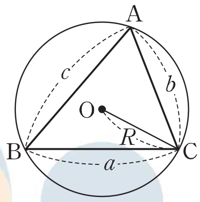
EBS 수능특강 수학영역

04 사인법칙과 코사인법칙

1. 사인법칙



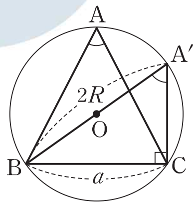
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

참고 삼각형 ABC에서 ∠A, ∠B, ∠C의 크기를 각각 A, B, C로 나타내고,
이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c로 나타내기로 한다.

증명 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 할 때, 등식 $\frac{a}{\sin A}=2R$가 성립함을
∠A가 예각, 직각, 둔각인 세 경우로 나누어 증명한다.

(i) $0^\circ<A<90^\circ$일 때



점 B에서 중심 O를 지나는 지름 BA′을 그리면 $A=A'$이므로

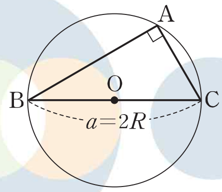
$\sin A=\sin A'$

삼각형 A′BC에서 ∠BCA′=90°이므로

$\sin A'=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BA'}}}=\frac{a}{2R}$

따라서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, 즉 $\frac{a}{\sin A}=2R$

(ii) $A=90^\circ$일 때

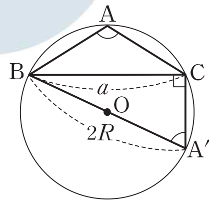


$\sin A=\sin 90^\circ=1$

$a=2R$

따라서 $\frac{a}{\sin A}=\frac{2R}{1}=2R$

(iii) $90^\circ<A<180^\circ$일 때



점 B에서 중심 O를 지나는 지름 BA′을 그리면 $A+A'=180^\circ$이므로

$A=180^\circ-A'$

즉, $\sin A=\sin(180^\circ-A')=\sin A'$

삼각형 A′BC에서 ∠A′CB=90°이므로

$\sin A'=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BA'}}}=\frac{a}{2R}$

따라서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, 즉 $\frac{a}{\sin A}=2R$

(i), (ii), (iii)에서 ∠A의 크기에 관계없이 $\frac{a}{\sin A}=2R$가 성립한다.

같은 방법으로 $\frac{b}{\sin B}=2R$, $\frac{c}{\sin C}=2R$도 성립한다.

예 ∠ABC=60°인 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 1인 원에 내접할 때, 선분 AC의 길이를 구해 보자.
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 1이므로 사인법칙에 의하여

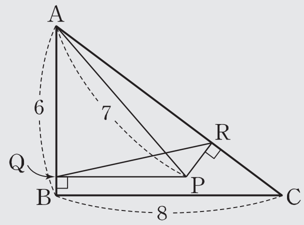
$$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle\mathrm{ABC})}=2\times1$$

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin 60^\circ}=2$이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}=2\times\sin 60^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

예제 1 사인법칙

그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$이고 $\angle ABC=90°$인 직각삼각형 ABC의 내부에 $\overline{AP}=7$인 점 P가 있다. 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하고, 선분 CA에 내린 수선의 발을 R라 할 때, 선분 QR의 길이는?

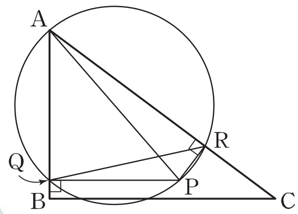


① $\frac{26}{5}$　② $\frac{27}{5}$　③ $\frac{28}{5}$　④ $\frac{29}{5}$　⑤ 6

풀이 전략 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

풀이 $\angle AQP=90°$, $\angle ARP=90°$이므로

네 점 A, Q, P, R는 지름이 선분 AP인 원 위의 점이다.



직각삼각형 ABC에서 $\overline{CA}=10$이므로

$$\sin(\angle CAB)=\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

삼각형 AQR는 지름의 길이가 7인 원에 내접하므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{QR}}{\sin(\angle RAQ)}=7$$

$$\frac{\overline{QR}}{\sin(\angle CAB)}=7\text{에서 }\frac{\overline{QR}}{\frac{4}{5}}=7$$

따라서 $\overline{QR}=\frac{28}{5}$

답 ③

정답과 풀이 29쪽

[20007-0095]

유제 1 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=3$인 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 1인 원에 내접할 때, $\sin A+\sin B+\sin C$의 값은?

