'논술실록' 시리즈 제 3 권

# 수리비전

# 數理秘傳

*Read History, View Future* : 과거를 꿰뚫어 미래를 보다

오르비 논술팀 著
윤환석, 양현일(Hedge)

편집 이유섭(Peroz Aramis)

# 제 3 권 '수리비전' 목차
# Table of Contents


- 수리논술 서론
- 고려대/한양대/중앙대 유형설명

Part 1) 단순계산

- 고려대 2010 수시
- 고려대 2009 정시
- 한양대 2011 수시
- 한양대 2010 수시-3번
- 중앙대 2012 모의
- 중앙대 2009 수시1

Part 2) 함수 / 수열

2-1 함수

- 고려대 2012 오전
- 고려대 2012 모의
- 한양대 2009 수시-2번
- 한양대 2010 모의-2번

2-2 수열

- 고려대 2012 오후
- 한양대 2011 모의 2차
- 중앙대 2010 수시1

2-3 재무관리

- 한양대 2012 모의 2차
- 한양대 2011 모의 1차

Part 3) 확률과 기대값 / 통계

3-1 확률과 기대값

- 고려대 2011 오전
- 고려대 2009 모의
- 한양대 2012 수시
- 중앙대 2011 수시1
- 중앙대 2011 수시2
- 중앙대 2011 수시3
- 중앙대 2010 수시2

3-2 통계

- 고려대 2011 오후
- 한양대 2009 수시-3번
- 한양대 2010 모의-3번
- 중앙대 2011 모의
- 중앙대 2010 모의

## Part 4) 합리성의 역설

4-1 게임이론

- 고려대 2011 모의
- 한양대 2012 모의 1차

4-2 합리성의 역설

- 고려대 2010 모의
- 고려대 2009 수시
- 한양대 2010 수시-2번
- 한양대 2010 모의(인문-나 제시문)

# Part 2
# 함수 / 수열

## ● 함수

(1) 고려대 2012 오전
(2) 고려대 2012 모의
(3) 한양대 2009 수시-2번
(4) 한양대 2010 모의-2번

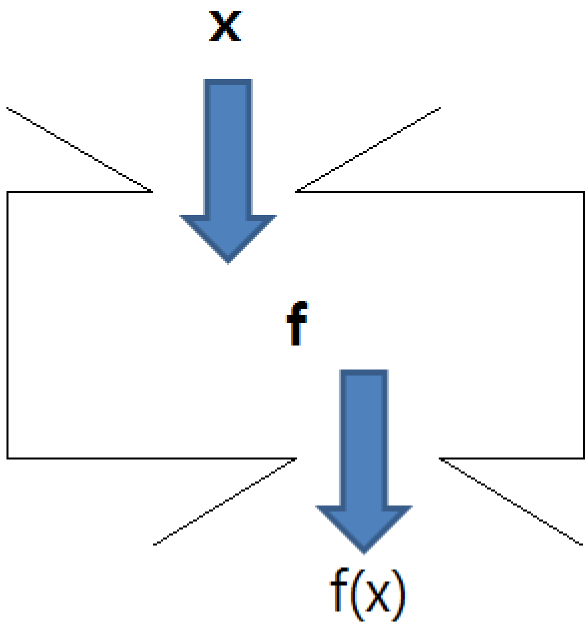
## ● 수열

(5) 고려대 2012 오후
(6) 한양대 2011 모의 2차
(7) 중앙대 2010 수시1

## ● 재무관리(수열 심화)

(8) 한양대 2012 2차 모의
(9) 한양대 2011 1차 모의

# 2-1
# 함수




$$f(x)$$

X를 넣었더니, Y가 도출되었다. 이 과정에서 존재하는 규칙은 무엇일까?

수리논술에 함수가 응용되어 나오는 경우가 많다. 함수가 응용된 문제들을 풀기 위해서는, 우선 함수란 무엇인지에 대해서 기본적인 정의들에 대해서 확실하게 알아야 하며, 여러 가지 함수들의 특성에 대해서도 알아야 한다.

## 함수의 정의

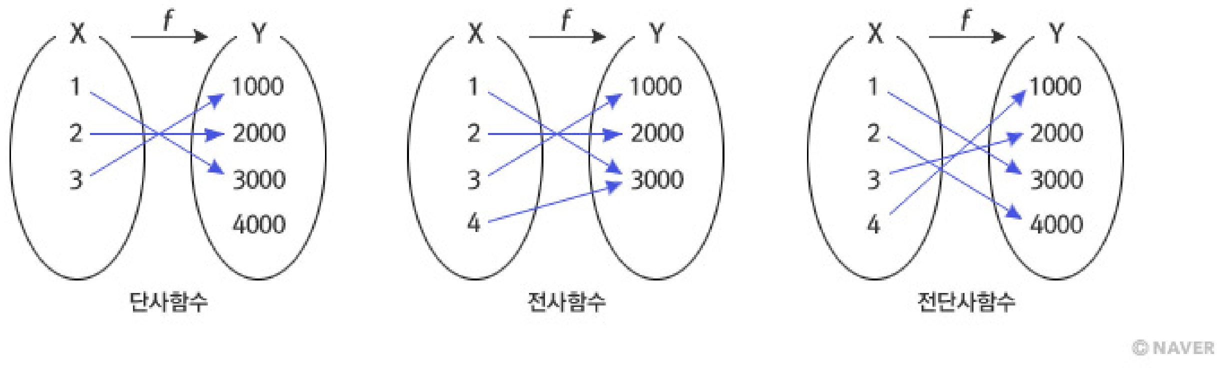
일반적으로, 두 집합 X, Y에서 X의 각 원소에 Y의 원소가 하나씩만 대응할 때, 이 대응을 X에서 Y로의 함수라 하고, 이것을 $f:X \to Y$와 같이 나타낸다. 이때, 집합 X를 함수 f의 정의역이라고 하고, 집합 Y를 함수 f의 공역이라고 한다. 특히 함수 f에 의하여 정의역 X의 원소 x에 공역 Y의 원소 y가 대응할 때, 이것을 기호로 $y = f(x)$와 같이 나타낸다. 이때, f(x)를 함수 f에 의한 x에서의 함수값이라고 한다. 또, 함수 f에 의한 함숫값 전체의 집합, 곧 $\{f(x) \mid x \in X\}$ 를 함수 f의 치역이라고 한다. 일반적으로 치역은 공역의 부분집합이다.

## 전사함수, 단사함수, 전단사함수

함수는 공역과 치역의 관계에 따라 단사함수, 전사함수, 전단사함수로 나눌 수 있다.

첫 번째, 예를 들어 아래 왼쪽 그림과 같이 정의역의 각 원소가 치역의 각 원소와 꼭 하나씩 대응되는 경우가 있다. 이때 공역에는 대응되지 않는 원소가 있어도 된다. 이것은 정의역의 두 원소 x1, x2에 대하여 $x1 \neq x2$이면 $f(x1) \neq f(x2)$인 경우이다. 함수가 이와 같은 성질을 만족할 때, 이 함수를 단사함수라고 한다. 이것을 다시 쓰면 함수 f가 단사함수일 필요충분조건은 $f(x1)=f(x2)$이면 $x1=x2$이다. 이것은 앞에서 소개했던 함수의 정의와 매우 유사하기 때문에 이 성질을 이용할 때 항상 조심해야 한다.

둘째, 치역과 공역이 일치하는 경우가 있다. 즉, 치역에서 각각의 원소에 대응하는 정의역의 원소가 적어도 하나 이상 존재하는 경우이다. 단사함수에서는 공역에 대응되지 않는 원소가 있어도 무방하였다. 그러나 아래 가운데 그림과 같은 함수에서는 공역과 치역이 같고, 공역의 어떤 원소를 택하여도 그에 대응하는 정의역의 원소가 적어도 하나이상 반드시 존재한다. 이와 같은 함수를 전사함수라고 한다.



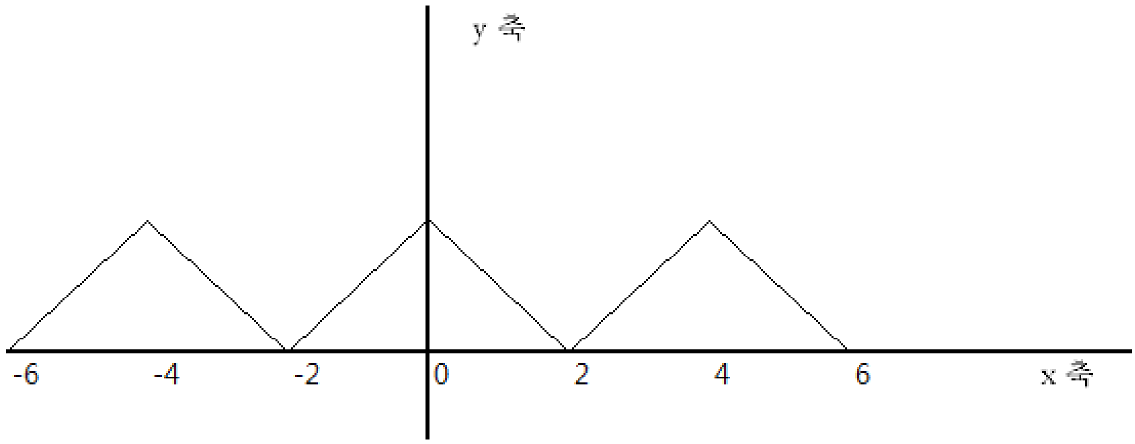

셋째, 정의역의 각 원소가 치역의 각 원소와 꼭 하나씩 대응되며 치역과 공역이 일치하는 경우, 즉, 단사함수이며 동시에 전사함수인 경우가 있다. 이런 함수를 전단사함수라고 하며 간단히 일대일대응이라고 한다. 이 경우 정의역의 원소와 공역의 원소가 일대일로 짝지어지기 때문에 정의역의 원소의 개수와 공역의 원소의 개수가 같다.

## 각각의 함수에 따른 특성

함수에서 공역과 치역의 관계를 통해 단사함수, 전사함수, 전단사함수를 나누었다면, 각각의 함수에 따른 특성을 정리해볼 수 있다.

## 반복성 – 주기함수(삼각함수)

이를테면 다음 그림에서 함수 y=f(x)의 그래프는 x 축 위에서 일정한 간격으로 같은 모양이 반복되어 나타남을 알 수 있다.




즉, y=f(x)는 4 를 간격으로 하여 같은 모양이 반복되는 그래프를 갖는 함수이고

= f(−4) = f(0) = f(4) = f(8) = f(12)

= f(−2) = f(2) = f(6) = f(10) = f(14)이다.

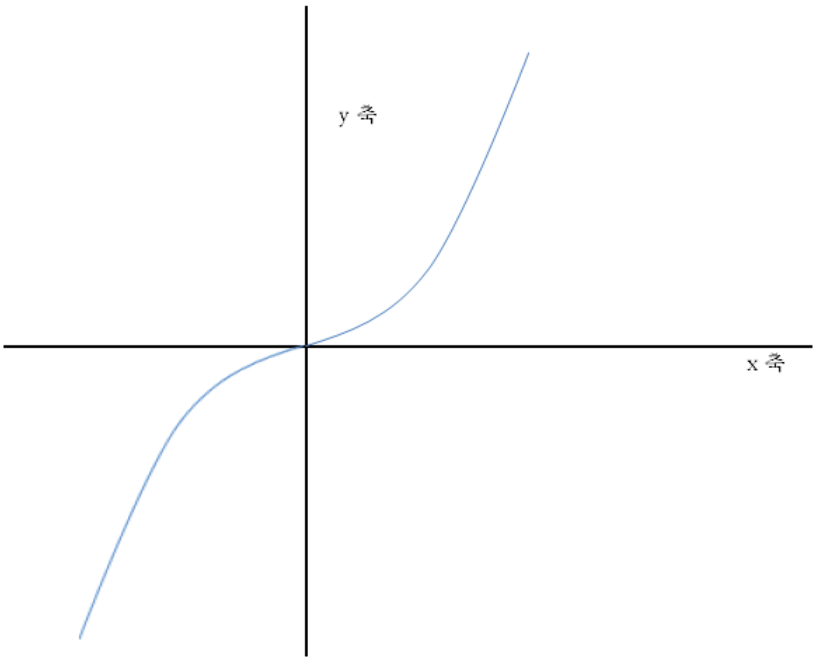
일반적으로 상수 함수가 아닌 함수 y=f(x)에서 정의역의 모든 x 에 대하여 f(x+p) = f(x) 일 때, f(x)를 주기함수라고 할 수 있다. 한편, 상수 p 중에서 최소의 양수를 함수 f(x)의 주기라고 한다. 따라서 위에서 예를 든 함수 f(x)는 주기함수이고, 주기는 4 이다. 즉, 임의의 실수 x 에 대하여 f(x+4) = f(x) 을 만족한다.

그리고 위와 같이 일정한 주기를 바탕으로 반복되는 대표적인 함수가 바로 삼각함수이다. Sin 함수와 Cos 함수, Tan 함수 이 3 함수의 반복성이라는 특징에 대해서 반드시 염두해두어야 한다.

**증가상태** : 미분 가능한 함수 f(x)가 있을 때, f'(a)>0 이면, x=a 에서 증가상태에 있다.

(반대면 감소상태)

한편, 실수 전체의 집합 R 의 부분집합 E 위에서 실수값 수 f(x)를 정의할 수 있다. 임의의 두 수 x1, x2 가 x1< x2 의 관계를 만족할 때, 상 f(x1)< f(x2)가 성립하면 함수 f(x)는 증가함수이다. (반대면 감소함수)




증가상태, 감소상태는 한 점에서의 기울기를 의미한다.
단조함수(증가함수, 감소함수)는 구간에서의 기울기를 의미한다.

즉, 특정 점에서 기울기가 0 보다 크면 증가상태
특정 구간에서 기울기가 0 보다 크면 증가함수

한편, 증가함수, 혹은 감소함수인지는 미분을 이용하여 특정한 점에다가 x 축의 값을 대입해서 기울기를 찾아서 이를 확인할 수 있다.

증가함수 혹은 감소함수의 경우 정의역에 따른 공역과 치역의 범위가 일정 범위를 벗어나게 된다.
이는 앞서 살펴본 주기함수가 정의역에 따른 공역과 치역의 범위가 일정 범위로 국한되는 것과 비교될 수 있다.

즉, 수리 논술 문제에서 주어진 조건을 바탕으로 생각해볼 때, 일정 범위 내에서 반복되는 경우라면 주기함수의 특성에 해당되며, 특정 범위에 국한되지 않고 모든 범위로 확장되는 경우라면 증가함수 혹은 감소함수인 것이다. 즉,

***반복성의 여부 => 주기함수의 특성을 활용하여 푼다.**
***범위의 확장 => 증가/감소함수의 정의를 활용해서 푼다.**

로 정리할 수 있다.

주기함수의 경우 한양대학교 2009학년도 수시 2번 문항에서 함수의 반복성을 바탕으로 식을 설계하고 이에 대해 평가할 것을 요구하는 문제로 활용되어 출제된 바 있다.

