Get 독·설·해

21. [주예지T 3월 Stage 모의고사 21번]

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=n}^{n+3} a_k = \frac{1}{3n^2 + 12n}$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{26} a_k = \frac{2}{81}$ 일 때, $a_2 + a_{25}$ 의 값은?

① $-\frac{27}{650}$

② $-\frac{31}{650}$

③ $-\frac{7}{130}$

④ $-\frac{3}{50}$

⑤ $-\frac{43}{650}$

< Solution 1 >

<p>1st Step 독해</p>	<p>[조건]</p> <p>① $\sum_{k=n}^{n+3} a_k = \frac{1}{3n^2 + 12n}$: 좌변은 수열의 합의 형태로 주어짐</p> <p>② $\sum_{k=1}^{26} a_k = \frac{2}{81}$: 마찬가지로 좌변이 수열의 합의 형태로 주어짐</p> <p>[구하는 값]</p> <p>③ $a_2 + a_{25}$: 두 항의 합을 구할 때, $a_2 + a_{25}$를 한 번에 구할 수도 있고, a_2, a_{25}를 각각 구한 후에 더해야 할 수도 있다.</p>
<p>2nd Step 설계</p>	<p>① $\sum_{k=n}^{n+3} a_k = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$이므로 4개씩 묶어서 생각하면 연속한 24개의 항의 합을 구할 수 있다.</p> <p>② 좌변의 수열의 합은 조건 ①을 이용하여 풀었을 때, 2개의 항의 합이 남게 되므로 이를 이용하여 $a_2 + a_{25}$를 구할 수 있을 것임을 예측할 수 있다.</p> <p>③ 지금까지 조건을 해석한 것에 의하면 $a_2 + a_{25}$를 한 번에 구할 것으로 예측할 수 있다.</p>
<p>3rd Step 해결</p>	<p>① $\sum_{k=n}^{n+3} a_k = \frac{1}{3n^2 + 12n} = \frac{1}{3n(n+4)} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4} \right)$이다.</p> <p>② $\sum_{k=1}^{26} a_k = \sum_{k=1}^{24} a_k + (a_{25} + a_{26}) = a_1 + \sum_{k=2}^{25} a_k + a_{26} = a_1 + a_2 + \sum_{k=3}^{26} a_k$이므로 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.</p> $a_{25} + a_{26} = \frac{2}{81} - \sum_{k=1}^{24} a_k = \frac{2}{81} - \frac{1}{12} \times \left(1 - \frac{1}{25} \right) = \frac{2}{81} - \frac{2}{25}$ $a_1 + a_{26} = \frac{2}{81} - \sum_{k=2}^{25} a_k = \frac{2}{81} - \frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{26} \right) = \frac{2}{81} - \frac{1}{26}$ $a_1 + a_2 = \frac{2}{81} - \sum_{k=3}^{26} a_k = \frac{2}{81} - \frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right) = \frac{2}{81} - \frac{2}{81} = 0$ <p>③ 따라서 $a_1 = -a_2$이므로 다음과 같이 계산할 수 있다.</p> $(a_{25} + a_{26}) - (a_1 + a_{26}) = a_{25} + a_2 = -\frac{2}{25} + \frac{1}{26} = -\frac{27}{650}$

< Solution 2 >

<p>1st Step 독해</p>	<p>[조건]</p> <p>① $\sum_{k=n}^{n+3} a_k = \frac{1}{3n^2+12n}$: 좌변을 이용하여 수열 $\{a_n\}$ 에 대한 정보를 얻을 수 있음</p> <p>② $\sum_{k=1}^{26} a_k = \frac{2}{81}$: 좌변이 수열의 합의 형태로 주어짐</p> <p>[구하는 값]</p> <p>③ $a_2 + a_{25}$: 두 항의 합을 구할 때, $a_2 + a_{25}$ 를 한 번에 구할 수도 있고, a_2, a_{25} 를 각각 구한 후에 더해야 할 수도 있다.</p>
<p>2nd Step 설계</p>	<p>① $\sum_{k=n}^{n+3} a_k = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$ 에서 항에 대한 정보를 얻기 위해 차이를 구해볼 수 있다</p> <p>③ a_2 와 a_{25} 의 차이가 아니라 합의 형태로 주어졌으므로 이를 위해 조건 ②가 사용되어야 함을 예측할 수 있다.</p>
<p>3rd Step 해결</p>	<p>① $\sum_{k=n}^{n+3} a_k = \frac{1}{3n^2+12n}$ 에서 $a_{n+4} - a_n = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ 임을 알 수 있다. 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 4개의 항을 간격으로 어떤 규칙성을 갖게 된다는 것을 파악할 수 있다. 그런데 a_2 와 a_{25} 에서 $2 = 0 \times 4 + 2$, $25 = 6 \times 4 + 1$ 이므로 a_2 와 a_{25} 는 서로 규칙성을 갖지 않는 항이므로 $\sum_{k=1}^{26} a_k = \frac{2}{81}$ 를 통해 a_2 를 a_1 로 표현하거나 a_{25} 를 a_{26} 으로 표현해야 한다는 것을 알 수 있다.</p> <p>② $\sum_{k=1}^{26} a_k = a_1 + a_2 + \sum_{k=3}^{26} a_k = \frac{2}{81}$ 이고, $\sum_{k=3}^{26} a_k = \frac{1}{12} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right) = \frac{2}{81}$ 이므로 $a_1 + a_2 = 0$ 입니다.</p> <p>③ 따라서 $a_2 + a_{25} = a_{25} - a_1$ 이므로</p> $a_5 - a_1 = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right)$ $a_9 - a_5 = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right)$ <p style="text-align: center;">⋮</p> $a_{25} - a_{21} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{26} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{22} \right)$ $\Rightarrow a_{25} - a_1 = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{26} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right)$ <p>이다. 즉, $a_2 + a_{25} = -\frac{27}{650}$ 이다.</p>