① 1　② $\frac{5}{4}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{7}{4}$　⑤ 2

[20007-0096]

유제 2 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 BC의 길이를 구하시오.

(가) $\sin A\times\sin(B+C)=\frac{9}{25}$

(나) 반지름의 길이가 10인 원에 내접한다.

2. 코사인법칙

삼각형 ABC에서

(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

(2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

(3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

증명 삼각형 ABC의 꼭짓점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 등식 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$가 성립함을 ∠A가 예각, 직각, 둔각인 세 경우로 나누어 증명한다.

(ⅰ) $0°<A<90°$일 때

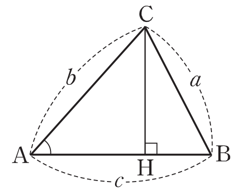
직각삼각형 CAH에서

$\overline{CH}=b\sin A$, $\overline{AH}=b\cos A$

또 $\overline{BH}=\overline{AB}-\overline{AH}=c-b\cos A$

직각삼각형 BCH에서 $\overline{BC}^2=\overline{CH}^2+\overline{BH}^2$이므로

$$\begin{aligned}a^2&=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2\\&=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A\\&=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A\\&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$



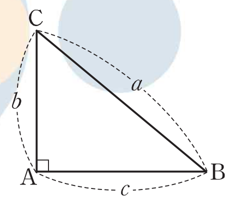
(ⅱ) $A=90°$일 때

직각삼각형 ABC에서

$\cos A=\cos 90°=0$

이므로

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2\\&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$



(ⅲ) $90°<A<180°$일 때

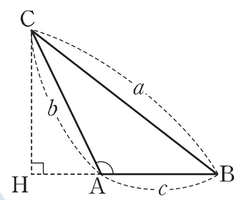
직각삼각형 ACH에서

$\overline{CH}=b\sin(180°-A)=b\sin A$, $\overline{AH}=b\cos(180°-A)=-b\cos A$

또 $\overline{BH}=\overline{AB}+\overline{AH}=c-b\cos A$

직각삼각형 BCH에서 $\overline{BC}^2=\overline{CH}^2+\overline{BH}^2$이므로

$$\begin{aligned}a^2&=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2\\&=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A\\&=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A\\&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 ∠A의 크기에 관계없이

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

가 성립한다.

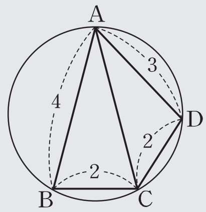
같은 방법으로

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

도 성립한다.

예제 2 코사인법칙

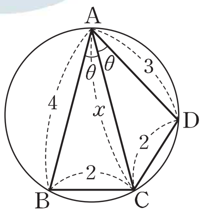
그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2$, $\overline{CD}=2$, $\overline{DA}=3$인 사각형 ABCD가 원에 내접할 때, 선분 AC의 길이는?



① 4　　② $\sqrt{17}$　　③ $3\sqrt{2}$
④ $\sqrt{19}$　　⑤ $2\sqrt{5}$

풀이 전략 삼각형 ABC에서 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

풀이 $\overline{BC}=\overline{CD}$이므로 $\angle BAC=\theta$라 하면 $\angle CAD=\theta$



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$$

이므로 $\overline{AC}=x$라 하면 $2^2=4^2+x^2-2\times4\times x\times\cos\theta$

$$8x\cos\theta=x^2+12 \quad \cdots\cdots ㉠$$

같은 방법으로 삼각형 ACD에서 $2^2=x^2+3^2-2\times x\times3\times\cos\theta$

$$6x\cos\theta=x^2+5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$3\times$㉠$-4\times$㉡에서 $x^2=16$

따라서 $\overline{AC}=4$

답 ①

정답과 풀이 29쪽

[20007-0097]

유제 3

삼각형 ABC가

$$3\overline{AB}^2+3\overline{CA}^2=3\overline{BC}^2+2\times\overline{AB}\times\overline{CA}$$

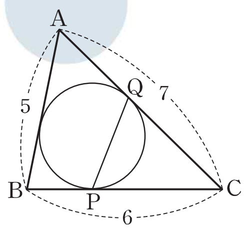
를 만족시킬 때, $\tan(\angle CAB)$의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　② 1　　③ $\sqrt{2}$　　④ 2　　⑤ $2\sqrt{2}$

[20007-0098]

유제 4

그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=7$인 삼각형 ABC에 내접하는 원이 선분 BC와 만나는 점을 P, 선분 CA와 만나는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는?



