04 사인법칙과 코사인법칙

유제 본문 57~63쪽

1 ③	**2** 12	**3** ⑤	**4** ③	**5** ⑤
6 ③	**7** ②	**8** 8		

1 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 1이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{CA}}{\sin B}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$
$=2\times1$
$=2$

따라서 $\sin A=\dfrac{\overline{BC}}{2}$, $\sin B=\dfrac{\overline{CA}}{2}$, $\sin C=\dfrac{\overline{AB}}{2}$이므로

$\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{\overline{BC}}{2}+\dfrac{\overline{CA}}{2}+\dfrac{\overline{AB}}{2}$
$=\dfrac{\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}}{2}$
$=\dfrac{3}{2}$

답 ③

2 $A+B+C=180^\circ$이므로 조건 (가)에서

$\sin A\times\sin(180^\circ-A)=\dfrac{9}{25}$

$\sin A\times\sin A=\dfrac{9}{25}$이고, $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$\sin A=\dfrac{3}{5}$

따라서 조건 (나)에서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 10이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2\times10$

$\overline{BC}=20\sin A$
$=20\times\dfrac{3}{5}$
$=12$

답 12

3 $3\overline{AB}^2+3\overline{CA}^2=3\overline{BC}^2+2\times\overline{AB}\times\overline{CA}$에서

$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2=\dfrac{2}{3}\times\overline{AB}\times\overline{CA}$ ...... ㉠

또 $\angle CAB=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos\theta$

$2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos\theta=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서

$2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos\theta=\dfrac{2}{3}\times\overline{AB}\times\overline{CA}$

이므로 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

따라서

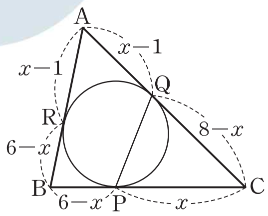
$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$
$=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}$
$=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

이므로

$\tan(\angle CAB)=\tan\theta$
$=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$=\dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}$
$=2\sqrt{2}$

답 ⑤

4 $\overline{CP}=\overline{CQ}$이므로 삼각형 PCQ는 이등변삼각형이다.



$\overline{CP}=x$로 놓으면

$\overline{BP}=6-x$

이때 삼각형 ABC에 내접하는 원이 선분 AB와 만나는 점을 R라 하면

$\overline{BR}=6-x$이므로

$\overline{AR}=5-(6-x)$
$=x-1$

$\overline{AQ}=x-1$이므로

$\overline{CQ}=7-(x-1)$
$=8-x$

$\overline{CP}=\overline{CQ}$에서

$x=8-x$

$2x=8$

$x=4$

한편 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\cos C$

$5^2=6^2+7^2-2\times6\times7\times\cos C$

$\cos C=\frac{6^2+7^2-5^2}{2\times6\times7}$

$=\frac{5}{7}$

따라서 삼각형 PCQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=\overline{CP}^2+\overline{CQ}^2-2\times\overline{CP}\times\overline{CQ}\times\cos C$

$=4^2+4^2-2\times4\times4\times\frac{5}{7}$

$=16+16-\frac{160}{7}$

$=\frac{64}{7}$

이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\frac{64}{7}}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$

답 ③

5 $\cos^2(A+B)+(\sin A+\cos B)(\sin A-\cos B)$

$=\cos^2(180°-C)+(\sin^2 A-\cos^2 B)$

$=\cos^2 C+\sin^2 A-\cos^2 B$

$=(1-\sin^2 C)+\sin^2 A-(1-\sin^2 B)$

$=-\sin^2 C+\sin^2 A+\sin^2 B$

한편 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$-\left(\frac{c}{2R}\right)^2+\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{b}{2R}\right)^2=0$

따라서 $a^2+b^2=c^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle$C$=90°$인 직각삼각형이다.

답 ⑤

6 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

이므로

$a\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=b\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+c$

$\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}+c$

이 식의 양변에 $2c$를 곱하면

$c^2+a^2-b^2=b^2+c^2-a^2+2c^2$

이 식을 정리하면

$a^2=b^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $\angle$A$=90°$인 직각삼각형이다.