증가함수의 경우, 고려대학교 2012학년도 모의 논술문항에서 치역이 제한되지 않는다는 증가함수의 특성을 이용하여, 값이 f(x) 값이, 1/2 이외에도 수 없이 존재할 수 있다는 것을 증명했어야 했다.

한편, 2012학년도 고려대학교 오전의 경우 함수와 관계된 문제가 나오긴 했으나, 그외에도 행렬과도 관계가 있었기에 순수하게 함수를 이용하여 푸는 문제라 보긴 어렵다. 또한 난이도 역시 함수의 특성을 이용하여 푸는 것이 아닌, 주어진 함수에서 조건에 따른 최대값과 최소값을 구하는 정도의 쉬운 난이도에 불과하였다. 이 책을 보는 독자들이라면, 함수의 최대값과 최소값 정도는 충분히 구할 수 있으리라 생각하기 때문에 이를 구하는 것을 지면에 싣는 것은 시간낭비에 불과하기 때문에 이에 대한 자세한 설명은 생략하였다.

반면, 한양대 2010학년도 모의 2번 문제에서는 함수와 좌표평면에서의 대칭이동에 대해 출제하였는데, 함수의 대칭이동에서 배운 내용을 바탕으로 풀어야 한다.

한편, 함수의 대칭이동에 대해 정리해보자면
방정식이 $f(x, y) = 0$인 도형을

(1) x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$f(x, -y) = 0$
(2) y축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$f(-x, y) = 0$
(3) 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$f(-x, -y) = 0$
(4) 직선 $y = x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$f(y, x) = 0$
(5) 직선 $y = -x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$f(-y, -x) = 0$
(6) 점 $(a, b)$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
$f(2a - x, 2b - y) = 0$
이다.

이는 고1과정에서 충분히 배우는 내용이므로 이를 제대로만 공부하였다면 그리 어렵지 않게 문제를 풀 수 있을 것이다.

# (1) 고려대학교 2012학년도 오전

(가) $3 \times 3$ 행렬 $\mathrm{A} = (aij)$와 $\mathrm{B} = (bij)$는 A 의 $(i,j)$ 성분과 B 의 $(j,i)$ 성분이 같고 $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$를 만족한다.

(나) 10차 다항함수 $p(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-10)$의 $x^8$의 계수를 $c$라 한다.

(가)와 (나)에서 소개된 행렬과 함수에 대해 아래의 네 문장이 모두 참이라고 하자.

[문장 1] 홍길동이 노래를 좋아하거나 $-1 \le x \le 1$에서 $y = (x^2+3)^2 + (2-x^2)^2$ 최솟값이 $y = 2(x^2+3)(2-x^2)$의 최솟값과 같다.

[문장 2] 홍길동이 노래와 춤 중 하나만 좋아하고 $a12 = a13 = a23 = 0$이다.

[문장 3] $c = 1320$이면, $3^{\frac{1}{\pi}} > \pi^{\frac{1}{3}}$ 이거나 홍길동은 재능이 없다

[문장 4] $b12 = b13 = b23 = 1$이면 홍길동이 연습을 열심히 하지 않고, 홍길동이 연습을 열심히 하지 않으면 $b12 = b13 = b23 = 1$이다.

※ 아래 제시문을 읽고 논제 3에 답하시오.

논제 3. (25점)

(a) 홍길동이 춤을 좋아하지 않음을 보이시오.

(b) '홍길동은 재능이 없다.'는 문장의 참 또는 거짓을 유추할 수 있는지 논하시오.

(c) '홍길동이 연습을 열심히 하거나 재능이 있으면, 스타가 된다.'는 문장 또한 참일 때 홍길동이 스타가 된다는 결론을 유추할 수 있는지를 논하시오.

# (a) 풀이

**1) 요구사항정리**
(a) 홍길동이 춤을 좋아하지 않음을 보이시오.

**2) 조건과 전제에 대한 정리**
[문장 1] 홍길동이 노래를 좋아하거나 $-1 \le x \le 1$에서 $y = (x^2+3)^2 + (2-x^2)^2$ 의 최솟값이 $y = 2(x^2+3)(2-x^2)$의 최솟값과 같다.
[문장 2] 홍길동이 노래와 춤 중 하나만 좋아하고 $a12 = a13 = a23 = 0$이다.

이 때, 홍길동이 춤을 좋아하지 않는 경우는 다음과 같다.
문장 2에 따르면, 홍길동은 노래와 춤 중 하나만을 좋아한다. 한편, 문장1에 따르면, 홍길동은 노래를 좋아하거나 두식의 최소값이 $-1 \le x \le 1$ 범위 내에서 같아야 한다. 하지만, 홍길동은 춤을 좋아하지 않으므로 노래를 좋아하며, 이는 위의 두식의 최소값이 다름을 의미한다. 즉 홍길동이 춤을 좋아하지 않음을 보이기 위해서는 위의 두식의 최소값이 $-1 \le x \le 1$ 범위 내에서 달라야 한다

**3) 수식화 및 풀이과정, 정답 서술**
수식으로 문제를 주었기 때문에, 텍스트를 식으로 옮기는 별도의 수식화 과정이 필요하지 않음

# 정답가안

a. $y=(x^2+3)^2+(2-x^2)^2$를 전개하면 $y=2x^4+2x^2+13$이 된다.
이 때, 이 식을 미분하면 $y=8x^3+4x=4x(2x^2+1)$이 되므로, $x=0$에서 극소이며 최소이다. $x=0$을 대입하면 $y=13$이 최솟값이 된다.
$y=2(x^2+3)(2-x^2)$를 전개하면 $y=-2x^4-2x^2+12$가 된다.
이 때, 이 식을 미분하면 $y=-8x^3-4x=-4x(2x^2+1)$이 되므로, $x=0$에서 극대값을 가진다.
$-1 \le x \le 1$이므로 $x=-1$을 대입하면 $y=-2\times(-1)^4-2\times(-1)^2+12=8$이고, $x=1$을 대입하면 $y=-2\times1^4-2\times1^2+12=8$이다. 즉, $x=\pm1$일 때, 최솟값이 8이다.
[문장 1]에서 홍길동이 노래를 좋아하거나 혹은 두 식의 최솟값이 같아야 한다. 그러나 두 식의 최솟값이 다르기 때문에 홍길동은 노래를 좋아한다.
[문장 2]에서 홍길동이 노래와 춤 중 하나만 좋아한다고 하였고, [문장 1]에 의해 홍길동은 노래를 좋아한다. 그러므로 홍길동은 춤을 좋아하지 않는다.

## (b) 풀이

**1) 요구사항정리**

(b) '홍길동은 재능이 없다.'는 문장의 참 또는 거짓을 유추할 수 있는지 논하시오.

**2) 조건과 전제에 대한 정리**

(나) 10차 다항함수 $p(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-10)$의 $x^8$의 계수를 $c$라 한다.

이 때, $c$가 1320일 때, 문장3에 따르면 $3^{\frac{1}{\pi}} > \pi^{\frac{1}{3}}$ 이거나 홍길동은 재능이 없다.

**3) 수식화 및 풀이과정, 정답 서술**

수식으로 문제를 주었기 때문에, 텍스트를 식으로 옮기는 별도의 수식화 과정이 필요하지 않음

## 정답가안

b. 먼저, (나)에서 $x^8$의 계수 $c$를 구해보면 10개의 일차다항식 중 8개에서 $x$를 선택하고, 2개에서 상수항을 선택하는 경우를 모두 더하면 된다. 값이 작은 것부터 차례로 더해주면

$c=(-1)\times(-2)+(-1)\times(-3)+(-1)\times(-4)\cdots(-9)\times(-10)$ 이 된다.

곱셈공식을 이용하면, $(1+2+3\cdots+10)^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2+2c$이라는 식을 도출할 수 있고,

이를 계산하면 $55^2=\sum_{k=1}^{10}k^2+2c$, $3025-385=2c$ , $c=1320$이 된다.

[문장 3]에서 $3^{\frac{1}{\pi}}$와 $\pi^{\frac{1}{3}}$을 비교하기 위해서 양 변에 $3\pi$를 제곱해주면 $3^3$과 $\pi^\pi$가 된다. $\pi \fallingdotseq 3.14$이므로 $3^{\frac{1}{\pi}} < \pi^{\frac{1}{3}}$이 된다. 즉, $c=1320$이고 $3^{\frac{1}{\pi}} > \pi^{\frac{1}{3}}$이 아니므로 홍길동은 재능이 없다는 문장이 참임을 유추할 수 있다.

# (c) 풀이

**1) 요구사항정리**

(c) '홍길동이 연습을 열심히 하거나 재능이 있으면, 스타가 된다.'는 문장 또한 참일 때 홍길동이 스타가 된다는 결론을 유추할 수 있는지를 논하시오.

**2) 조건과 전제에 대한 정리**

ㄱ. 앞서, b에서 홍길동은 재능이 없음을 확인하였다. 홍길동은 연습을 열심히 하거나 재능이 있어야 스타가 될 수 있는데, 홍길동은 재능이 없다. 따라서 홍길동이 연습을 열심히 하는지의 여부가 홍길동이 스타가 될 수 있을지를 판가름할 수 있다. 즉, 홍길동의 성공여부는 연습을 열심히 하는지에 달려 있다.

ㄴ. [문장 4]는

**" $b12 = b13 = b23 = 1$이면 홍길동이 연습을 열심히 하지 않고, 홍길동이 연습을 열심히 하지 않으면 $b12 = b13 = b23 = 1$이다. 홍길동이 연습을 열심히 하지 않으면 $b12 = b13 = b23 = 1$이다"**

로 서술되어 있고, 이 때 $b12 = b13 = b23 = 1$과 홍길동이 연습을 열심히 하지 않는다는 것은 필요충분조건임을 알 수 있다. 즉, 홍길동이 연습을 열심히 하지 않는다는 조건인 $b12 = b13 = b23 = 1$에 대해서 타당한지를 검증하면 된다. 만약 이 조건이 성립하면 홍길동은 연습을 열심히 하지 않아 스타가 될 수 없을 것이며, 만약 이 조건이 성립하지 않으면 홍길동은 연습을 열심히 하므로 비록 재능은 없지만 스타가 될 수 있을 것이다.

**3) 수식화 및 풀이과정, 정답 서술**

수식으로 문제를 주었기 때문에, 텍스트를 식으로 옮기는 별도의 수식화 과정이 필요하지 않음

c. [문장 4]에서 $b_{12}=b_{13}=b_{23}=1$과 홍길동이 연습을 열심히 하지 않는다는 것은 필요충분조건이다.

그리고 [문장 2]와 (가)에 의해 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ b_{12} & a_{22} & 0 \\ b_{13} & b_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & a_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ 라고 행렬을 표현할 수 있다.

만약, 홍길동이 연습을 열심히 하지 않는다고 가정하면, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 1 & a_{22} & 0 \\ 1 & 1 & a_{33} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{11} & 1 & 1 \\ 0 & a_{22} & 1 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$가 되고,

이때, $AB \neq BA$이므로 (가)에 위배된다. 결국, 홍길동은 연습을 열심히 한다는 결론을 얻을 수 있다.

문제 b에서 이미 홍길동은 재능이 없다는 사실을 참으로 유추했고, 위에서 홍길동은 연습을 열심히 한다는 결론을 얻었으므로 이 두 문장을 조합하면, 홍길동은 재능은 없지만 연습을 열심히 한다. 즉, 스타가 되기 위한 두 가지 조건 중 하나를 갖고 있으므로 홍길동은 스타가 된다는 결론을 유추할 수 있다.

## (2) 고려대학교 2012학년도 모의

a. 어느 국가에서 $n$년도에 65 세 이상 인구에게 지급해야 하는 연금 총액은 $a_n = n \times 2030^n$ 이고 의료비 총 액은 $b_n = 2031^n$ 이다. 연금 총액에 대한 의료비 총액의 비 $\frac{b_n}{a_n}$ 이 최대가 되는 해는 몇 연도인가?

b. 노령화지수는 유소년 인구(14 세 이하의 인구)에 대한 65 세 이상 인구의 비이다. 그리고 노년부양비는 생산 가능 인구(15 세 이상 64 세 이하의 인구)에 대한 65 세 이상 인구의 비이다. 시점 $x$에서의 노년부양비를 $f(x)$ 라고 하자. 여기에서 $f(x)$는 실수 전체의 집합 $R$에서 $R$로의 함수라고 가정한다. 어느 국가의 노령화지수가 (노령화지수) = (노년부양비)$^2$ 을 만족하고, $f(x)$ 는 $R$에서의 일대일 함수 $x$ 라고 가정하면, (노년부양비 – 노령화지수) 〈 1/4 이 되는 시점 가 항상 존재함을 설명하시오.

# (a) 풀이

1) 요구사항정리

$\frac{b_n}{a_n}$ 이 최대가 되는 연도를 구해내어야 한다.

2) 조건과 전제에 대한 정리

$a_n$은 $n * 2030^n$ 이며, $b_n$은 $2031^n$이다.

3) 수식화 및 풀이과정, 정답 서술

문제가 수식으로 주어져 있다. 따라서 이 문제는 별도의 수식화 과정이 필요하지 않다. 풀어내면 그만이다.

# 정답가안

$a_n$은 $n * 2030^n$ 이며, $b_n$은 $2031^n$이다. [2]

$\frac{b_n}{a_n} = \frac{2031^n}{n * 2030^n}$ 의 최대값에 대한 계산이 이루어지면 된다. 이는 $\frac{1}{n} * (\frac{2031}{2030})^n$ 으로 표현이 가능하다. 그런데, $\lim_{n\to\infty}$일 때, 분수함수보다 감소폭보다, 지수함수의 증가폭이 더욱 크므로, $\frac{b_n}{a_n} = \frac{2031^n}{n * 2030^n}$ 은 발산하며, 최대가 되는 년도인 n은 존재하지 않는다. [3]

쉽게 말하자면, "답이 없다" 라는 것이 답이었다. 이는 고려대의 명백한 출제오류이다. 고려대에서는 분모와 분자를 바꾸어서 출제하는 실수를 저질렀고, 이로 인해 특정년도에 수렴하는 값이 아닌 무한대로 발산해버리는 값이 나오게 되어버렸다. 이 문제를 제대로 풀고 싶다면, 분모와 분자를 뒤집어서 풀어보기 바란다.

## (b) 풀이

**1) 요구사항정리**

(노년부양비 - 노령화지수) 〈 1/4가 되는 시점 x가 항상 존재함을 증명

**2) 조건과 전제에 대한 정리**

ㄱ. (노령화지수) = (노년부양비)$^2$

ㄴ. 시점 x에서의 노년부양비를 f(x)라 하며, f(x)는 R에서의 일대일 함수이며, 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수이다.