① $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$　　② $\sqrt{7}$　　③ $\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$
④ $\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$　　⑤ $\dfrac{10\sqrt{7}}{7}$

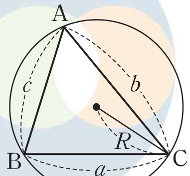
3. 삼각형의 모양

삼각형 ABC의 모양은 다음의 사인법칙의 변형된 식과 코사인법칙의 변형된 식을 이용하여 각 A, B, C에 대한 식을 변의 길이 a, b, c에 대한 식으로 고쳐서 알아본다.

(1) 사인법칙의 변형

① 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\sin A=\frac{a}{2R},\quad \sin B=\frac{b}{2R},\quad \sin C=\frac{c}{2R}$$



② $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

설명 ① 사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$이므로

$\frac{a}{\sin A}=2R$에서 $\sin A=\frac{a}{2R}$

$\frac{b}{\sin B}=2R$에서 $\sin B=\frac{b}{2R}$

$\frac{c}{\sin C}=2R$에서 $\sin C=\frac{c}{2R}$

② ①에서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$$\begin{aligned}\sin A:\sin B:\sin C&=\frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}:\frac{c}{2R}\\&=a:b:c\end{aligned}$$

(2) 코사인법칙의 변형

삼각형 ABC에서

① $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

② $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

③ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

설명 코사인법칙에서 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$이므로 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$에서

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

같은 방법으로 $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$도 성립한다.

예 삼각형 ABC가 $a\cos A=b\cos B$를 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 모양을 조사해 보자.

코사인법칙에 의하여 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로 $a\cos A=b\cos B$에서

$$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$a^2\times(b^2+c^2-a^2)=b^2\times(c^2+a^2-b^2)$$

정리하면 $(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$

따라서 $a+b\neq 0$이므로 $a=b$ 또는 $a^2+b^2=c^2$

즉, 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

예제 3 삼각형의 모양

자연수 n에 대하여 $\overline{AB}=n+1$, $\overline{BC}=n+3$, $\overline{CA}=n+5$인 삼각형 ABC가 $90^\circ<\angle ABC<120^\circ$인 둔각삼각형이 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

풀이 전략 삼각형 ABC에서 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

풀이 (i) 길이가 각각 $n+1$, $n+3$, $n+5$인 세 선분이 삼각형의 세 변이므로

$(n+1)+(n+3)>n+5$, 즉 $n>1$

(ii) $90^\circ<\angle ABC<120^\circ$이므로 $-\dfrac{1}{2}<\cos B<0$

코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{(n+1)^2+(n+3)^2-(n+5)^2}{2\times(n+1)\times(n+3)}=\frac{(n+3)(n-5)}{2(n+1)(n+3)}=\frac{n-5}{2(n+1)}$$

$-\dfrac{1}{2}<\dfrac{n-5}{2(n+1)}<0$에서 $-(n+1)<n-5<0$, $2<n<5$

(i), (ii)에서 $2<n<5$이므로 모든 자연수 n의 값은 3, 4이고, 그 합은 $3+4=7$이다.

답 ②

참고 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$이므로

$0^\circ<C<90^\circ$이면 $\cos C>0$, 즉 $a^2+b^2>c^2$

$C=90^\circ$이면 $\cos C=0$, 즉 $a^2+b^2=c^2$

$90^\circ<C<180^\circ$이면 $\cos C<0$, 즉 $a^2+b^2<c^2$

정답과 풀이 30쪽

[20007-0099]

유제 5 삼각형 ABC가

$$\cos^2(A+B)+(\sin A+\cos B)(\sin A-\cos B)=0$$

을 만족시킬 때, 다음 중 삼각형 ABC의 모양으로 항상 옳은 것은?

① 정삼각형 ② $a=b\neq c$인 이등변삼각형 ③ $b=c\neq a$인 이등변삼각형
④ $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형 ⑤ $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형

[20007-0100]

유제 6 삼각형 ABC가

$$a\cos B=b\cos A+c$$

를 만족시킬 때, 다음 중 삼각형 ABC의 모양으로 항상 옳은 것은?