답 ③

7 삼각형 ABC에서 $A+B+C=180°$이므로

$\sin(B+C)=\sin(180°-A)$

$=\sin A$

즉, $\sin A=\frac{1}{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A=\frac{1}{2}\times6\times9\times\frac{1}{3}$

$=9$

답 ②

8 등변사다리꼴 ABCD에서 $\overline{AC}=\overline{BD}$이므로

조건 (나)에서 사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin 60°=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AC}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{AC}^2$

조건 (가)에서

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{AC}^2=16\sqrt{3}$

따라서 $\overline{AC}^2=64$이므로

$\overline{AC}=8$

답 8

Level 1 기초 연습

본문 64~65쪽

1 ⑤	2 ①	3 ⑤	4 3	5 ②
6 ③	7 ④	8 61		

1 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$\pi R^2=3\pi$에서

$R=\sqrt{3}$

$\angle$BCA$=\theta$라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2\times\sqrt{3}$

즉, $\sin\theta=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

2 삼각형 ABC에서

$\cos B=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$이므로

$\sin B=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{4}$

$\cos C=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$이므로

$\sin C=\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{3}$

따라서 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}$이므로

$\dfrac{\overline{AC}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{8}{\frac{1}{3}}$에서

$4\times\overline{AC}=24$

즉, $\overline{AC}=6$

답 ①

3 삼각형 ABC에서 $A=120°$, $B=15°$이므로

$C=180°-(120°+15°)$

$=45°$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=2R$

$\dfrac{6}{\sin 45°}=2R$

$6\sqrt{2}=2R$

$R=3\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi\times(3\sqrt{2})^2=18\pi$

답 ⑤

4 점 P가 삼각형 OAB의 외접원의 중심이므로

이 원의 반지름의 길이는 $\overline{OP}$이다.

또 직선 $y=\sqrt{3}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기가 $60°$이므로

$\angle BOA=30°$

이때 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin(\angle BOA)}=2\times\overline{OP}$

따라서 $\dfrac{3}{\frac{1}{2}}=2\times\overline{OP}$에서

$\overline{OP}=3$

답 3

5 선분 CA의 길이가 최대이므로

$\angle B=\theta$

양수 k에 대하여 $\overline{AB}=3k$, $\overline{BC}=4k$, $\overline{CA}=6k$라 하면

코사인법칙에 의하여

$\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\theta$

$(6k)^2=(3k)^2+(4k)^2-2\times3k\times4k\times\cos\theta$

따라서

$\cos\theta=\dfrac{(3k)^2+(4k)^2-(6k)^2}{2\times3k\times4k}$

$=\dfrac{-11k^2}{24k^2}$

$=-\dfrac{11}{24}$

답 ②

6 삼각형 PQR에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PR}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QR}^2-2\times\overline{PQ}\times\overline{QR}\times\cos(\angle PQR)$

$=3^2+4^2-2\times3\times4\times\dfrac{1}{2}$

$=13$

이므로

$\overline{PR}=\sqrt{13}$

이때 원 C의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{PR}}{\sin(\angle PQR)}=2R$

$\dfrac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$에서

$R=\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$

따라서 원 C의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{13}{3}\pi$

답 ③

7 $\frac{\sin A}{5}=\frac{\sin B}{6}=\frac{\sin C}{7}$에서

$\sin A : \sin B : \sin C=5:6:7$

또 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$ 이므로

$a:b:c=\sin A : \sin B : \sin C$

$=5:6:7$

이때 양수 k에 대하여 $a=5k$, $b=6k$, $c=7k$로 놓으면

코사인법칙에 의하여

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$이므로

$(5k)^2=(6k)^2+(7k)^2-2\times6k\times7k\times\cos A$

$\cos A=\frac{(6k)^2+(7k)^2-(5k)^2}{2\times6k\times7k}$

$=\frac{60k^2}{84k^2}$

$=\frac{5}{7}$

따라서

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

이므로

$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{\frac{5}{7}}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