**ㄷ. ㄴ에 따르면, 함수의 정의역이 실수 전체이므로, f(x)의 정의역은 연속이다. 이 경우 f(x)는 증가함수이거나 감소함수이다.**

**3) 수식화 및 풀이과정, 정답 서술**

시점 x에서의 노년부양비를 f(x)라 하면, 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$f(x) - \mathbf{f(x)}^2$ 〈 1/4

## 정답가안

시점 x에서의 노년부양비를 f(x)라 할 때, (노령화지수) = (노년부양비)$^2$가 성립된다. 한편, 시점 x에서의 노년부양비를 f(x)라 하며, f(x)는 R에서의 일대일 함수이며, 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수이다. **이에 따르면, 함수의 정의역이 실수 전체이므로, f(x)의 정의역은 연속이다. 이 경우 f(x)는 증가함수이거나 감소함수이다.** [2]

이 때, 식 "(노년부양비 - 노령화지수) 〈 1/4" 를 정리하여 완전제곱식으로 변환하면 다음과 같다.

=〉 $-(\mathbf{f(x)} - \frac{1}{2})^2$ 〈 0

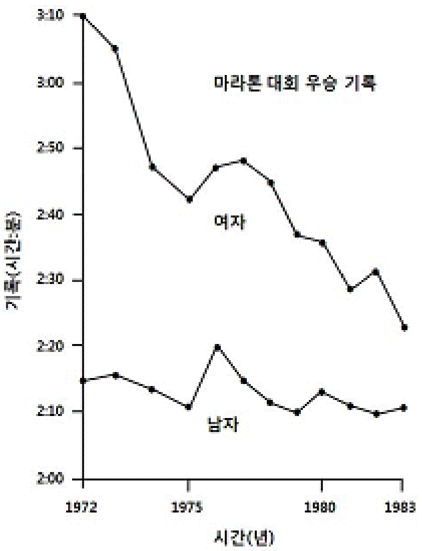
한편, 위의 부등식이 성립하지 않을 조건은 **f(x)가** $\frac{1}{2}$ 일 경우이다. 즉 f(x)가 x의 값에 관계 없이 항상 $\frac{1}{2}$이라면, 위의 부등식은 성립하지 못한다. 하지만, ㄴ의 조건에서 f(**x**)는 **1대1 함수이다.** 또한, **함수의 정의역이 실수 전체이므로, f(x)의 정의역은 연속이다. 이 경우 f(x)는 증가함수이거나 감소함수이다. (※만약, 단순히 일대일 함수이기 때문에, 증가함수 혹은 감소함수라고 할 경우는 감점사유에 해당될 수 있다. 이는 정의역이 불연속인 경우는 f(x)가 증가함수 혹은 감소함수라고 단정지을 수 없기 때문이다.) 그리고 증가함수이거나 감소함수인 경우 f(x)값이 1/2이외에도 분명 존재하므로 f(x)의 값이 1/2일수만은 없다.** 즉 시점 x가 존재하지 않기 위해서는 f(x)의 값이 1/2이여야만 하는데, f(x)의 값이 1/2 이외에도 항상 존재하므로 시점 x는 항상 존재 가능하다. [3]

## (3) 한양대학교 2009학년도 수시 2번

논술 2. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (30점)

〈가〉 주요 경마대회에서의 우승 기록은 아주 오랜 기간에 걸쳐 약간씩 향상되어왔을 뿐이다. 예를 들어, 1840년과 1980년 사이에 영국 3대 경마대회에서 각각 12초, 20초, 18초의 기록 단축이 이루어졌는데, 이것은 한 세대로 따지면 겨우 0.4%에서 0.8%정도 향상된 것에 지나지 않는다. 일반적으로 가축의 품종 개량에서는 1년에 1~3%의 능력 향상이 이루어지는 것을 기대하며, 그 이하는 경제적 가치가 없는 것으로 간주한다. 이렇게 향상이 느린 이유는 경주에 참여하는 말들이 200년 이상 우수한 혈통으로부터 선택 교배되어 이미 그 경주능력에 있어 최고의 상태에 도달했기 때문인 것으로 추정된다.

〈나〉 오랜 역사를 지닌 보스턴 마라톤 대회는 1972년이 되어서야 여성에게 문호를 개방하였다. 다음




그래프는 1972년부터 1983년까지 이 대회에서의 남녀 우승 기록을 보여준다.

〈다〉 어떤 사람들은 〈나〉의 그래프 곡선을 단순히 선형적으로 연장하여 언젠가는 이 대회에서 여성의 마라톤 기록이 남성의 기록을 따라잡을 것이라고 주장하였다.

문제 1. 〈가〉에 근거하여 남녀 마라톤 기록이 〈나〉의 그래프와 같이 나타나는 이유를 설명하고, 〈다〉의 주장에 대한 자신의 견해를 논술하시오.

문제 2. 세상에서 일어나는 어떤 현상으로부터 수치 자료를 얻어내고 이 수치들의 변화 추이를 대략적으로 설명하는 함수를 도출하는 것을 수학적 모델링이라고 한다. 시간 $t$에 따른 마라톤 우승 기록의 모형 함수가 만족해야 할 조건을 제시하고 아래 함수 $f(t)$가 모형 함수로 적합한 지를 논하시오.

$$f(t) = A\cos(Bt + C) + D \text{(단, } A, B, C, D\text{는 상수)}$$

# 문제 1 풀이

**1) 요구사항정리**

문제 1. 〈가〉에 근거하여 남녀 마라톤 기록이 〈나〉의 그래프와 같이 나타나는 이유를 설명하고, 〈다〉의 주장에 대한 자신의 견해를 논술하시오.

**2) 조건과 전제에 대한 정리**

ㄱ. 〈가〉를 통해, 일정 수준에 도달한 경우 더 이상의 기록 경신은 매우 어렵다는 사실을 도출할 수 있다. 이는 사람의 경우도 마찬가지일 것이다.

ㄴ. 〈나〉를 보면, 여성의 기록 향상이 남성에 비해 보다 빠른 속도로 진행되고 있다.

**ㄷ. 실제 역사적으로 남성이 처음 마라톤대회에 참가한 것은 1896년이었으나, 여성의 경우 1960년대에 들어서이다. 즉, 위의 표가 시작되는 1970년대의 경우 남성은 이미 충분한 기록향상이 이루어진 상황이지만, 여성의 경우 이제 막 기록향상이 이루어지고 있는 시점이다.**

**3) 수식화 및 풀이과정, 정답 서술**

**별도로 존재하지 않음**

# 정답가안

제시문 〈가〉는 경마대회에서 기록향상이 더디게 이루어지고 있음을 보여준다. 이러한 이유로는 이미 경마대회에 출전하는 말들이 우수한 혈통으로 선택교배되어 상당한 수준을 보여주고 있기 때문이다. 즉, 일정 수준이상에 도달한 경우 더 이상의 기록 경신은 매우 더디게 일어나고 있음을 보여준다. 이를 통해 보면, 인간의 경우도 비슷할 것이라 유추할 수 있다.

한편, 제시문 〈나〉는 1970년 이래로, 여성과 남성의 마라톤 대회 기록을 그래프로 표시한 것이다. 그래프 상에서 남성의 경우 마라톤 대회 우승 기록이 큰 변화 없이 일정한 값에 수렴하고 있지만, 여성의 경우 지속적으로 우승 기록이 향상되고 있음을 볼 수 있다.

그리고 제시문 〈다〉는 여성의 기록 향상 속도가 남성에 비해 빠르기 때문에 언젠가는 여성이 남성의 기록을 역전할 것이라 전망하고 있다.

하지만, 제시문〈가〉를 바탕으로 보면 제시문〈다〉의 전망은 타당하지 않다.

실제 역사적으로 볼 때, 남성의 경우 1896년 보스턴마라톤대회를 기점으로 마라톤 경기가 제정되었을 때부터 마라톤에 참여하였으나, 여성들의 경우 1960년대에 들어서야 마라톤 대회에 참가하였다. (실제 올림픽에서 여성 마라톤이 정식종목으로 채택된건 1984년 LA올림픽이 처음이다.) 즉, 위의 제시문 〈나〉의 표에는 1970년대 초부터의 기록이 남아 있는데, 여성의 경우 사실상 마라톤에 처음 참가한 시점에서의 기록이다. 반면, 남성들의 경우 이미 수십 년간 마라톤에 참가하여 일정 수준이상에 도달한 상황이다.

이는 남성들의 경우 이미 충분한 기록향상이 이루어진 상황이고, 여성들의 경우 마라톤에 처음 참여하여 지속적인 기록향상이 이루어지는 상황이므로 두 상황을 구분하지 않고 같은 선상에서 비교하여 전망하는 것은 타당하지 못하다.

# 문제 2 풀이

**1) 요구사항정리**

문제 2. 세상에서 일어나는 어떤 현상으로부터 수치 자료를 얻어내고 이 수치들의 변화 추이를 대략적으로 설명하는 함수를 도출하는 것을 수학적 모델링이라고 한다. 시간 $t$에 따른 마라톤 우승 기록의 모형 함수가 만족해야 할 조건을 제시하고 아래 함수 $f(t)$가 모형 함수로 적합한 지를 논하시오.

$$f(t) = Acos(Bt + C) + D \text{(단, } A, B, C, D\text{는 상수)}$$

**2) 조건과 전제에 대한 정리**

ㄱ. $f(t)$는 시간 t에 따른 마라톤 우승기록의 모형함수이다. 이는 Cos함수이며, Cos함수는 일정 구간 내에서 무한히 진동하는 주기함수이다.

ㄴ. 만약, 경기력 향상에 따른 결과가 일정한 기록에 수렴한다면, Cos함수 형태의 무한히 진동을 반복하는 함수의 형태가 타당할 것이며, 지속적으로 꾸준히 경기력이 향상된다면, 시간 t에 따른 마라톤 우승기록의 모형함수로 Cos함수 형태는 타당하지 않을 것이다.
즉, 이는 경기력의 향상이 끝없이 이루어질 것인지, 혹은 일정한 수준에 도달한 뒤부터는 특정 값에 수렴하는 형태로 나타날 것인지에 따라 각각 다르게 모델링 될 수 있다.

**3) 수식화 및 풀이과정, 정답 서술**

별도의 수식화 과정은 필요하지 않음

# 정답가안

주어진 함수 $f(t) = Acos(Bt + C) + D$의 타당성은 시간 $t$에 따라 달라진다. 만약, 시간 $t$가 무한대로 발산할 경우 우승 기록의 모형함수는 위와 같이 적은 폭으로 진동할 것이다. 남자의 우승 기록은 한계점에 도달했기 때문에 그래프가 모형 함수와 비슷한 모양을 가지는 것에서 타당성을 검증할 수 있다. 여성 또한, 시간이 흐르면 동일한 모양을 나타낼 것이다. 이 때, 상수 $A$는 기록의 진폭을 나타내며 $Bt + C$는 주기를 나타낸다. 우승 기록은 한계점에 도달하기 때문에 상수 $D$는 기록의 한계점에 관계되는 값이라 볼 수 있다. 상수 $A$는 코스의 난이도, 날씨 등의 변수들에 관계되어 기록의 기복을 나타낼 것이며, $Bt + C$는 마라톤 대회가 열리는 주기와 관계될 것이다. 하지만 시간 $t$가 충분히 크지 않다면, 위의 모형함수는 여성의 경우와 같이 한계점에 도달하지 못한 우승 기록의 그래프를 만족시킬 수 없다. 결국, 모형함수 $f(t) = Acos(Bt + C) + D$가 적합하려면 시간 $t$가 충분히 크다는 조건이 선행되어야 한다.

# (4) 한양대학교 2010학년도 모의 2번

[가] 좌표평면 위의 점 $(a,b)$의 $x$축에 대해 대칭인 점은 $(a,-b)$인데, 이것은 $b\neq 0$일 때 두 점을 잇는 직선이 $x$축에 수직이고 두 점의 중점이 $(a,0)$으로서 $x$축 위에 있고, $(a,b)$가 $x$축 위에 있을 때, 즉 $b=0$일 때는, $(a,b)$의 $x$축에 대해 대칭인 점이 자기자신이 될 텐데 실제로 이때 $(a,-b)=(a,b)$라는 의미에서 그러하다. 비슷하게 $(a,b)$의 직선 $y=x$에 대해 대칭은 점은 $(b,a)$인데, 그것은 $a\neq b$일 때 두 점을 잇는 직선이 그 기울기가 $-1$이므로 직선 $y=x$와 수직이고 두 점의 중점이 $(\frac{a+b}{2},\frac{b+a}{2})$으로서 직선 $y=x$위에 있고, $(a,b)$가 직선 $y=x$위에 있을 때, 즉 $a=b$일 때 $(a,b)$의 직선 $y=x$에 대해 대칭인 점은 자기저신이 될 텐데 실제로 이때 $(b,a)=(a,b)$라는 의미에서 그러하다.

[나] 좌표평면의 부분집합 $A=\{(x,y)$건$y=x^2\}$은 $y$축에 대해 대칭인데, 그것은 $A$에 속하는 임의의 점의 $y$축에 대해 대칭인 점이 다시 $A$에 대해 속하는 점이라는 의미에서 그러하다. 이것은 좌표평면 위의 점 $(a,b)$가 $A$에 속하면, 즉 $b=a^2$을 만족하면, $(a,b)$의 $y$축에 대해 대칭인 점 $(-a,b)$도 $b=(-a)^2$을 만족한다는 사실로부터 알 수 있다.

문제 1. 좌표평면의 점 $(a,b)$의 직선 $y=-x$에 대해 대칭인 점이 $(-b,-a)$임을 설명하시오.

문제 2. 좌표평면의 부분집합 $B=\{(x,y)$건$x^4+y^4=1\}$이 어떤 직선들에 대해 대칭인지 답하고 설명하시오.

문제 3. $a$가 실수일 때 좌표평면의 부분집합 $C=\{(x,y)|x^2+y^2=a\}$을 생각하자. $B$가 위 2번 물음에서와 같다고 할 때 $B\cap C$의 원소의 개수가 $a$값에 따라 어떻게 변하는지 서술하시오.

이 문제는 좌표평면에서 도형, 함수의 이동과 대칭을 이해하고 있는지를 묻는 문제이다. 각각의 직선에 대해 대칭인 점들을 증명하는 과정 자체가 제시문 [가]에 서술되어 있다. 특히 $y$축 대칭인 점들의 부분집합, 즉 우함수의 증명과정이 제시문 [나]에 서술되어 있으므로 위 두 가지 방법을 그대로 이용해서 답안을 서술하면 된다. 문제 3번에서 변역 $x^2=X, y^2=Y$로 치환하여 푸는 것은 수학적 센스이므로 수리적 감각 또한 연습을 통해 습득하여야 한다.

# 문제 1 풀이

1) 요구사항정리
좌표평면의 점 $(a,b)$의 직선 $y=-x$에 대해 대칭인 점이 $(-b,-a)$임을 설명하시오.

2) 조건과 전제에 대한 정리
ㄱ. 제시문 〈가〉에 증명과정이 서술되어 있다. 그에 따르면,
ㄴ. 어떤 직선에 대해 대칭인 점을 구하려면 그 점이 직선 위에 있지 않을 경우와, 직선 위에 있을 경우 두 가지로 나누어야 한다.
ㄷ. 직선 위에 있지 않은 점은 대칭축인 직선과 직교하는 직선 위에 있다. 또한, 대칭점과 원래의 점의 중점은 대칭축 위에 있다.
ㄹ. 직선 위에 있는 점은 그 자체로 대칭축에 대하여 대칭이다.

