
$2d-8=0$
$2a_1+d=0$
따라서 $d=4$, $a_1=-2$이므로
$a_{10}=-2+9\times4$
$\quad=34$

답 ⑤

9 $\log_2 a_1=1$에서
$a_1=2$
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$\log_2 a_5-\log_2 a_3=-2$에서
$\log_2\frac{a_5}{a_3}=\log_2 r^2=-2$
$r^2=\frac{1}{4}$

이때 $r>0$이므로

$r=\frac{1}{2}$

따라서 $a_1a_3=2\times\left\{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=1$

답 ③

10 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r_1, r_2라 하면

$a_2b_2=r_1r_2\neq0$이므로

$r_1\neq0$, $r_2\neq0$

한편 $a_1=b_1=1$이므로

$a_3=4a_2$에서

$(r_1)^2=4r_1$

$r_1=4$

또 $b_2=2b_3$에서

$r_2=2\times(r_2)^2$

$2r_2=1$

$r_2=\frac{1}{2}$

$a_n=4^{n-1}$, $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

따라서

$$\begin{aligned}a_{10}b_{10}&=4^9\times\left(\frac{1}{2}\right)^9\\&=2^{18}\times2^{-9}\\&=2^9\end{aligned}$$

이므로

$k=9$

답 ④

11 세 수 1, 2^{a-1}, 26은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\times2^{a-1}=1+26$

$2^a=27$

$$\begin{aligned}a&=\log_2 27\\&=3\log_2 3\end{aligned}$$

세 수 2, 3^b, 8은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(3^b)^2=2\times8$

즉, $(3^b)^2=16=4^2$이므로

$3^b=4$

$b=\log_3 4=2\log_3 2$

따라서

$$\begin{aligned}ab&=3\log_2 3\times2\log_3 2\\&=6\times\frac{\log 3}{\log 2}\times\frac{\log 2}{\log 3}\\&=6\end{aligned}$$

답 ③

12 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.

$S_4-S_2=6$에서

$$\begin{aligned}S_4-S_2&=a_3+a_4\\&=a_1r^2+a_1r^3\\&=a_1r^2(1+r)\end{aligned}$$

이므로

$a_1r^2(1+r)=6$ $\cdots\cdots$ ㉠

$S_6-S_4=24$에서

$$\begin{aligned}S_6-S_4&=a_5+a_6\\&=a_1r^4+a_1r^5\\&=a_1r^4(1+r)\end{aligned}$$

이므로

$a_1r^4(1+r)=24$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡÷㉠을 하면

$\frac{a_1r^4(1+r)}{a_1r^2(1+r)}=\frac{24}{6}$

$r^2=4$

$r>0$이므로

$r=2$

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$4a_1\times3=6$

$12a_1=6$

$a_1=\frac{1}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}S_7-S_1&=\frac{\frac{1}{2}(2^7-1)}{2-1}-\frac{1}{2}\\&=\frac{128-1}{2}-\frac{1}{2}\\&=\frac{127}{2}-\frac{1}{2}\\&=63\end{aligned}$$

답 ④

13 $a_1=S_1=1$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하자.

$r=1$이면 $S_8=8$, $S_4=4$이므로

$S_8\neq4S_4$

따라서 $r\neq1$

$$\begin{aligned}S_8&=\frac{r^8-1}{r-1}\\&=\frac{(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}\end{aligned}$$

$S_4=\frac{r^4-1}{r-1}$이므로

$S_8=4S_4$에서

$\frac{(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}=4\times\frac{r^4-1}{r-1}$

$r^4+1=4$

$r^4=3$

$r>0$이므로

$r=3^{\frac{1}{4}}$

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=(3^{\frac{1}{4}})^{n-1}$

$\quad=3^{\frac{n-1}{4}}$

이므로 $a_k=3^{\frac{k-1}{4}}$의 값이 정수이려면 $k-1$의 값이 0이거나 4의 배수이어야 한다.