답 ④

8 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin(\angle ABC)$

$=\frac{1}{2}\times4\times\overline{BC}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sqrt{3}\times\overline{BC}$

이므로

$\sqrt{3}\times\overline{BC}=5\sqrt{3}$에서

$\overline{BC}=5$

따라서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

$=4^2+5^2-2\times4\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=16+25+20$

$=61$

답 61

Level 2 기본 연습

본문 66~67쪽

1 32	**2** ④	**3** ④	**4** 103	**5** ⑤
6 8	**7** ⑤	**8** ③		

1 삼각형 POQ에서 $\angle POQ=45°$이므로

삼각형 POQ의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{PQ}}{\sin(\angle POQ)}=2R$

$\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$에서

$R=2\sqrt{2}$

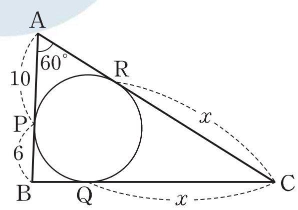
즉, 두 점 P, Q의 위치에 상관없이 삼각형 POQ의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$로 일정하다.

따라서 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원에 내접하는 삼각형의 한 변의 길이의 최댓값은 지름의 길이와 같으므로 선분 OP의 길이의 최댓값은 $4\sqrt{2}$이다.

즉, $M^2=(4\sqrt{2})^2=32$

답 32

2 삼각형 ABC에 내접하는 원이 선분 BC와 만나는 점을 Q, 선분 CA와 만나는 점을 R라 하자.



$\overline{CQ}=\overline{CR}=x$라 하면

$\overline{AP}=16\times\frac{5}{8}=10$,

$\overline{BP}=16\times\frac{3}{8}=6$

이므로

$\overline{BC}=6+x$, $\overline{AC}=10+x$

이때 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos 60^\circ$

$(6+x)^2=16^2+(10+x)^2-2\times16\times(10+x)\times\frac{1}{2}$

$36+12x+x^2=256+100+20x+x^2-160-16x$

$8x=160$

따라서 $x=20$이므로

$\overline{BC}=6+20$

$=26$

답 ④

3 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}=2R$

이므로

$\overline{BC}=2R\sin A$

$\overline{CA}=2R\sin B$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin C$

$=\frac{1}{2}\times2R\sin A\times2R\sin B\times\sin C$

$=2R^2\sin A\times\sin B\times\sin C$

따라서 삼각형 ABC의 넓이가 $8\sqrt{3}$이고, 외접원의 반지름의 길이가 4이므로

$8\sqrt{3}=2\times4^2\times\sin A\times\sin B\times\sin C$에서

$\sin A\times\sin B\times\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}$

답 ④

4 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos A$

$7^2=6^2+3^2-2\times6\times3\times\cos A$에서

$\cos A=-\frac{1}{9}$

이때

$\sin^2 A=1-\cos^2 A$

$=1-\left(-\frac{1}{9}\right)^2$

$=\frac{80}{81}$

이고, $0^\circ<A<180^\circ$이므로

$\sin A=\frac{4\sqrt{5}}{9}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$이므로

$2R=\frac{7}{\frac{4\sqrt{5}}{9}}$

$=\frac{63}{4\sqrt{5}}=\frac{63\sqrt{5}}{20}$

$R=\frac{63\sqrt{5}}{40}$

즉,

$p+q=40+63$

$=103$

답 103

5 호의 길이의 비가 2 : 7 : 3이므로

중심각의 크기의 비가 2 : 7 : 3이고,

원주각의 크기의 비도 2 : 7 : 3이다.