3) 수식화 과정
이 문제는 별도의 수식화 과정이 필요하지 않다.

# 정답가안

우선, $a \neq -b$일 때, $(a,b)$와 $(-b,-a)$두 점은 직선 $y=-x$위의 점이 아니고, 이 두 점을 잇는 직선의 기울기는 $\frac{-a-b}{-b-a}=1$이다. 이는 직선 $y=-x$와 수직이다. 또한, 두 점의 중점 $(\frac{a-b}{2},\frac{b-a}{2})$이 직선 $y=-x$위에 있으므로 대칭이다.
다음으로, $a=-b$일 때, $(-b,-a)=(a,-(-b))=(a,b)$이다. 이 때, 두 점은 모두 $y=-x$위에 있으므로 대칭점이 자기 자신이어야 한다는 점에 부합한다.
위를 종합할 때, $(a,b)$와 $(-b,-a)$는 직선 $y=-x$에 대해 대칭이다.

# 문제 2 풀이

1) 요구사항정리

좌표평면의 부분집합 $B=\{(x,y)|x^4+y^4=1\}$이 어떤 직선들에 대해 대칭인지 답하고 설명하시오.

2) 조건과 전제에 대한 정리

ㄱ. 제시문 <나>에 따르면, 어떠한 대칭축에 대해 대칭시킨 점이 본래의 함수를 만족하는 점이라면 그 대칭축에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 즉, 임의의 대칭축에 대칭시킨 점을 부분집합에 대입시켰을 때, 동일한 결과가 나오는 대칭축을 찾으면 된다.

ㄷ. 문제에서 주어진 대칭축이 총 4개이므로 그에 대하여만 대칭인지 증명하면 된다.

3) 수식화 과정

이 문제는 별도의 수식화 과정이 필요하지 않다.

## 정답가안

우선, $x^4+y^4=1$일 때의 점 $(x,y)$를 $x$축에 대해 대칭시키면 $(x,-y)$이다. 이 점을 다시 식에 대입하면 $x^4+(-y)^4=x^4+y^4=1$이므로 $(x,-y)$도 부분집합 $B$의 원소이다.

두 번째로, $(x,y)$를 $y$축에 대해 대칭시키면 점 $(-x,y)$이다. 이 점을 다시 식에 대입하면 $(-x)^4+y^4=x^4+y^4=1$이므로 $(-x,y)$도 부분집합 $B$의 원소이다.

다음으로, $(x,y)$를 직선 $y=x$에 대해 대칭시키면 점 $(y,x)$이다. 이 점을 다시 식에 대입하면 $y^4+x^4=x^4+y^4=1$이므로 $(y,x)$도 부분집합 $B$의 원소이다.

마지막으로, $(x,y)$를 직선 $y=-x$에 대해 대칭시키면 점 $(-y,-x)$이다. 이 점을 다시 식에 대입하면, $(-y)^4+(-x)^4=x^4+y^4=1$이므로 $(-y,-x)$도 부분집합 $B$의 원소이다.

위를 종합하면 $x^4+y^4=1$을 만족하는 점 $(x,y)$는 $x$축, $y$축, 직선 $y=x$, 직선 $y=-x$에 모두 대칭이다.

# 문제 3 풀이

1) 요구사항정리

$a$가 실수일 때 좌표평면의 부분집합 $C=\{(x,y)|x^2+y^2=a\}$을 생각하자. $B$가 위 2번 물음에서와 같다고 할 때 $B\cap C$의 원소의 개수가 $a$값에 따라 어떻게 변하는지 서술하시오.

2) 조건과 전제에 대한 정리

ㄱ. 주어진 값을 새로운 문자로 치환할 수 있다.

ㄴ. 실수의 제곱은 항상 $\geq 0$을 만족한다.

ㄷ. 새로운 문자로 나타낸 함수는 좌표평면 상에 나타낼 수 있다.

ㄹ. $B\cap C$를 만족하는 원소의 개수는 좌표평면 상에서의 교점이다.

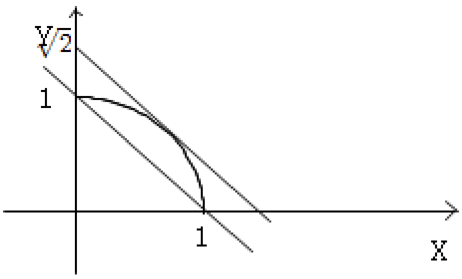
3) 수식화 과정

$x^2=X, y^2=Y$로 치환하면(이 때, $X\geq 0, Y\geq 0$),

$X+Y=a$, $X^2+Y^2=1$두 개의 식이 나온다.

## 정답가안

$x^2=X, y^2=Y$로 치환하면, $X, Y$는 음이 아닌 실수여야 하고, $X+Y=a$, $X^2+Y^2=1$을 만족한다. 이를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.




이 그림에서, 두 직선의 사이, 즉 $1\leq a<\sqrt{2}$일 때, $(X, Y)$는 두 쌍이 나오며 부분집합 $B$의 대칭성에 의해 $B\cap C$의 원소의 개수는 $4\times 2=8$쌍이 나온다.

만약 $a=\sqrt{2}$라면, $(X, Y)$는 한 쌍이 나오며 부분집합 $B$의 대칭성에 의해 $B\cap C$의 원소의 개수는 $4\times 1=4$쌍이 나온다.

다음으로 $a<1$혹은 $\sqrt{2}<a$라면, $(X, Y)$는 0쌍이므로 $B\cap C$의 원소의 개수는 없다.

## 2-2
## 수열

보라 이 자연의 아름다움을!
암모나이트의 나선형의 길이의 비는 황금비율을 이루고 있다. 황금비란 인간의 눈에 가장 아름답게 보이는 가로와 세로의 비율을 의미한다. 이는 피보나치 수열이다.

수열파트에서는 수리논술에 주로 출제되는 기본적인 등비수열의 활용과, 고난이도 수열들에 대해서 살펴봐야 한다.

# 수열이란?

수열은 사실 앞서 살펴본 함수와 동일하다.
수열은 자연수를 정의역으로 하는 함수이다. 이 때 치역이 규칙을 가지는 경우 그 규칙에 따라 등차수열, 등비수열, 조화수열 등으로 구분한다. 이 때문에 본 책에서도 함수와 수열을 같은 단원으로 분류하였다. **다들 알고 있는 사실이겠지만, 수열은 사실 함수로도 표현이 가능하다는 것을 다시 한 번 생각해보기 바란다.**

# 수열의 종류와 활용

수열은 교과서에서 크게, 등차수열 / 계차수열 / 등비수열 / 조화수열 등으로 나누어 배운다. 이 중 알아야 할 것은 등비수열이다. 또한 이외에도 군수열 / 멱급수 / 피보나치수열 / 완전순열(교란수열) 이 심화된 형태로서 출제될 수 있고 이들에 대해서도 알아야 한다.

한편, 특히 등비수열을 이용한 문제들이 많이 출제되므로 등비수열과 그 응용은 반드시 익혀두어야 한다. 또한, 수열과 연계되어 생각해보아야 할 것 중 하나가 극한이다. 수열을 무한대로 발산시키면 그 결과가 어떻게 될지에 대해서 묻기도 한다. 즉, 수열과 더불어 극한 -무한대로의 발산-에 대해서도 연계시켜야 한다. 앞서 등비수열의 응용에 있어서 등비수열은 다른 수열들과 달리 극한개념이 쉽게 가미될 수 있다.

# 등차/등비 수열

# 1) 등차수열

수열 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots a_n \dots$
에서, 각 항이 그 앞의 항에 일정한 차이인 공차 d를 더해져서 도출되는 경우, 이를 등차수열이라 부른다. 또한, d>0이면 증가수열, d<0이면 감소수열이라 한다

이는 식으로는 $a_{n+1} = a_n + d$ 이라 정의할 수 있다.
또한 $a_n = a + (n-1)d$ 이다.
한편, a,b,c가 순서대로 등차수열을 이룬다면, b는 a와 c의 등차중항이라고 한다.
b = a + d
c = b + d = a + 2d

= b = $\frac{a+c}{2}$

또한, $a_n = a + (n-1)d$ 일 때 등차수열의 합, $s_n$을 생각해볼 수 있다.
$s_n$ 은 = $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_n$
이고, $a_1$은 a, $a_2$는 $a + d$, $a_3$는 $a + 2d$. $a_n$는 $a + (n-1)d$ 로 놓고 대입할 수 있다.
이 때, $s_n$ 은 a가 n개 만큼 있고, d가 1개부터 n-1개 까지 있으므로,
$s_n$ 은 an + d(n(n−1))/2 라 할 수 있다.

## 2) 등비수열

수열 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots a_n$ .... 이 일정한 비율인 공비 r 만큼의 비율로 커지거나 작아지는 수열을 등비수열이라고 한다.

이 때, $a_{n+1} = a_n \times r$ 이며
등비수열의 일반항 $a_n = a \times r^{n-1}$ 이다.

이를 바탕으로 등비수열의 합 $s_n$을 구하면
$s_n$은 $a\,\dfrac{1-r^n}{1-r}$ 로 표시될 수 있다. (단 r은 1이 아닐 때)

한편, 등비수열에서 공비 r의 범위는 굉장히 중요하다
**r 이 만약, $1 \geq r > -1$ 의 범위에 있다면, 등비수열 $a_n$은 특정한 값에 수렴한다.**
**또한 r이 $1 > r > -1$ 의 범위 내에 있을 때 등비수열의 합인 $s_n$이 특정한 값에 수렴한다.**

수리논술에서 주로 응용되는 것은 공비 r 값의 범위와 이에 따른 수렴여부이다.
또한, 이는 극한과 연계되어 출제가 가능한 부분이므로 유의해야 한다.

**실제, 고려대 2012 오후 문제와 한양대 2011학년도 모의 2차 문제 모두 r의 값의 범위와 수렴조건을 활용하는 문제들이었다. 또한, 중앙대 2010 수시의 경우 n이 발산할 때, $a_n$이 결국 어떤 값에 수렴할 것인지를 물었다.**

이는 즉, 대학들이 수열단원에서 문제를 출제할 때, 등비수열을 주로 출제하며, 이 때 등비수열과 공비 r의 범위 조건 및 수렴여부를 바탕으로 문제를 냄을 의미한다. 그 이외에 조화수열이나 계차수열, 등차수열의 경우 여태까지 단 한 문제도 출제된 적이 없다. 수열과 나누어 별도로 자세하게 분류하여 서술한 수열심화(재무관리)의 경우도 등비수열의 원리합계의 응용과 심화라는 것을 생각해볼 때, **최근 4년간 고려대, 한양대, 중앙대의 기출 문제 중 수열단원에 해당되는 5개 문제가 모두 등비수열의 활용에서 출제되었음을 알 수 있다.**

짐작해보건대, 대학입장에서 등차수열의 경우 난이도가 너무 낮으며, 계차수열이나 조화수열을 출제할 경우 난이도는 조정이 가능하지만, 논술고사가 아닌 수학 본고사를 출제했다는 비난을 받을 수 있다. 수열에서 가장 기본적인 수열에 해당되면서도 실제 생활에서도 많이 응용되는 등비수열과 그 활용을 바탕으로 문제를 내는 것이 대학입장에서 난이도를 일정 수준으로 유지하면서도 본고사라는 비판을 피해갈 수 있는 가장 합리적인 방법이라 생각된다.

# 심화 수열

**한편, 대학에서 변별력을 높이기 위해서 어려운 수열들을 출제한다면, 나올 수 있는 경우의 수는 멱급수 / 피보나치수열 / 완전순열 정도이다. 한편, 이 부분 역시 어디까지나 가능성의 범위이며 나오리라는 보장이 없고, 이를 수리논술에 자유자재로 활용하기 위해 필요로 하는 공부시간이 많은 내용이다. 이 부분의 경우 이 책의 다른 부분들과 달리 내용이 이해되지 않는다면, 이해하지 않고 그냥 단순히 읽어만 보고 건너뛰기 바란다.**

## 1) 멱급수

멱급수의 일반항 $a_n$은

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$$

으로 표현된다.

일반적으로 수능에 나올 수 있는 멱급수의 경우 등차X등비의 형태를 가진 멱급수만이 출제가 가능하다. 이외의 멱급수의 경우 고등학교 교육과정의 교과범위를 넘어서기 때문이다. 또한 수능에는 멱급수가 단 한번도 출제되지 않았다.

그 이유는, 등차X등비 형태의 멱급수의 경우 $s_n - r\,s_n$ 의 형태를 이용하여 푸는 방법 이외에는 풀이방법이 없는데다가, 이는 개념을 활용하기 보다는 계산 노가다에 가깝다.
수능에서 가장 지양하는 문제 유형이 정형화된 유형에 계산 노가다임을 생각해볼 때, 교과과정 하에서 멱급수 문제는 수능에 절대 나올 수 없는 문제이다.

하지만, 대학의 논술고사에는 멱급수를 활용한 문제가 나올 수 있으므로 이에 유의해야 한다.
실제 고려대 2012 오후 문제의 경우 r값의 범위 조건을 활용하는 이외에도, 멱급수를 풀어내야만 문제를 맞출 수 있었다. 즉 멱급수 문제가 출제되었다.

## 2) 피보나치수열 - 황금비

이를테면, 제3항은 제1항과 제2항의 합, 제4항은 제2항과 제3항의 합이 되는 것과 같이, 인접한 두 수의 합이 그 다음 수가 되는 수열이다. 즉, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,··· 인 수열이며,
$a_1 = a_2 = 1$이며

$a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ $(n = 1,2,3\cdots)$ 로 나타낸다.

이것은 L.피보나치가 1202년 《산술(算術)의 서(書)》에서 처음으로 제기하였다. 이렇게 단순한 수열이 중요해진 것은 이 수열이 자연계의 일반법칙을 나타내는 것으로 보이기 때문이다.

피보나치 수열의 인접한 두수의 비(뒷수와 앞수의 비)를 분수의 형태로 하여 수열을 만들면,

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \cdots$$

또는

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \cdots$$

와 같이 되는데, 이 두 수열은 각각

$(\sqrt{5} - 1)/2 = 0.6180339\cdots$와
$(\sqrt{5} + 1)/2 = 1.6180339\cdots$

에 수렴한다. 이것은 황금분할의 비로 잘 알려진 수로, 자연계에서 많은 생물의 구조가 이를 따르는 것으로 밝혀져 있다. 예를 들어, 솔방울을 살펴보면 비늘 같은 조각이 오른쪽나선과 왼쪽나선을 이루며 교차하고 있는데, 그 나선의 수는 각각 8개와 5개로 되어 있다. 5와 8은 피보나치수열에서 서로 이웃하는 항이다. 이 밖에도 식물 중에는 꽃잎의 배열이 13:8 또는 34:21 등으로 되어 있는 경우가 많다.