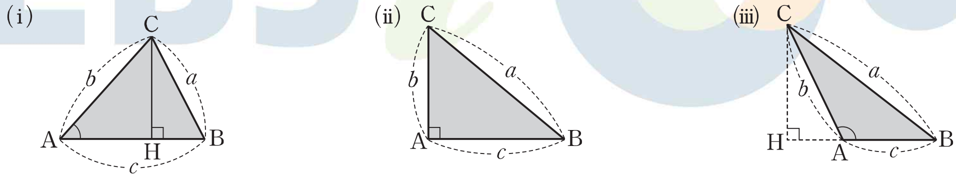
① 정삼각형 ② $a=b$인 이등변삼각형 ③ $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형
④ $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ⑤ $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형

4. 삼각형의 넓이

삼각형 ABC에서 두 변의 길이와 그 끼인 각의 크기가 주어질 때
삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

설명 삼각형 ABC의 꼭짓점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 ∠A가 예각, 직각, 둔각인 세 경우로 나누어 생각한다.



(i) $0^\circ<A<90^\circ$일 때

$\overline{\mathrm{CH}}=b\sin A$

(ii) $A=90^\circ$일 때

$\sin A=\sin 90^\circ=1$이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=b=b\sin A$

(iii) $90^\circ<A<180^\circ$일 때

$\overline{\mathrm{CH}}=b\sin(180^\circ-A)=b\sin A$

(i), (ii), (iii)에서 ∠A의 크기에 관계없이 $\overline{\mathrm{CH}}=b\sin A$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

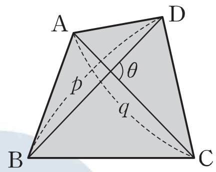
$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}bc\sin A$$

같은 방법으로

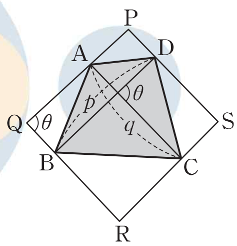
$$S=\frac{1}{2}ca\sin B,\ S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

참고 그림과 같은 사각형 ABCD에서 두 대각선의 길이가 각각 p, q이고,
두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}pq\sin\theta$$



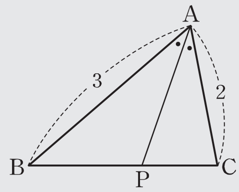
설명 그림과 같이 대각선 BD와 평행하고 두 점 A, C를 지나는 직선을 각각 그리고,
대각선 AC와 평행하고 두 점 B, D를 지나는 직선을 각각 그린다.
네 직선이 만나는 점을 각각 P, Q, R, S라 하면 사각형 PQRS는 평행사변형이다.
따라서 사각형 ABCD의 넓이는 사각형 PQRS의 넓이의 $\frac{1}{2}$이고, 삼각형 PQR의 넓이도 사각형 PQRS의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 사각형 ABCD의 넓이와 삼각형 PQR의 넓이는 같다.



즉, $S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}pq\sin\theta$

예제 4 삼각형의 넓이

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=2$이고, $\angle BAC=60°$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 P라 할 때, 선분 AP의 길이는 $\frac{n}{m}\sqrt{3}$이다. $m+n$의 값을 구하시오. (단, m과 n은 서로소인 자연수이다.)

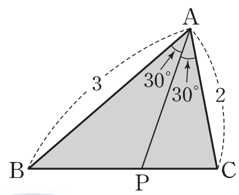


풀이 전략 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

풀이 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin 60°=\frac{1}{2}\times3\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$



삼각형 ABP의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AP}\times\sin 30°=\frac{1}{2}\times3\times\overline{AP}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\times\overline{AP}$$

삼각형 APC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{AC}\times\sin 30°=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\overline{AP}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 두 삼각형 ABP, APC의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{4}\times\overline{AP}+\frac{1}{2}\times\overline{AP},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{4}\times\overline{AP},\ \overline{AP}=\frac{6\sqrt{3}}{5}$$

따라서 $m=5$, $n=6$이므로 $m+n=5+6=11$

답 11

정답과 풀이 30쪽

[20007-0101]

유제 7 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=9$인 삼각형 ABC에서 $\sin(B+C)=\frac{1}{3}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

[20007-0102]

유제 8 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이고, $\overline{AB}=\overline{CD}$인 등변사다리꼴 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 사각형 ABCD의 넓이는 $16\sqrt{3}$이다.
> (나) 두 대각선 AC, BD가 이루는 예각의 크기는 $60°$이다.

대각선 AC의 길이를 구하시오.

Level 1 기초 연습

[20007-0103]

1 $\overline{\text{AB}}=3$인 삼각형 ABC가 넓이가 3π인 원에 내접할 때, $\sin(\angle\text{BCA})$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

[20007-0104]

2 삼각형 ABC가

$$\overline{\text{AB}}=8,\ \cos(\angle\text{ABC})=\frac{\sqrt{15}}{4},\ \cos(\angle\text{BCA})=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

를 만족시킬 때, 선분 AC의 길이는?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

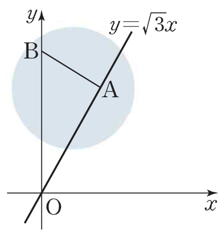
[20007-0105]

3 $\overline{\text{AB}}=6$이고 $\angle\text{CAB}=120°$, $\angle\text{ABC}=15°$인 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는?