즉,

$\angle BCA=180^\circ\times\frac{2}{12}$

$=30^\circ$

$\angle CAB=180^\circ\times\frac{7}{12}$

$=105^\circ$

$\angle ABC=180^\circ\times\frac{3}{12}$

$=45^\circ$

따라서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle BCA)}=\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}$

이므로

$\frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$

즉, $\frac{\overline{AB}}{\frac{1}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$에서

$\overline{AB}=5$

답 ⑤

6 (ⅰ) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AB}}{2R}=\sin C$이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin C$

$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\frac{\overline{AB}}{2R}$

$=\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CA}}{4R}$

조건 (가)에서

$\frac{35}{4R}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$4R=\frac{70}{5\sqrt{3}}$

$=\frac{14\sqrt{3}}{3}$

즉, $R=\frac{7\sqrt{3}}{6}$

(ⅱ) 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하고, 내접원의 중심을 O라 하면 삼각형 ABC의 넓이는 세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이의 합과 같다.

즉, 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times r+\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times r$

$=r\times\frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}{2}$

조건 (나)에서

$r\times\frac{10}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

즉, $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$R+r=\frac{7\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$이므로

$p+q=3+5$

$=8$

답 8

7 길이가 각각 5, 9인 두 변 사이의 끼인 각의 크기를 θ라 하면

$S=\frac{1}{2}\times5\times9\times\sin\theta$

$=\frac{45}{2}\sin\theta$

이때 $0<\sin\theta\leq1$이므로

$0<S\leq\frac{45}{2}$

따라서 자연수 S의 값은

1, 2, 3, $\cdots$, 22

이고, 그 개수는 22이다.

답 ⑤

8 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos120^\circ$

$=7^2+8^2-2\times7\times8\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=49+64+56$

$=169$

이므로

$\overline{AC}=13$

이때 삼각형 ACD에서 $\angle CDA=\theta$라 하면

코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{CD}^2+\overline{DA}^2-2\times\overline{CD}\times\overline{DA}\times\cos\theta$

$13^2=9^2+11^2-2\times9\times11\times\cos\theta$에서

$\cos\theta=\frac{9^2+11^2-13^2}{2\times9\times11}$

$=\frac{1}{6}$

이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{35}}{6}$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 두 삼각형 ABC, ACD의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin120^\circ+\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{DA}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times7\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times9\times11\times\frac{\sqrt{35}}{6}$

$=14\sqrt{3}+\frac{33}{4}\sqrt{35}$

즉,

$p-q=14-\frac{33}{4}$

$=\frac{23}{4}$

답 ③

Level 3 실력 완성 본문 68쪽

1 305 2 8 3 ①

1 두 원 C_2, C_3의 반지름의 길이를 각각 a, b라 하면

$\overline{O_1O_2}=10+a$

$\overline{O_2O_3}=a+b$

$\overline{O_3O_1}=b+10$

삼각형 $O_1O_2O_3$이 직각삼각형이므로

$\overline{O_1O_2}^2+\overline{O_2O_3}^2=\overline{O_3O_1}^2$

$(10+a)^2+(a+b)^2=(b+10)^2$

$100+20a+a^2+a^2+2ab+b^2=b^2+20b+100$

$2a^2+20a+2ab=20b$

$a^2+10a+ab=10b$ …… ㉠

또 삼각형 $O_1O_2O_3$의 넓이가

$\frac{1}{2}\times\overline{O_1O_2}\times\overline{O_2O_3}=\frac{1}{2}\times(10+a)\times(a+b)$

이고, 삼각형 $O_1O_2O_3$의 넓이가 30이므로

$\frac{1}{2}\times(10+a)\times(a+b)=30$

정리하면

$a^2+10a+ab=60-10b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$10b=60-10b$이므로

$20b=60$

$b=3$

㉠에 $b=3$을 대입하면

$a^2+10a+3a=30$

$a^2+13a-30=0$

$(a+15)(a-2)=0$

$a=-15$ 또는 $a=2$

$a>0$이므로

$a=2$

한편 삼각형 $O_1O_2O_3$에서 $\angle O_3O_1O_2=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{O_3O_1}}$

