* 2019학년도 평가원 6월 수학 가형 30번.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$,

$(t, f(t))$ 에서의 접선 : $y = f'(t)(x-t)+f(t)$

$\therefore g(t) = -tf'(t)+f(t)$ ..... ①

$(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\} = 2t \longrightarrow g(t+1)-g(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ ..... ②

원점대칭 $\therefore \int_{-4}^{4} = 0$.

$\int_0^1 f(x)dx = -\dfrac{\ln 10}{4}$, $f(1) = 4+\dfrac{\ln 17}{8}$,

$2\{f(4)+f(-4)\} - \int_{-4}^{4} f(x)dx = ?$ → 정리부터 시작.

① 에서 $f(t) = g(t)+tf'(t)$.

$\therefore \int_{-4}^{4} f(x)dx = \int_{-4}^{4} g(t)dt + \int_{-4}^{4} tf'(t)dt = \int_{-4}^{4} g(t)dt + [tf(t)]_{-4}^{4} - \int_{-4}^{4} f(t)dt$.

$\therefore \int_{-4}^{4} f(x)dx = \frac{1}{2}\times\int_{-4}^{4} g(t)dt + \frac{1}{2}\{4f(4)+4f(-4)\}$.

따라서 묻는 내용이 $2\{f(4)+f(-4)\} - \int_{-4}^{4} f(x)dx = -\frac{1}{2}\int_{-4}^{4} g(t)dt$ 로 표현된다.

② 에서 정적분을 분할 (대칭성 활용) 해 보면 $g(x)$ 함수에서

$\int_{-4}^{4} g(x+1)dx = \int_{-3}^{5} g(x)dx = \int_{-4}^{4} g(x)dx$.

$\Rightarrow \int_4^5 = \int_{-4}^{-3}$, $\int_3^4 = \int_{-3}^{-2}$, $\int_2^3 = \int_{-2}^{-1}$, $\int_1^2 = \int_{-1}^{0}$ $\Rightarrow \int_0^1$ 은 대칭활용 불가.

$\therefore$ ② 에서 $\int_0^1 g(x+1)dx - \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}dt = \ln|1+t^2|\Big]_0^1 = \ln 2$.

$\therefore \int_0^1 g(x+1)dx = \int_1^2 g(x)dx = \int_0^1 g(x)dx + \ln 2$.

적분구간을 $\int_0^1$ 에서 $\int_0^2$ 로 바꾸면 공통부분을 없애고

$\int_2^3 g(x)dx = \int_0^1 g(x)dx + \ln 5$. $\therefore \int_0^1 g(x)dx = T$ 라 하고 차례로 정리.

$\int_1^2 = T + \ln 2$

$\int_2^3 = T + \ln 5$

$\int_3^4 = T + \ln 10$

$\int_4^5 = T + \ln 17$

$\therefore \int_{-4}^4 g(x)\,dx = \int_{-4}^{-3} + 2\times\int_3^4 + 2\times\int_2^3 + 2\times\int_1^2 + \int_0^1 \quad \left(\int_{-4}^{-3} = \int_4^5\right)$

$= T + \ln 17 + 2T + 2\ln 10 + 2T + 2\ln 5 + 2T + 2\ln 2 + T$

$= 8T + \ln 17 + 2\ln 100 = 8T + \ln 17 + 4\ln 10$

$\therefore -\frac{1}{2}\int_{-4}^4 g(x)\,dx = -4T - \frac{\ln 17}{2} - 2\ln 10$

$T = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \{-xf'(x) + f(x)\}\,dx = -\int_0^1 xf'(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx$

$= -\left\{[xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx\right\} + \int_0^1 f(x)\,dx$

$= -f(1) + 2\int_0^1 f(x)\,dx = -4 - \frac{\ln 17}{8} - \frac{\ln 10}{2}$

$\therefore (-4T) - \frac{\ln 17}{2} - 2\ln 10$

$= 16 + \frac{\ln 17}{2} + 2\ln 10 - \frac{\ln 17}{2} - 2\ln 10 = 16$ //

* 해설처럼 $g(t+1) - g(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ 에서 (항등식) 정리된 부분이 원점대칭인 것을 이용해서 정적분 분할로 들어가도 되고, $\int_t^{t+1} g'(x)\,dx = \frac{2t}{1+t^2}$ (정리된 부분이 로그함수 미분한 형태) 에서 정적분 분할로 들어갈 수도 있다.