또한 앵무조개의 달팽이 모양 껍데기의 구조도 황금분할의 비를 잘 보여 준다. 이러한 황금분할의 비는 예로부터 자연계의 가장 안정된 상태를 나타내는 것으로 알려져 있으며, 수학·음악·미술 등의 분야에서 매우 중요하게 다루어졌다. 레오나르도 다 빈치의 미술작품들이 철저히 황금분할을 이용한 것이라든지, 음악에서 고전파의 소나타 형식이 황금분할의 비를 나타내고 있는 것 등이 그 예이다. 특히 B.바르토크의 《현악기와 타악기 및 첼리스트를 위한 음악》은 피보나치 수열에 따라 새로운 주제의 도입, 악기의 배치, 음색 변경 등의 시점을 정한 것으로 유명하다.

## 피보나치 수열의 일반항

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

여기서 각 항의 계수로 방정식을 만들 수 있는데 이를 특성방정식(Characteristic Equation)이라고 한다.

$x^2 - x - 1 = 0$

이 방정식의 근을 p, q 라고 하면 아래의 두 식이 성립힌다.

$a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$

$a_{n+2} - qa_{n+1} = p(a_{n+1} - qa_n)$

(전개하면 두 식 모두 $a_{n+2} - (p+q)a_{n+1} + pqa_n$ 이다.)

각 식은 등비 수열의 점화식($b_n = a_{n+1} - pa_n$ 이라고 하면 $b_{n+1} = qb_n$) 꼴과 같으므로,

일반항을 구해보면

$a_{n+1} - pa_n = q^{n-1}(a_2 - pa_1)$

피보나치 수열의 첫번째 항과 두번째 항은 1 이므로,

$a_{n+1} - pa_n = q^{n-1}(1 - p)$

$p + q = 1$ 이므로

$a_{n+1} - pa_n = q^n$

마찬가지로

$a_{n+1} - qa_n = p^n$

두 식을 빼면

$(p - q)a_n = p^n - q^n$

p, q 를 구하면 $(1 \pm \sqrt{5})/2$

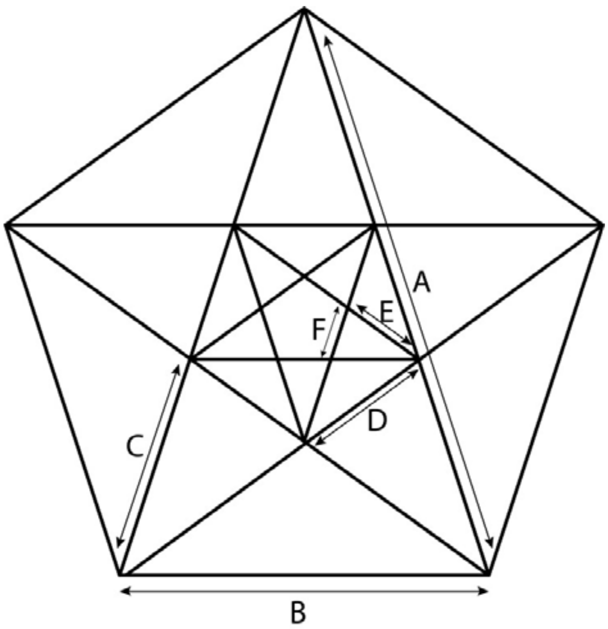
$p > q$ 라고 하면 $p - q = \sqrt{5}$

**그러므로 피보나치 수열의 일반항 $a_n$ 은 다음과 같이 구해진다.**

$a_n = \{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n\}/\sqrt{5}$

이렇게 구한 피보나치 수열의 일반항을 비네의 공식(Binet's formula)라고 한다. 피보나치 수열을 이용하여 나선을 그려보면 황금비와 유사함을 알 수 있다고 한다.

## 황금비란?




그리스의 수학자인 피타고라스는 만물의 근원을 수로 보고, 세상의 모든 일을 수와 관련지었다. 그는 인간이 생각하는 가장 아름다운 비로 황금비를 상정했다. 때문에 황금비가 들어 있는 정오각형 모양의 별을 피타고라스학파의 상징으로 삼기도 하였다. 그를 사로잡은 황금비란 무엇일까? 오른쪽 그림의 정오각형별에서 짧은 변과 긴 변의 길이의 비는 대략 5 : 8 이다. 이때, 짧은 변을 1 로 하면, 5 : 8 은 약 1 : 1.618 이 된다. 이것이 바로 황금비이다. 정오각형의 각 대각선은 서로를 황금비로 나누면서 가운데 작은 정오각형을 만든다. **그리고 이와 같은 과정은 무한히 반복된다. 또한 무한히 반복되면서도 그 비율이 변하지 않는다.**

황금비는 위의 그림에서 $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}} = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{E}} =$ 1.618….로 **표시된다.** 그리고 이와 같이 선분을 나누는 것을 황금분할이라고 한다. 긴 선분의 길이를 계산하면 1.618033989…로 소수점 아래 숫자가 끝없이 계속되는 소수인데 일반적으로는 소수 셋째 자리까지 나타낸 1 : 1.618 을 황금비로 사용해. 피타고라스는 왜 황금비가 아름답다고 했을까? 그건 바로 고대 그리스에서는 아름다움의 본질을 비례와 질서 그리고 조화라고 생각했기 때문이다. 또한 이 황금비를 가장 안정감 있고 균형 있는 비율로 느꼈기 때문이다. 그래서 그리스 시대에는 작은 술잔에서부터 신전에 이르기까지 황금비율에 딱 들어맞도록 만들었다.

한편, 가로와 세로의 비가 황금비인 사각형을 황금사각형이라고 한다. 이는 완전사각형이라고도 불린다. 사람들에게 여러 가지의 사각형 모양을 제시하고 그 중에서 가장 안정적으로 느껴지거나 눈에 가장 먼저 들어오는 사각형을 고르라면 대부분의 사람들은 황금비율이 들어 있는 직사각형 즉 황금사각형을 고르기 때문이다. 일상 생활에서 가장 많이 접할 수 있는 것 중에 하나가 담배 케이스이다. 담배 케이스의 가로와 세로의 비는 1:1.618 에 근접한다.

# 3) 완전순열(교란수열)

2명의 사람이 모자를 쓰고 있을 때, 바람에 날려서 모자가 떨어져서 다시 임의의 모자를 쓸 경우 자신의 모자를 쓰지 않는 경우의 수는 어떻게 될까?
처음에 모자 A, B 에 대해서 A, B 의 순서대로 모자를 쓰고 있을 때, 자신의 모자를 쓰지 않는 경우의 수는 B, A 로서 한가지 밖에 없다.
3명의 경우를 살펴보면 A,B,C 순서대로 모자를 쓰고 있을 때는 B, C, A 와 C, A, B의 두가지 밖에 없다. 그러나, 사람수가 늘어나면 하나씩 세어보기는 점점 어려워 진다.

이렇게 n 명의 모자가 뒤죽박죽 섞일 때, 모든 사람이 원래 자신의 모자를 유지하지 않는 경우의 수를 $D_n$이라고 할 때 $D_n$을 교란(Derangement)**순열이라고** 한다.

같은 말로 완전순열, 몽모르트순열이라고도 불리기도 한다.

한편, 이는

$$A=\{a_1,\ldots,a_n\}$$
$$B=\{1,2,\ldots,n\}$$
$$A=B,\ a_k \neq k$$

를 만족하는 수열 an 의 경우의 수이다.

우선 수열 $a_n$의 총 가짓수는 nPn, n!이다.
그럼 완전순열 d(n)의 여사건, 즉 한 사람이라도 자신의 자리에 앉는 경우의 수가
존재할 경우의 수는 n!-d(n)이다.
여러 가지 경우의 $a_n$ 중, $a_x$=x인 경우의 $a_n$은 집합 $b_x$에 포함되어 있다.
이 때, n($b_x$)는 $a_x$=x인 수열 $a_n$의 가짓수라고 할 수 있다.

그렇다면 $n(B_1)=n(B_2)=\ldots=n(B_n)=(n-1)!$ 입니다.

이는 겹치는 하나를 제외한 나머지 n-1개를 자유롭게 배열한 경우의 수이기 때문이다.
그리고 우리가 구하려는 d(n)은 여기서 포함 배제의 원리를 사용하여 구할 수 있다.
B1~Bn의 합집합의 원소의 개수는
(홀수개씩의 합집합들의 원소의 수 - 짝수개씩의 합집합들의 원소의 수) 이다.

(한 개짜리 집합 - 두 개짜리 집합 + 세 개짜리 집합 - ... )
B의 x개의 합집합의 원소의 개수는 어떻게 구할까?

n개의 자연수 중 x개를 뽑는 경우의 수 nCx, 나머지 n−x개를 배열하는 경우의수 (n−x)!의 곱이다.

$$f(n)=n((B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)^c)$$
$$=n!-n(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)$$

$$nCx \times (n-x)! = \frac{n!}{x!(n-x)!}(n-x)! = \frac{n!}{x!}$$

즉 위의 식은 이렇게 풀어 쓸 수 있다.

$$n(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (n! - \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \ldots + \frac{n!}{n!}(-1)^{n+1})$$
$$= n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{k!}$$
$$f(n) = n!(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1}}{k!})$$

한편, 완전순열의 일반항은 교육과정에서는 이렇게 서술하기도 한다. “$d_{n+2}=(n+1)(d_{n+1}+d_n)$”

하지만 이는 $d_n$에 대해 서술된 것이 아니다. 한편, 완전순열의 일반항을 $d_n$이라 하면, 이에 대해 매우 쉬운 식으로 이를 설명할 수도 있다. $d_n = [\frac{n!}{e}]$ 이다. 단, [ ]안의 값은 가장 가까운 자연수로 반올림한다. 이렇게 쓰는 것이 가능한 이유는 앞서 살펴본 테일러 전개를 완전순열에 적용하면 된다.

## (5) 2012학년도 고려대학교 오후

아래 제시문을 읽고 논제 3에 답하시오.

자연수 값을 취하는 확률변수 $X$에 대하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)$이 수렴할 때 이 무한급수의 합을 확률변수 $X$의 평균이라 한다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $p$이고 공비가 $r$인 등비수열이고 수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n = \frac{k}{n(n+1)(n+2)}$이다. 아래 표는 확률변수 $Y$와 $Z$의 확률분포를 나타낸다.

| n | 1 | 2 | 3 | … | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y=n)$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | … | $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ |
| $P(Z=n)$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | … | $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$ |

논제 3. 확률변수 $Y$의 평균과 확률변수 $Z$의 평균이 같을 때, $p, r, k$를 구하시오 (25점)

## 풀이

1) 요구사항정리
확률변수 $Y$의 평균과 확률변수 $Z$의 평균이 같을 때, $p, r, k$를 구하시오

2) 조건과 전제에 대한 정리
ㄱ. 부분분수의 전개를 이용하여, $\{b_n\}$을 풀고 이를 바탕으로 k값을 구할 수 있다.
ㄴ. 무한등비급수가 수렴하므로, $-1<r<1$ 이다.

3) 수식화 과정
별도로 존재하지 않음

## 정답가안

수열 $a_n$ 은 첫째항이 $p$ , 공비가 $r$ 인 등비수열이므로 일반항 $a_n=pr^{n-1}$ 이고 등비수열의 합 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{p}{1-r}=1$이므로 $p=1-r$이다. 이 때, 무한등비급수가 수렴하므로 $-1<r<1$이다.

수열 $b_n=\frac{k}{n(n+1)(n+2)}$이고, 이를 부분분수식으로 나타내면

$b_n=\frac{k}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$가 된다. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{k}{4}=1$이므로 $k=4$가 된다.

확률변수 $Y$의 평균은 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n$이고, 이를 수열의 합으로 다시 나타내면 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}na_n$이라 할 수 있다.

$\sum_{k=1}^{n}na_n=S_n$이라 고치면 $S_n=p+2pr+3pr^2+\cdots+npr^{n-1}$이 된다. 이 식의 양 변에 $r$을 곱해주면

$rS_n=pr+2pr^2+\cdots+npr^n$이 되고, 위 두 식의 차를 구하면

$(1-r)S_n=p+pr+pr^2+\cdots+pr^{n-1}-npr^n$이 되므로 $(1-r)S_n=\frac{p(1-r^n)}{1-r}-npr^n$이다.

$\therefore S_n=\frac{p(1-r^n)}{(1-r)^2}-\frac{npr^n}{1-r}$이고, 극한을 취해주면 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{p}{(1-r)^2}$가 된다.

위에서 $p=1-r$이라고 하였으므로 확률변수 $Y$의 평균 $E(Y)=\frac{1}{1-r}$이 된다.

확률변수 $Z$ 의 평균은 $\sum_{n=1}^{\infty}nb_n$ 이다. 이는 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{(n+1)(n+2)}$ 이므로 부분분수 꼴로 나타내면 $\sum_{n=1}^{\infty}k\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$이다. 이를 계산하면 $\frac{k}{2}$이다. $k=4$이므로 확률변수 $Z$의 평균 $E(Z)=2$이다.

$E(Y)$와 $E(Z)$가 같아야 하므로 $\frac{1}{1-r}=2$, $r=\frac{1}{2}$이다. 또한, $p=1-r$이므로 $p=\frac{1}{2}$이다.

즉, $p=\frac{1}{2}, r=\frac{1}{2}, k=4$이다.

## (6) 한양대학교 2011학년도 2차 모의

어느 농산물의 시장가격과 거래량에 대해 생각해 보자. 이 농산물에 대한 수요는 그 해의 해당 농산물 가격에 의해 결정되는 반면, 공급은 전년도의 시장가격에 의해 결정된다. 즉 생산자들은 전년도의 농산물 가격에 맞추어 올해의 생산량을 결정한다. 구체적으로 수요와 공급이 다음과 같은 식에 의해 결정된다고 하자.

수요: $D_t = a - bP_t$
공급: $S_t = -c + dP_{t-1}$

이 식에서 $D_t$ 는 연도 $t$의 수요량, $S_t$는 연도 $t$의 공급량, $P_t$는 연도 $t$의 시장가격, $P_{t-1}$ 은 연도 $(t-1)$ 의 시장가격을 가리킨다. 한편 $a, b, c, d$ 는 상수로 모두 양수 값을 가진다. 연도 $t$ 의 시장균형조건은 수요량과 공급량이 일치하는 것이다. 즉 $D_t = S_t$이다. 이 농산물의 최초의 가격은 $P_1$ 으로 주어져 있다.
우리는 시간이 흐름에 따라 이 농산물의 가격이 장기적으로 어떤 움직임을 보일지에 관심을 가지고 있다. 다음 물음에 답하라.

(1) 위 식에서 균형조건이 만족 될 때, 연도 $t$의 가격 $P_t$를 초기값 $P_1$을 이용하여 $t$의 함수로 표현하시오.

(2) 시간이 경과됨에 따라 시장가격이 어떤 가격수준으로 수렴하기 위해서는 어떤 조건이 필요한지 구하라. 또한 이때 장기적으로 도달하는 가격수준을 구하라.

## (1)풀이

1) 요구사항정리

위 식에서 균형조건이 만족 될 때, 연도 $t$의 가격 $P_t$를 초기값 $P_1$을 이용하여 $t$의 함수로 표현하시오.