$=\frac{10+a}{b+10}$

$=\frac{12}{13}$

이므로 삼각형 AO_1O_2에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{O_2A}^2=\overline{O_1A}^2+\overline{O_1O_2}^2-2\times\overline{O_1A}\times\overline{O_1O_2}\times\cos\theta$

$=10^2+12^2-2\times10\times12\times\frac{12}{13}$

$=\frac{292}{13}$

따라서

$p+q=13+292$

$=305$

답 305

2 $\overline{OA}=\overline{OB}=r$라 하고, $0<t<1$인 실수 t에 대하여

$\overline{OP}=tr$라 하면

$\overline{AP}=(1-t)r$

조건 (가)에서

$\frac{\overline{BQ}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{AP}}$이므로

$\overline{BQ}:\overline{OQ}=\overline{OP}:\overline{AP}$

$=t:(1-t)$

즉, $\overline{BQ}=tr$, $\overline{OQ}=(1-t)r$

한편 부채꼴 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{5\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}\times r^2$

또 삼각형 POQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OP}\times\overline{OQ}\times\sin150^\circ=\frac{1}{2}\times tr\times(1-t)r\times\frac{1}{2}$

$=\frac{t(1-t)}{4}\times r^2$

이때 조건 (나)에서

$\frac{\frac{5\pi}{12}\times r^2}{\frac{t(1-t)}{4}\times r^2}=\frac{125\pi}{18}$이므로

$\frac{5\pi}{3t(1-t)}=\frac{125\pi}{18}$

이 식을 정리하면

$25t^2-25t+6=0$

$(5t-2)(5t-3)=0$

$t=\frac{2}{5}$ 또는 $t=\frac{3}{5}$

$\overline{OP}>\overline{OQ}$이므로

$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=t=\frac{3}{5}$

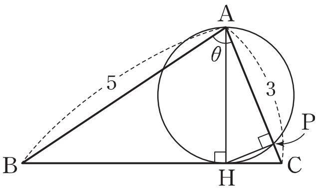
따라서 $p=5$, $q=3$이므로

$p+q=5+3$

$=8$

답 8

3



삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{CAB}=\theta$라 하면

코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\theta$

$=5^2+3^2-2\times5\times3\times\frac{1}{5}$

$=25+9-6$

$=28$

이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{7}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$=3\sqrt{6}$

이때 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}$이므로

$\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{AH}}=3\sqrt{6}$

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

따라서 삼각형 AHP에서 $\angle \mathrm{HPA}=90°$이므로

삼각형 AHP와 삼각형 ACH는 서로 닮음이다.

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{AC}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AH}}^2$

$\overline{\mathrm{AP}}\times3=\left(\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{7}}\right)^2$

따라서

$\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\times\frac{54}{7}$

$=\frac{18}{7}$

답 ①

05 등차수열과 등비수열

유제 본문 73~79쪽

1 ①	2 54	3 ②	4 4	5 ③
6 8	7 143	8 ⑤		

1 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_1+a_2=a_1+(a_1+d)=5$에서

$2a_1+d=5$ …… ㉠

$a_3+a_4+a_5=30$에서

a_4는 a_3과 a_5의 등차중항이므로

$a_3+a_5=2a_4$

이때

$a_3+a_4+a_5=2a_4+a_4$

$=3a_4=30$

이므로 $a_4=10$에서

$a_1+3d=10$ …… ㉡

$3\times$㉠$-$㉡을 하면

$5a_1=5$

$a_1=1$

$a_1=1$을 ㉠에 대입하면

$2+d=5$

$d=3$

따라서 $a_1=1$, $d=3$이므로

$a_6=1+5\times3$

$=16$

답 ①

2 세 수 1, $\log_4 a$, $3\log_2 3$은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 등차중항의 성질에 의하여

$2\log_4 a=1+3\log_2 3$

이때

(좌변)$=2\log_4 a$

$=\log_2 a$

(우변)$=1+3\log_2 3$

$=\log_2 2+\log_2 3^3$

$=\log_2(2\times3^3)$

$=\log_2 54$