따라서 50 이하의 자연수 k의 값은 1, 5, 9, …, 49로 13개이므로 그 합은

$1+5+9+\cdots+49=\frac{13(1+49)}{2}$

$\quad=325$

답 325

14 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_6=4a_2$에서

$1+5d=4(1+d)$

$1+5d=4+4d$

$d=3$

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=1+(n-1)\times3$

$\quad=3n-2$

한편 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=\log_2 x+1$

함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$x=\log_2 y+1$

즉, $y=2^{x-1}$이므로

$f(x)=2^{x-1}$

따라서

$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_{10})$

$=f(1)+f(4)+f(7)+\cdots+f(28)$

$=2^0+2^3+2^6+\cdots+2^{27}$

$=1+2^3+(2^3)^2+\cdots+(2^3)^9$

$=\frac{(2^3)^{10}-1}{2^3-1}$

$=\frac{2^{30}-1}{7}$

답 ④

15 $a_3=a_2+a_2\times\frac{20}{100}$

$\quad=\frac{6}{5}a_2$

이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비는 $\frac{6}{5}$이다.

이때 $a_n=a_1\times\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}$

$a_k\geq4a_1$에서

$a_1\times\left(\frac{6}{5}\right)^{k-1}\geq4a_1$

$(1.2)^{k-1}\geq4$

양변에 상용로그를 취하면

$\log(1.2)^{k-1}\geq\log4$

$(k-1)\log1.2\geq2\log2$

$k\geq\frac{2\log2}{\log1.2}+1$

$\quad=\frac{0.6}{0.08}+1$

$\quad=8.5$

따라서 자연수 k의 최솟값은 9이다.

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 85쪽

1 ② 2 ① 3 3

1 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2라 하자.

조건 (가)에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_1+a_2=8$이므로

$2+(2+d_1)=8$

$d_1=4$

$k=a_1a_2$

$\quad=2\times(2+4)$

$\quad=12$

조건 (나)에서

$b_4=a_2+b_2$이므로

$2+3d_2=6+(2+d_2)$

$d_2=3$

따라서

$S_n=\dfrac{n\{2\times2+(n-1)\times4\}}{2}$

$=2n^2$

$T_n=\dfrac{n\{2\times2+(n-1)\times3\}}{2}$

$=\dfrac{3n^2+n}{2}$

이므로 $S_m-T_m\le\dfrac{km}{4}$에서

$2m^2-\dfrac{3m^2+m}{2}\le3m$

$m^2-7m\le0$

$m(m-7)\le0$

$0\le m\le7$

따라서 자연수 m의 값은 1, 2, 3, ⋯, 7이고, 그 개수는 7이다.

답 ②

2 기울기가 1이고 원 $x^2+y^2=2^n$과 제2사분면에서 접하는 직선 l_n의 방정식을

$y=x+k\,(k>0)$, 즉 $x-y+k=0$

이라 하자.

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2^n}$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{2^{n+1}}$

직선 l_n의 방정식은 $y=x+\sqrt{2^{n+1}}$이므로 직선 l_n의 x절편과 y절편은 각각

$-\sqrt{2^{n+1}}$, $\sqrt{2^{n+1}}$

이다. 이때 $\overline{\mathrm{OP}_n}=\sqrt{2^{n+1}}$, $\overline{\mathrm{OQ}_n}=\sqrt{2^{n+1}}$이므로

삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$의 넓이 S_n은

$S_n=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}_n}\times\overline{\mathrm{OQ}_n}$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2^{n+1}}\times\sqrt{2^{n+1}}$

$=2^n$

따라서

$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_8=\dfrac{2(2^8-1)}{2-1}$

$=2^9-2$

$=510$

답 ①

3 함수 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프와 직선 $y=k^2x$의 교점의 x좌표를 구하면

$\dfrac{4}{x}=k^2x$에서

$x^2=\dfrac{4}{k^2}$

$x=-\dfrac{2}{k}$ 또는 $x=\dfrac{2}{k}$

이때 $a>0$이므로

$a=\dfrac{2}{k}$, $b=-\dfrac{2}{k}$

또 함수 $y=\dfrac{4}{x}$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{x}{k^2}$의 교점의 x좌표를 구하면

$\dfrac{4}{x}=\dfrac{x}{k^2}$에서

$x^2=4k^2$

$x=-2k$ 또는 $x=2k$

이때 $c>0$이므로

$c=2k$, $d=-2k$

한편 네 수 d, b, a, c, 즉 $-2k$, $-\dfrac{2}{k}$, $\dfrac{2}{k}$, $2k$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\dfrac{2}{k}-\left(-\dfrac{2}{k}\right)=2k-\dfrac{2}{k}$

$\dfrac{4}{k}=2k-\dfrac{2}{k}$

$\dfrac{6}{k}=2k$

$k=\dfrac{3}{k}$

따라서 $k^2=3$

답 3