2) 조건과 전제에 대한 정리

ㄱ. 수요량 $D_t$는 올해 농산물 가격 $P_t$에 영향을 받는다. 즉, $D_t = a - bP_t$이다.

ㄴ. 공급량 $S_t$는 전년도 시장가격 $P_{t-1}$에 영향을 받는다. 즉, $S_t = -c + dP_{t-1}$이다.

ㄷ. 연도 $t$의 시장균형조건은 수요량과 공급량이 일치하는 것이다. 즉 $D_t = S_t$이다

ㄹ. 농산물의 최초의 가격은 $P_1$으로 주어져 있다.

3) 수식화 과정

$D_t = a - bP_t$, $S_t = -c + dP_{t-1}$이고, $D_t = S_t$여야 하므로

$a - bP_t = -c + dP_{t-1}$이라 나타낼 수 있다. 이를 $P_t$에 대해 정리하면 $P_t = -\frac{d}{b}P_{t-1} + \frac{a+c}{b}$ 가 되며, 이는 수학적 귀납법의 점화식 유형에 해당하므로

$P_t - k = -\frac{d}{b}(P_{t-1} - k)$이라 변형할 수 있다.

## 정답가안

균형조건이 만족되려면 $D_t = S_t$이므로

$a - bP_t = -c + dP_{t-1}$이다.

이를 정리하면 $P_t = -\frac{d}{b}P_{t-1} + \frac{a+c}{b}$ 이 된다.

수열의 일반항을 구하기 위해 식을 변형하면 $P_t - k = -\frac{d}{b}(P_{t-1} - k)$가 되고

두 식을 연립하면 $k = \frac{a+c}{b+d}$라는 값을 구할 수 있다.

즉, 수열 $\left\{P_t - \frac{a+c}{b+d}\right\}$는 첫 번째 항이 $P_1 - \frac{a+c}{b+d}$이고 공비가 $-\frac{d}{b}$인 등비수열이다.

$\therefore P_t - \frac{a+c}{b+d} = (P_1 - \frac{a+c}{b+d})(-\frac{d}{b})^{t-1}$

즉 연도 $t$의 가격 $P_t = (P_1 - \frac{a+c}{b+d})(-\frac{d}{b})^{t-1} + \frac{a+c}{b+d}$이다.

## (2) 풀이

1) 요구사항정리

시간이 경과됨에 따라 시장가격이 어떤 가격수준으로 수렴하기 위해서는 어떤 조건이 필요한지 구하라. 또한 이때 장기적으로 도달하는 가격수준을 구하라.

2) 조건과 전제에 대한 정리

ㄱ. 상수 $a,b,c,d$는 모두 양수이다.

ㄴ. 무한등비수열이 수렴하기 위해서는 공비 $r$이 $-1 < r \leq 1$이라는 조건을 만족해야 한다.

3) 수식화 과정

문제 1번에서 구한 연도 $t$의 시장가격은 $P_t = (P_1 - \frac{a+c}{b+d})(-\frac{d}{b})^{t-1} + \frac{a+c}{b+d}$이다.

이는 첫 번째 항이 $P_1$이고 공비가 $-\frac{d}{b}$인 등비수열이다.

이 때, 이 등비수열이 수렴하기 위해서는 $-1 < -\frac{b}{d} \leq 1$이 되어야 한다.

## 정답가안

시간이 경과하면서 $P_t$가 수렴하려면, $P_t$가 등비수열이므로 공비 $-\frac{d}{b}$가 $-1 < -\frac{d}{b} \leq 1$이면 된다.

$b$와 $d$는 모두 양수이기 때문에 $0 < \frac{d}{b} < 1$, 즉 $d < b$이면 $P_t$는 수렴한다.

즉, 시간이 경과됨에 따라 시장가격이 어떤 가격수준으로 수렴하려면 $d < b$라는 조건이 전제되어야 한다.

이 때, 장기적으로 $\lim_{t\to\infty} P_t = \lim_{t\to\infty}\left\{(P_1 - \frac{a+c}{b+d})(-\frac{d}{b})^{t-1} + \frac{a+c}{b+d}\right\} = \frac{a+c}{b+d}$로 수렴하게 된다.

P.S 한양대학교 예시답안에 공개된 답에서는 $-1 < -\frac{d}{b} < 1$이라고 답을 제시한다. 하지만, 무한등비급수가 아닌 등비수열의 수렴 조건은 공비가 1일 때도 포함되므로 엄밀히 말하자면 $-1 < -\frac{d}{b} \leq 1$이 되어야 한다. 물론, $b$와 $d$모두 양수이므로 답에는 변함이 없다.

# (7) 중앙대학교 2010학년도 수시1

문제 3. 2009년 7월 영국의 환경단체인 신경제학재단(NEF)이 143개 국가의 삶의 만족도, 친환경지수, 기대수명 등을 종합하여 산출한 ‘행복지구지수(Happy Planet Index: HPI)’에 따르면, 코스타리카가 1위를 차지하고, 한국은 68위에 올랐다. 〈표1〉은 2001년부터 2009년까지 A국의 HPI이다.

〈표1〉 연도별 A국의 HPI

| 연도 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| HPI | 64.6 | 69.6 | 69.8 | 73.0 | 71.0 | 70.7 | 72.3 | 68.8 | 70.0 |

위의 연도별 자료를 분석한 결과, 당해 연도의 HPI는 전년도 HPI의 30%에 상수 50과 오차항이 더해지는 모형을 통해 산출되는 것을 알 수 있었다. 〈표1〉과 제시한 모형에 근거하여 아래 물음에 답하시오

●단, 오차항들은 평균이 0인 정규분포를 따르는 확률변수라고 가정한다.
●정규분포는 평균을 중심으로 좌우 대칭인 종 모양의 곡선이며, 자연현상이나 사회현상에서 관측된 통계자료를 설명할 때 가장 많이 사용되는 분포이다.

3-1. 2010년과 2011년의 HPI를 예측하고, 이에 대한 과정과 근거를 제시하시오.
[10점, 답안지 8줄 이내]

3-2. 단기적인 예측이 아닌 장기적인 예측, 즉 먼 미래의 HPI를 예측하고자 한다. 먼 미래의 HPI를 어떻게 예측할 수 있는지 그 과정을 논리적이고 구체적으로 제시하시오. [20점, 답안지 12줄 이내]

# 3-1 풀이

1) 요구사항정리
2010년과 2011년의 HPI를 예측하고, 이에 대한 과정과 근거를 제시하시오.

2) 조건과 전제에 대한 정리
ㄱ. 2010년과 2011년의 HPI는 기존의 HPI의 변동추이양상을 따라갈 것이다.
ㄴ. 오차항은 평균이 0이 정규분포를 따른 다는 것은, 오차로 인하여 더해지거나 줄어지는 값이 0임을 의미한다.

3) 수식화 과정
각 연도의 HPI를 $a_n$, 오차항을 $b_n$으로 놓고, $a_{n+1}=a_n \times 0.3+50+b_n$ 이라는 점화식을 도출해야 한다.

# 정답가안

3-1. 2010년과 2011년의 HPI값을 예측하기 위해서는, HPI를 구하는 점화식을 만들어야 한다.
2001년을 기준으로 각 연도의 HPI를 $a_n$ 이라 하자. 오차항을 $b_n$ 이라 하면 주어진 조건에서 $a_{n+1}=a_n \times 0.3+50+b_n$이라는 점화식이 도출된다

이 때, 오차항 $b_n$은 평균이 0인 정규분포를 따른다고 했으므로 0이라 가정해도 무방하다.

즉, 2010년의 HPI $\begin{aligned} a_{10} &= a_9 \times 0.3+50+0 \\ &= 70.0 \times 0.3+50+0=71.0 \end{aligned}$

2011년의 HPI $\begin{aligned} a_{11} &= a_{10} \times 0.3+50+0 \\ &= 71.0 \times 0.3+50+0=71.3 \end{aligned}$

이 된다.

# 3-2 풀이

1) 요구사항정리
단기적인 예측이 아닌 장기적인 예측, 즉 먼 미래의 HPI를 예측하고자 한다. 먼 미래의 HPI를 어떻게 예측할 수 있는지 그 과정을 논리적이고 구체적으로 제시하시오

2) 조건과 전제에 대한 정리
ㄱ. 장기적인 예측이며, 먼 미래의 HPI를 예측하고자 한다. 이 때 먼 미래라는 것은 n이 무한대로 발산하는 것이라고 보아도 무방하다. 즉, $a_{n+1} = a_n \times 0.3 + 50 + b_n$에서 n이 무한히 커지는 상황임을 가정하고 접근할 수 있다.
ㄴ. 이 때 $a_n$을 A라 하면, A = A X 0.3 + 50 이 성립되고, 여기서 A값을 풀어주면 된다.

3) 수식화 과정
별도로 존재하지 않음

## 정답가안

3-2. 먼 미래의 HPI를 예측하기 위해서, 위에서 구했던 점화식의 $n$을 무한대로 발산시키면 된다.
이 때의 오차항은 역시 평균이 0인 정규분포를 따르므로 0으로 추정해야 한다.

HPI $a_{n+1} = a_n \times 0.3 + 50$이고, 이를 다시 정리하면 $a_{n+1} - \frac{50}{0.7} = 0.3(a_n - \frac{50}{0.7})$가 된다.
$a_n - \frac{50}{0.7}$은 공비가 0.3인 등비수열이므로 $a_n - \frac{50}{0.7} = (a_1 - \frac{50}{0.7}) \times (0.3)^{n-1}$
$\therefore a_n = (a_1 - \frac{50}{0.7}) \times (0.3)^{n-1} + \frac{50}{0.7}$
n을 무한대로 발산시키면 $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (a_1 - \frac{50}{0.7}) \times (0.3)^{n-1} + \frac{50}{0.7} = \frac{50}{0.7} \fallingdotseq 71.43$이 된다.

즉, 먼 미래의 HPI는 약 71.43으로 수렴한다.

# 2-3
# 재무관리 (수열 심화)

인간은 항상 돈을 접하면서 살아간다.

자본주의 사회에서 인간과 화폐는 불가분의 관계이다.

우리는 자본주의 시대를 살아가기 위해서는 돈에 대해서 알아야만 한다.

상경계열 지원자뿐만 아니라 수리논술의 단골 소재로 사용되는 재무관리는, 고등학교 수학 수열 파트의 기본 이론을 사용하여 실생활에 적용시키기 가장 적합한 부분이라 할 수 있다. 수리논술에 활용될 가능성이 높은 재무관리 파트는 크게 적금과 연금, 생애재무설계, 리스크관리 세 파트로 나눌 수 있다.

## (1) 적금과 할부금, 연금

① 가치의 평가와 이자율의 개념

투자자들은 개인이 확보한 여유자금을 금융상품에 투자하여 재산을 증식하려 한다. 이 때, 시중에 판매되고 있는 여러 금융상품의 가치를 비교하게 된다. 또한, 기업의 재무담당자는 기업가치를 높이려고 노력하거나, 투자대비 수익, 즉 순수익이 가장 높은 사업을 선택하려한다. 그렇다면, 개인 혹은 기업의 재무담당자가 상품 혹은 투자사업의 가치를 어떻게 평가할 수 있는가? 투자대상이 무엇이든 투자자산의 가치는 미래 각 시점에서 얻게 되는 투자수입의 오늘 시점에서의 가치이다. 왜냐하면 순투자가치는 투자수입(수익)에서 투자액(비용)을 차감한 것이라고 할 수 있는데, 투자액은 현재시점의 현금흐름인 반면, 투자수익은 미래의 현금흐름이기 때문이다. 또한, 현재의 투자액은 확실하게 지출되는 비용인 반면, 미래의 투자수입은 확정된 수입이라기보다, 기대되는 이득으로 불확실성, 즉 위험이 항상 존재하기 때문이다.

결국, 가치의 평가는 다음 세 가지 요소에 의해 결정된다.

1. 미래에 발생할 현금흐름의 크기
2. 현금흐름 발생 시점의 차이
3. 현금흐름의 위험도(불확실성)

만약, 위험을 동일하다고 가정한다면, 현금흐름 발생 시점의 상이함을 조정해주면 가치의 비교가 가능해진다. 일반적으로, 수리논술 문제에서 주어지는 금융상품, 그리고 투자사업의 가치비교는 각 투자대상간의 위험이 동일하다는 가정에서 출발한다(한양대학교 2012년 모의논술 2차 문제는 위험의 개념까지 포함시킨 고난도의 문제이다.). 이 때, 미래의 현금흐름을 현재의 현금흐름으로, 혹은 현재의 현금흐름을 미래의 현금흐름으로 조정해야 하며, 이 때의 가치를 화폐(현금)의 시간가치라고 한다.
화폐의 시간가치가 상이한 이유는 다음과 같다.

1. 소비자들은 동일한 조건이라면 미래의 소비보다는 현재의 소비를 선호한다.
2. 일정한 현금이 현재에 있다면, 유리한 투자기회가 있을 경우 이에 투자함으로써 부를 증식시킬 수 있다.
3. 미래에는 물가상승에 따른 구매력 감소, 즉 인플레이션의 위험이 존재한다.
4. 미래에는 불확실성으로 인한 위험이 존재한다.

어떠한 시점의 현금가치를 미래가치 혹은 현재가치로 일치시키는 데에는 그에 맞는 환산율이 필요하다. 각 시점의 현금흐름에 위험이 없는 상황이라면 미래가치나 현재가치를 계산할 때, 환산율로 사용하는 것은 시장이자율이다. 특별한 언급이 없는 한, 이를 금리라고 표현하며 실제 문제에서도 시장이자율이나 금리라는 표현을 구분하지 않고 쓰는 경우가 대다수이다. 실제 금융시장에서의 이자율은 일정 기간의 자금 사용에 대해 자금제공자에게 지불되는 대가라고 정의할 수 있으며, 균현이자율(시장이자율)은 수요와 공급의 원리에 따라 형성된다. 이러한 환산율을 표시하는 명칭은 각 시점에 따라 다르다. 현재시점의 금액을 미래의 금액으로 환산할 때는 이를 이자율이라고 하며, 미래의 금액을 현재시점의 금액으로 환산할 때에는 할인율이라고 부른다. 즉, 적금이나 예금의 경우, 불입금이 주어지고 미

래에 얼마를 받을 수 있을 지 계산하는 문제에서는 환산율을 이자율이라고 표시해야 하며, 채권이나 연금과 같이 미래에 약정된 금액이 주어지고, 현재의 가치를 계산하는 문제에서는 할인율이라고 표시해야 한다.

② 미래가치와 현재가치의 계산

그렇다면, 이자율(혹은 할인율)을 이용하여 미래가치와 현재가치를 어떻게 계산할 수 있을까?

첫째로, 현재의 현금흐름을 미래의 현금흐름으로 환산하는 방법이 있다. 이를 미래가치의 계산이라고 한다. 현재의 일정금액은 시간이 경과하면서 자금사용의 대가로 이자를 받게 된다. 미래가치 계산에는 이자가 붙는 방법에 따라 두 가지 방법이 사용되는데 이는 단리계산과 복리계산이다. 단리계산은 원금에 대한 이자만 지급되는 것으로, 이자가 재투자되지 않음을 전제한 계산법이다. 반면에, 복리계산은 원본에 대한 이자도 그 다음 기 이후에 원금에 포함되어 이에 대해서도 이자가 지급되는 방법으로서, 이자까지 재투자하는 방법이다. 일반적으로, 이자에 대한 재투자기회는 지속적으로 존재하므로 복리계산방법에 의해 미래가치를 평가한다. 실제 수리논술 문제에 등장하는 문제 또한 복리계산을 전제로 하고 있다.

복리계산방법을 통해 미래가치를 계산하는 식을 일반화하여 나타내면 다음과 같다.

현재의 원금을 $P$, 이자율을 $r$, 투자기간을 $n$, $n$년의 미래가치를 $F$라고 표시하면

$$\text{미래가치} \quad F = P(1+r)^n$$

다음으로, 상이한 미래 시점의 현금흐름을 현재시점의 현금흐름으로 환산하는 방법이 있다. 이를 현재가치의 계산이라고 한다. 현재가치의 계산은 미래가치 계산의 역이므로 현재시점부터 $n$년 후의 미래가치 $F$를 이자율 $r$로 할인하여 계산한다. 이를 식으로 일반화하면 다음과 같다.

$$\text{현재가치} \quad P = \frac{F}{(1+r)^n} = F(1+r)^{-n}$$

③ 적금과 할부금

위에서 구한 식은 미래가치 계산의 경우 예금상품의 문제에, 현재가치 계산의 경우 채권상품의 문제에 사용할 수 있다. 그렇다면, 적금의 개념은 무엇일까?

적금이란, 일정 기간 동안 매 기 일정액을 은행에 넣거나 비정기적으로 넣어 약속한 기간이 지난 후에 이자가 포함된 계약 금액을 돌려받는 예금 제도이다. 실제 수학 혹은 수리논술 문제에 주어지는 적금상품은 정기적금으로서, 정해진 기간 동안 매 기마다 일정한 금액(불입금)을 은행에 예치하는 상품이다. 보통 적금에 관한 문제는, 매 월 일정한 금액을 예치하였을 때 약정기간이 지난 후에 얼마를 받을 수 있는지의 형태로 출제된다. 미래가치는 각 기마다 예치하는 불입액을 따로 처리해 그에 대한 미래가치를 각각 계산한 후, 그를 모두 더하는 방식으로 계산한다. 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

# [삽입란]

국, 적금의 미래가치(미래에 받을 수 있는 금액) $A$는 원금을 $P$, 이자율을 $r$이라 가정할 때, 다음과 같이 계산된다.

$$A = P + P(1+r) + P(1+r)^2 + \cdots + P(1+r)^{n-1}$$
$$= P\left\{\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right\}$$

정기적금과 정반대로 금융기관으로부터 일정액을 대출받아 정기적으로 얼마씩 상환하는 분할상환 대출 상품이 존재한다. 만약 $r$의 이자율로 $F$만큼 대출받아 정기적으로 일정금액을 상환해야 한다고 할 때, 매 기 상환해야 할 금액(할부금) $A$는 얼마일까?
이 경우 할부금을 구하는 것은 적금 계산의 역으로 매월 상환하는 일정 금액의 현재가치를 모두 더한 값이라고 할 수 있다. 즉, 다음과 같은 식이 유도된다.

$$F = \frac{A}{(1+r)} + \frac{A}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+r)^n}$$
$$= \frac{\frac{A}{1+r}\left\{1 - (\frac{1}{1+r})^n\right\}}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{A}{r}\left\{1 - (\frac{1}{1+r})^n\right\}$$

$$\therefore A = \frac{rF}{\left\{1 - (\frac{1}{1+r})^n\right\}}$$

④ 연금과 연금의 종류
연금이란, 일정 기간 동안 매 기 금액을 지급받는 상품이다. 연금에는 정상연금, 영구연금, 정률성장 영구연금, 유한정률성장형 연금 등의 종류가 있다.

정상연금이란, 미래 일정기간 동안 매번 일정한 금액을 지급받는 상품이다. 이 정상연금의 현재가치를 계산하기 위해서는 지급받는 모든 연금액을 현재시점의 가치로 할인하여 계산하면 된다. 즉, 지금 당장 목돈으로 일시불로 받을 수 있는 금액을 연금상품의 현재가치라 정의할 수 있다. 현재가치를 $P$, 매 기 지급받는 금액을 $A$, 할인율을 $r$, 기간을 $n$이라 하면

$$P = \frac{A}{(1+r)} + \frac{A}{(1+r)^2} + \frac{A}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{A}{(1+r)^n}$$
$$= A\left\{\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}\right\}$$

이라는 식을 도출할 수 있다.

위에서의 연금 계산은 현금흐름이 일정기간 동안만 유한하게 발생하는 경우이다. 이와는 달리 연금이 무한 지급되는 경우의 연금형태의 현금흐름을 영구연금이라 한다. 매년 $A$의 연금을 무한히 지급받을 경우 할인율이 $r$이라고 하면, 이 금액들의 현재가치는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$P=\frac{A}{(1+r)}+\frac{A}{(1+r)^2}+\frac{A}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{A}{(1+r)^n}+\cdots\infty=\frac{A}{r}$$

위에서 나타난 영구연금의 계산에서는 연금의 증가율을 고려하지 않았다. 미래 각 시점의 현금가치가 시작연도 $A$만큼의 연금에서 $g$만큼 일정하게 정률적으로 무한히 성장하는 경우의 연금상품을 정률성장연금이라고 부른다. 정률성장연금의 현재가치를 $P$라고 하면,

$$\begin{aligned}P&=\frac{A}{(1+r)}+\frac{A(1+g)}{(1+r)^2}+\cdots\frac{A(1+g)^{n-1}}{(1+r)^n}+\cdots\infty\\&=\frac{A}{r-g}\end{aligned}$$

가 된다. 이 때, 공비 $\frac{1+g}{1+r}$은 1보다 작아야 하므로 $r>g$이다. 현실에서도 시장이자율보다 연금의 성장률이 크다면, 연금상품을 지급하는 측에서는 손해를 볼 수밖에 없으므로, 일반적으로 $r>g$라는 결론을 얻을 수 있다.

또한, 연금 지급액이 정률성장하지만, 그 기간이 $n$년으로 유한한 상품을 유한정률성장형 연금이라고 하며, 그 현재가치 $P$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}P&=\frac{A}{(1+r)}+\frac{A(1+g)}{(1+r)^2}+\frac{A(1+g)^2}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{A(1+g)^{n-1}}{(1+r)^n}\\&=\frac{A}{r-g}\left\{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

**한편, 연금은 한양대 2011 모의 1차에서 출제된 바 있고, 미래가치와 현재가치를 계산하고 이자율을 비교하는 문제는 한양대 2012 모의 2차에서 출제되었다.**

## (2) 생애재무설계

대부분의 사람들은 일을 할 수 있는 능력이 있을 때 소득의 일부를 저축하고, 나이 들어 은퇴한 후 저축했던 돈의 일부를 인출하여 노후생활을 유지할 수 있는 노후계획을 세우게 된다. 이것처럼 전 생애동안 현재의 소득과 미래 소비를 고려하여 저축액, 소비액을 결정하는 계획활동을 생애재무설계라고 한다.

지금부터 일을 할 수 있는 $t$기간 동안 매년 $D$만큼 저축하고, 은퇴시점 후 $T$기간 동안 매년 $C$만큼 소비한다고 하자. 은퇴 후 $C$만큼의 소비를 지속적으로 영위하기 위해서는 저축할 수 있는 능력이 있을 때, 얼마나 저축해야 할까?

은퇴시점 전의 현금가치와 은퇴시점 후의 현금가치가 다르고, 또한, 각 시점에서의 매 년마다의 현금가치가 다르므로 이를 비교가능한 동일시점의 현금가치로 환산해야 한다. 이 때, 기준시점으로 설정하기 가장 편리한 것은 은퇴시점이다. 즉, 은퇴시점 전의 매 년 저축액 $D$를 정기적금 형식으로 계산하고, 은퇴시점 후의 매 년 소비액 $C$를 연금의 형식으로 계산한 후, 이를 같게 만들어 주면 생애재무설계가 완성된다.

즉, $\sum_{n=1}^{t} D(1+r)^n = \sum_{n=1}^{T} \frac{C}{(1+r)^n}$ 라고 나타낼 수 있다. 이 때 주의할 점은, 은퇴기간 전에도 매 년 $C$만큼의 금액을 소비한다는 것이다. 소비 없이 저축만 할 수는 없기 때문이다. 결국 연간저축액 $D$는 연간소득에서 연간소비액 $C$만큼을 차감한 금액이라고 표현할 수도 있다. 한양대학교 2011년 수시 논술문제에서는 연간소득과 저축액, 그리고 소비액의 개념에 더해 매년 내는 세금을 상정한다. 이 세금은 낸 만큼 연금의 형태로 은퇴 후에 연금의 형태로 지급된다. 이를 실생활에서 찾아보면 국민연금이라고 할 수 있다. **일반적인 생애재무설계는 세금이 원천징수되는 상황에서 소득을 가정하기 때문에 한양대 2011년 수시 문제는 난이도가 높은 문제라고 평가할 수 있다.**

# (8) 한양대학교 2012학년도 2차 모의

Bank 는 연 6%의 예금금리를 약속하는 정기예금을 판매하고 있다. 이는 원금 100 만원을 1 년간 H Bank 에 예금하는 경우, 원금 100 만원과 이자 6 만원을 합쳐 총 106 만원을 지급할 것을 약속하는 것이다. 원금과 이자를 포함한 금액 106 만원은 100+100x0.06=100(1+0.06)으로 계산된다. H Bank 의 금리가 6%로 일정하다고 가정하고, 이 106 만원을 다시 1 년 예치하는 경우를 생각해 보자. 이는 예금 시작 시점인 현재를 기준으로 한다면 총 2 년을 예 $100(1+0.06)^2$ 치하는 경우가 될 것이다. 이 경우 예금자가 2 년 후 수령할 것으로 기대되는 금액은 이 될 것이다.

이러한 관계를 일반화하면, 예금 원금 P 의 $n$ 년 후 기대 미래가치 F 와 이자율 r (수익률) 사이에는 $F=P(1+r)^n$ 의 관계가 성립한다. 또한 이 관계식을 통해 $P=\dfrac{F}{(1+r)^n}$ 의 관계도 성립함을 알 수 있다. 하지만 금융기관이 미래에 파산할 확률이 0 은 아니므로, 기대 수익이 실현되지 않을 불확실성은 항상 존재한다.

한편 기업의 투자 행위를 생각해 보자. 기업의 투자사업은 현 시점에서 자본투자를 수행하면 미래에 수익이 발생할 것으로 기대되는 것이 일반적이다. 물론 미래의 기대수익은 항상 불확실성을 내포하고 있다. 이러한 점에서 기업의 투자 행위는 개인의 예금 행위와 그 본질에 있어서 유사성을 지니고 있다. 주식회사 대망(이하 ㈜대망)은 아래의 특성을 가진 두 투자사업의 경제성을 검토하고 있다. ㈜대망은 자본의 제약으로 인해 두 사업 중 하나만 선택해야 하는 입장이다.

투자사업 A: 오늘 100 억원을 투자하면 3 년 후 70 억원, 그리고 5 년 후 70 억원의 수익이 발생하고 사업이 종결됨.

투자사업 B: 오늘 100 억원을 투자하면 2 년 후 60 억원, 그리고 4 년 후 60 억원의 수익이 발생하고 사업이 종결됨.

투자사업 A 와 B 에 표현된 각각의 미래 수익은 현 시점에서 가장 확률이 높은 상황에 대한 예상 수치이다.

(1) 제시문에서 소개된 H Bank의 정기예금 금리는 연 6%였다. 한편 연 4%의 예금금리를 가진 L Bank도 시장에 함께 존재하고 있다. 두 은행은 지리적 근접성, 편리성, 서비스의 질 등 고객의 선택에 영향을 미칠 수 있는 비경제적 여건은 동일하다. 예금자의 경제적 합리성을 가정하자. H Bank를 선택하는 예금자와 L Bank를 선택하는 예금자의 성향을 비교분석 하시오.

(2) H Bank는 위 제시문에 소개된 정기예금과는 별도로 다음과 같은 성격의 특별예금을 시판할 예정이다. 이 특별예금에 가입하여 오늘 1억원을 예치한 예금자는 3년 후 6천만원, 그리고 그로부터 2년 후 (즉 예치 시점부터는 5년 후) 다시 추가로 6천만원을 지급받고 계약은 종결한다. 이 특별예금의 연 이자율을 구할 수 있는 방정식을 수립하시오.

(3) ㈜대망이 A와 B, 두 투자사업 중 어느 투자사업을 선택하는 것이 합리적인지 분석하는 절차를 설명하시오.

## (1) 풀이

**1) 요구사항정리**

다른 비경제적 요건은 모두 같으며, 금리만 다른 두 은행이 있다. 예금자의 경제적 합리성을 가정하자. H Bank를 선택하는 예금자와 L Bank를 선택하는 예금자의 성향을 비교분석 하시오.

**2) 조건과 전제에 대한 정리**

ㄱ. 기업의 투자행위는 단순히 수익률에만 집중하는 것이 아니다. 현실에서의 투자행위는 미래에 대한 불확실성을 내포하고 있기 때문에, 투자의 위험까지 고려하여 결정하여야 한다. 이 때, 은행에서 지급될 원리금은 확정이익이 아니라 기대이익이다.

ㄴ. H Bank와 L Bank의 비경제적 요건은 동일하며, 차이가 있는 것은 금리뿐이다. 예금자가 경제적 합리성을 갖고 있음에도 L Bank가 시장에 존재한다는 것은, 예금자들에게 선택의 유인을 제공한다는 것이다. 이 때, 그 유인은 은행의 파산 위험도라고 분석할 수 있다.

ㄷ. H Bank를 선택하는 예금자는 위험도가 높더라도 많은 이익을 기대하는 위험선호형 투자자, L Bank를 선택하는 예금자는 이익이 적더라도 위험도가 낮은 것을 선호하는 위험회피형 투자자라고 정의할 수 있다.

**3) 수식화 및 풀이과정, 정답 서술**

수식의 계산 문제가 아니므로 수식화 과정이 필요 없음.

## 정답가안

은행이 책정한 금리라는 것은 미래에 확실히 지급될 확정금액이 아니다. 은행이 파산할 확률이 0이 아니므로 은행에서 지급될 원리금은 확정이익이라기보다는 기대이익이라고 정의할 수 있다. 문제에서 H Bank와 L Bank는 다른 비경제적 요건들이 동일하며, 금리만 차이가 있다. 이 때 고려해야 할 것이 은행이 파산할 확률, 즉 위험도이다. L Bank의 금리가 H Bank보다 낮음에도 시장에 존재하고 있다는 것은 H Bank보다 파산할 확률이 낮기 때문이다. 즉, H Bank를 선택하는 예금자는 위험도가 높더라도 보다 많은 이익을 기대하는 위험선호형 투자자일 것이며, L Bank를 선택하는 예금자는 이익이 적더라도 안전한 것을 선호하는 위험회피형 투자자일 것이다.

## (2) 풀이

**1) 요구사항정리**

제시된 특별예금의 연 이자율을 구할 수 있는 방정식을 수립하시오.

**2) 조건과 전제에 대한 정리**

ㄱ. 새로운 특별예금의 이자율은 연도별로 동일하다.

ㄴ. 특별예금에 가입했을 때, 3년 후와 5년 후에 지급받는 액수는 현재의 가치 그대로가 아니다. 현재의 화폐가치와 미래의 화폐가치는 금리, 인플레이션 등 다양한 요소 때문에 변화한다. 따라서, 현재의 화폐가치를 미래의 화폐가치로 변환하거나, 미래의 화폐가치를 현재의 화폐가치로 변환하여 동일한 시점에서 화폐가치를 비교해야 한다.

**3) 수식화 및 풀이과정, 정답 서술**

연 이자율을 $r$이라고 가정하자.

미래 수입의 현재가치를 더한 값이 1억이 되어야 하므로 $10 = \frac{6}{(1+r)^3} + \frac{6}{(1+r)^5}$ (단위는 천만원)이라 나타낼 수 있다.

## 정답가안

특별예금의 금리를 $r$이라고 가정하자. 3년 후의 6천만원과 5년 후의 6천만원은 현재 1억원에서 발생되는 미래의 이익이다. 그러므로 3년 후 6천만원의 현재가치와 5년 후 6천만원의 현재가치를 더하면 원금 1억이 되어야 한다. 이를 식으로 표현하면 $10 = \frac{6}{(1+r)^3} + \frac{6}{(1+r)^5}$

(단위는 천만원) 이 되고, 이 때의 $r$이 특별예금의 연 이자율이다.

## (3) 풀이

**1) 요구사항정리**

(주)대망이 A와 B, 두 투자사업 중 어느 투자 사업을 선택하는 것이 합리적인지 분석하는 절차를 설명하시오

**2) 조건과 전제에 대한 정리**

ㄱ. 각 투자 사업의 이자율은 서로 다르다.

ㄴ. 각 투자 사업에서 얻어지는 수익의 가치는 발생하는 시점에 따라 다르다. 현재의 화폐가치와 미래의 화폐가치는 금리, 인플레이션 등 다양한 요소 때문에 변화한다. 따라서, 현재의 화폐가치를 미래의 화폐가치로 변환하거나, 미래의 화폐가치를 현재의 화폐가치로 변환하여 동일한 시점에서 화폐가치를 비교해야 한다.

ㄷ. 각 투자 사업의 위험도는 0이 아니다.

**3) 수식화 및 풀이과정, 정답 서술**

## 정답가안

문제 2번과 같이 각 시점에 발생하는 이익을 모두 현재가치로 환산했을 때 이익의 합이 원금과 같아야 한다. A, B 투자사업의 기대이익률을 각각 $r_A, r_B$라고 하면

투자사업 A: $100 = \dfrac{70}{(1+r_A)^3} + \dfrac{70}{(1+r_B)^5}$

투자사업 B: $100 = \dfrac{60}{(1+r_B)^2} + \dfrac{60}{(1+r_B)^4}$가 된다.

두 식을 계산하면 $r_A, r_B$의 값을 구할 수 있다.

만약, 두 투자사업에 대한 위험도가 같다면, 기대이익률이 높은 투자사업을 선택해야 한다. 하지만, 투자사업의 기대이익률이 높을수록 위험도 또한 높아진다면, 기대이익률과 위험도의 차이를 분석하여 투자사업을 선택해야 한다. 즉, 리스크 대비 이익률이 높은 투자사업을 선택하게 될 것이다.

P.S 단순히 기대수익률이 높은 것만으로 투자 사업을 선택해서는 안 된다. 위험도에 대한 언급이 제시문과 문제 1번에도 언급되어 있으므로, 위험도의 개념까지 생각해서 문제를 풀어야 한다. 잊지 말자. 문제를 풀기 위해서는 제시문에 나온 모든 내용을 사용해야 한다.

# (9) 한양대학교 2011학년도 1차 모의

〈논술 2〉다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.

오늘 은행의 예금계좌에 현금을 입금을 하면 1 년 뒤에 입금한 금액의 5%를 이자로 받을 수 있다고 하자. 예컨대 오늘 100 만원을 이 계좌에 입금을 하면 1 년 뒤에는 100 만원*5% = 5 만원의 이자와 원금 100 만원을 합하여 105 만원의 돈을 가지게 된다. 이 때 1 년 후에 받게 될 105 만원을 오늘 입금하는 100 만원의 **미래가치**라고 생각할 수 있다. 반대로 오늘 입금하는 100 만원은 1 년 후에 가지게 되는 105 만원의 **현재가치**라 한다. 정리를 하면,
105 만원 = 100 만원 + 100 만원*5% = 100 만원*(1 + 0.05)
이고,
100 만원 = 105 만원/(1 + 0.05)

이다. 일반적으로 1 년 이자율을 $r$이라고 하면, 1 년 후에 받게 될 $C$원의 현재가치는 $\frac{C}{1+r}$로 계산할 수 있다.
그러면 은행에 예금을 하고 2 년을 기다리면 어떻게 될까? 위의 예에서 우선 1 년 뒤에 원금 100 만원과 이자 5 만원이 예금계좌에 기록이 된다. 이 105 만원을 원금으로 다시 2 년 뒤에는 105 만원에 대한 5% 이자가 발생하게 된다. 따라서 2 년 후에 가지게 되는 금액은

105 만원*(1 + 0.05) = 100 만원*$(1 + 0.05)^2$

이 된다. 이를 이자가 다시 이자를 낳는다고 하여 **복리**라고 한다.

(1) 은행에 입금을 하면 매년 4%의 비율로 이자를 받는다고 하자. 2 년 후에 내가 필요한 금액이 400 만원이라면 오늘 얼마를 예금을 하면 정확히 2 년 후에 400 만원을 만들 수 있을까?

(2) 매 년 $C$만큼의 현금을 영원히 받을 수 있는 연금이 있다. 매 년 이자율이 $r$일 때 이 연금의 현재가치는? $C$와 $r$은 양수임을 가정하라.

(3) $r$1 년 후에는 $C$원, 2 년 후에는 $C(1+g)$원, 3 년 후에는 $C(1+g)^2$원, ... 이렇게 영원히 지급되는 현금이 의 비율로 매 년 $(1+g)$ 증가하는 연금이 있다. 매 년 이자율이 일 때 이 연금의 현재가치는? $C, r, g$는 모두 양수임을 가정하라.

(4) 이번에는 $C$만큼의 현금을 $n$년 동안 받을 수 있는 연금을 생각하자. 매 년 이자율이 $r$일 때 이 연금의 현재가치는? $C$와 $r$은 양수임을 가정하라. (참고: 문제(2)의 결과를 이용하여 간단히 보일 수도 있다.)

## (1) 풀이

1) 요구사항정리

연 4%의 이자율로 2년 후의 400만원을 얻기 위해서는 현재 얼마를 예금해야 하는가?

2) 조건과 전제에 대한 정리

ㄱ. 이자율은 연 4%이다.

ㄴ. 예금 기간은 2년이다.

ㄷ. 이자는 복리로 계산된다.

ㄹ. 이러한 상품을 정기예금이라 한다.

3) 수식화 과정

현재 예금액을 $x$원이라고 가정하자.

연 4%의 이자율로 2년 후의 예금액을 계산하면

$(1+0.04)^2 \times x = 4000000$, 즉 $x = \frac{4000000}{(1+0.04)^2}$

## 정답가안

| |
|---|
| 이 정기예금의 예금액을 $x$원이라 가정하자. 2년 후 400만원의 현재가치가 $x$원과 같아야 하고, 매 년 이자율이 4%이므로 $x = \frac{400}{(1+0.04)^2} \fallingdotseq 370$, 즉 약 370만원을 입금하면 된다. |

## (2) 풀이

**1) 요구사항정리**

매 년 $C$만큼의 현금을 영원히 받을 수 있는 연금이 있다. 매 년 이자율이 r일 때 이 연금의 현재가치는 얼마인가?

**2) 조건과 전제에 대한 정리**

ㄱ. 이자율은 연 r%이다.
ㄴ. 매년 $C$원을 영원히 지급받는다.
ㄷ. 이자는 복리로 계산된다.
ㄹ. $C$원의 매 년마다의 가치는 다르다.
ㅁ. 이러한 상품을 영구연금이라 한다.

**3) 수식화 과정**

연금의 현재가치를 $P$라 하면 1년 후부터 매년 $C$원을 지급받는다. $C$원의 현재 가치를 모두 합한 금액을 식으로 나타내면

$P=\frac{C}{(1+r)}+\frac{C}{(1+r)^2}+\frac{C}{(1+r)^3}+\cdots$ 와 같은 무한등비급수의 꼴로 나타난다

## 정답가안

이 영구연금의 현재가치를 $P$라고 하면, 매년 지급되는 $C$의 현재가치를 다 더한 값과 같아야 한다.

$P=\frac{C}{(1+r)}+\frac{C}{(1+r)^2}+\frac{C}{(1+r)^3}+\cdots$ 이는 공비가 $\frac{1}{1+r}$ 인 무한등비급수이고, $0<\frac{1}{1+r}<1$ 이므로

수렴한다. 즉, $P=\frac{\frac{C}{1+r}}{1-\frac{1}{1+r}}=\frac{C}{r}$ 이다.

## (3) 풀이

**1) 요구사항정리**

지급되는 현금 $C$원이 $(1+g)$의 비율로 매 년 증가하는 연금이 있다. 매 년 이자율이 r일 때 이 연금의 현재가치는 얼마인가?

**2) 조건과 전제에 대한 정리**

ㄱ. 이자율은 연 r%이다.

ㄴ. 지급액은 $C$원을 시초가로 하여 매 년 $(1+g)$의 비율만큼 증가한다.

ㄷ. 이자는 복리로 계산된다.

ㄹ. 이러한 상품을 정률성장영구연금이라 한다.

ㅁ. 일반적인 연금상품에서 $g<r$이다.

**3) 수식화 과정**

연금의 현재가치를 $P$라 하면 1년 후 $C$원, 그 후부터 매 년 $C$원의 $(1+g)$의 비율만큼 증가한 금액을 지급받는다. 매 년 지급받는 금액을 현재가치로 나타내고, 이것을 모두 합하면

$P=\frac{C}{1+r}+\frac{C(1+g)}{(1+r)^2}+\frac{C(1+g)^2}{(1+r)^3}+\cdots$ 와 같은 무한등비급수의 꼴로 나타난다.

## 정답가안

문제 2번과 같은 방법으로, 이 정률성장영구연금의 현재가치를 $P$라고 하자.

$P=\frac{C}{1+r}+\frac{C(1+g)}{(1+r)^2}+\frac{C(1+g)^2}{(1+r)^3}+\cdots$ 이는 공비가 $\frac{1+g}{1+r}$ 인 무한등비급수이다.

만약 $g\geq r$이라면 $\frac{1+g}{1+r}\geq 1$이므로 $P$는 발산하므로 $P=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{C}{1+r}(1-(\frac{1+g}{1+r})^n)}{1-\frac{1+g}{1+r}}$ 이 되고, $g<r$이면 $\frac{1+g}{1+r}<1$이므로 $P$는 수렴하므로 $P=\frac{\frac{C}{1+r}}{1-\frac{1+g}{1+r}}=\frac{C}{r-g}$ 가 된다.

일반적인 연금상품에서 연 이자율 $r$은 지급액의 성장률 $g$보다 작다. 만약, $g\geq r$이라면 연금의 현재가치를 계산할 수 없기 때문이다.

즉, 이 상황에서 연금상품의 현재가치는 $P=\frac{\frac{C}{1+r}}{1-\frac{1+g}{1+r}}=\frac{C}{r-g}$ 라 나타낼 수 있다.

## (4) 풀이

**1) 요구사항정리**

$C$만큼의 현금을 $n$년 동안 받을 수 있는 연금을 생각하자. 매 년 이자율이 r일 때 이 연금의 현재가치는 얼마인가?

**2) 조건과 전제에 대한 정리**

ㄱ. 이자율은 연 r%이다.
ㄴ. $C$원의 지급액을 앞으로 $n$년 동안 지급받는다.
ㄷ. 이자는 복리로 계산된다.
ㄹ. 이러한 상품을 정상연금이라 한다.
ㅁ. 수열의 정의에 따라 영구연금에서 n+1년부터의 지급액을 제외하면 정상연금을 구할 수 있다.

**3) 수식화 과정**

연금의 현재가치를 $P$라 하자.
매 년 $C$원, 그 후부터 $n$년 동안 $C$원을 지급받는다. 매 년 지급받는 금액을 현재가치로 나타내고, 이것을 모두 합하면
$P=\frac{C}{1+r}+\frac{C}{(1+r)^2}+\frac{C}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{C}{(1+r)^n}$ 와 같은 등비수열의 합으로 나타난다.

## 정답가안

이 정상연금의 현재가치를 $P$라고 하면, 매년 지급되는 $C$의 현재가치를 다 더한 값과 같아야 한다.
$P=\frac{C}{(1+r)}+\frac{C}{(1+r)^2}+\frac{C}{(1+r)^3}+\cdots+\frac{C}{(1+r)^n}$ 이는 공비가 $\frac{1}{1+r}$ 인 등비수열이므로 그 합을 구하면 $P=\frac{\frac{C}{1+r}\left(1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{1+r}}=\frac{C}{r}\left(1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right)$ 이다.

Another Solution

문제 2번의 영구연금의 현재가치를 $P_A$, $(n+1)$년부터의 영구연금의 현재가치를 $P_B$라 가정하면, $P_A = \frac{C}{r}$, $P_B = \frac{\frac{C}{r}}{(1+r)^n} = \frac{C}{r(1+r)^n}$가 된다. 즉, $P_A - P_B$가 확정연금의 현재가치가 된다.

문제 2번에서 받는 영구연금의 현재가치에서 $(n+1)$년부터 $C$를 영원히 받는 연금의 현재가치를 빼주면, 1년 후부터 $n$년까지 $C$를 지급받는 연금의 현재가치를 구할 수 있다.

문제 2번의 연금현재가치를 $P_A$, $(n+1)$년부터 $C$를 영원히 받는 연금현재가치를 $P_B$라고 하면, $P_A = \frac{C}{r}$, $P_B = \frac{\frac{C}{r}}{(1+r)^n} = \frac{C}{r(1+r)^n}$이 된다.

결국 1년 후부터 $n$년까지 $C$를 지급받는 연금의 현재가치 $P$를 구하면

$P = P_A - P_B = \frac{C}{r} - \frac{C}{r(1+r)^n} = \frac{C}{r}(1 - \frac{1}{(1+r)^n})$이다.