① 10π ② 12π ③ 14π ④ 16π ⑤ 18π

[20007-0106]

4 그림과 같이 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 제1사분면의 점 A와 y좌표가 양수인 y축 위의 점 B가 있다. $\overline{\text{PO}}=\overline{\text{PA}}=\overline{\text{PB}}$를 만족시키는 좌표평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{\text{AB}}=3$일 때, 선분 OP의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)



[20007-0107]

5 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{CA}}=3:4:6$일 때, 삼각형 ABC의 세 각 중 크기가 최대인 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은?

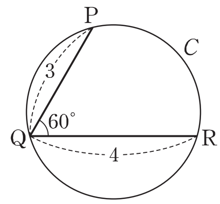
① $-\frac{3}{8}$ ② $-\frac{11}{24}$ ③ $-\frac{13}{24}$ ④ $-\frac{5}{8}$ ⑤ $-\frac{17}{24}$

[20007-0108]

6 그림과 같이 원 C 위의 세 점 P, Q, R가

$$\overline{\mathrm{PQ}}=3,\ \overline{\mathrm{QR}}=4,\ \angle\mathrm{PQR}=60^\circ$$

를 만족시킬 때, 원 C의 넓이는?



① $\frac{11}{3}\pi$ ② 4π ③ $\frac{13}{3}\pi$

④ $\frac{14}{3}\pi$ ⑤ 5π

[20007-0109]

7 삼각형 ABC가

$$\frac{\sin A}{5}=\frac{\sin B}{6}=\frac{\sin C}{7}$$

를 만족시킬 때, $\tan A$의 값은?

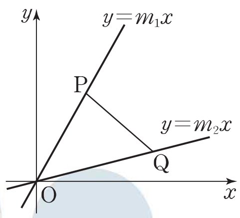
① $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{23}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{94}}{10}$ ④ $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

[20007-0110]

8 $\overline{\mathrm{AB}}=4$이고 $\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$인 삼각형 ABC의 넓이가 $5\sqrt{3}$일 때, $\overline{\mathrm{AC}}^2$의 값을 구하시오.

[20007-0111]

1 두 양수 m_1, m_2에 대하여 그림과 같이 직선 $y=m_1x$ 위의 제1사분면의 점 P와 직선 $y=m_2x$ 위의 제1사분면의 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

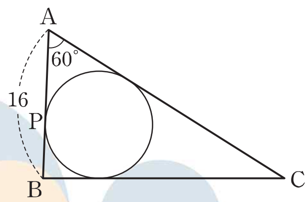


(가) 두 직선 $y=m_1x$, $y=m_2x$가 이루는 예각의 크기는 $45°$이다.
(나) $\overline{\mathrm{PQ}}=4$

선분 OP의 길이의 최댓값이 M일 때, M^2의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

[20007-0112]

2 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=16$이고, $\angle\mathrm{BAC}=60°$인 삼각형 ABC에 내접하는 원이 선분 AB와 만나는 점을 P라 하자. 점 P가 선분 AB를 $5:3$으로 내분하는 점일 때, 선분 BC의 길이는?



① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

[20007-0113]

3 넓이가 $8\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 4인 원에 내접할 때, $\sin A\times\sin B\times\sin C$의 값은?

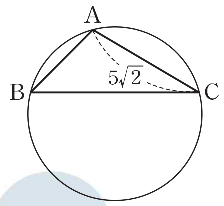
① $\frac{\sqrt{3}}{16}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{16}$

[20007-0114]

4 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{BC}}=7$, $\overline{\mathrm{CA}}=3$인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\frac{q}{p}\sqrt{5}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[20007-0115]

5 그림과 같이 삼각형 ABC가 원에 내접하고 있다. 이 원의 세 호 AB, BC, CA의 길이의 비가 2 : 7 : 3이고, 선분 AC의 길이가 $5\sqrt{2}$일 때, 선분 AB의 길이는?



① $\sqrt{21}$　② $\sqrt{22}$　③ $\sqrt{23}$　④ $2\sqrt{6}$　⑤ 5

[20007-0116]

6 넓이가 $\frac{5\sqrt{3}}{2}$인 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{CA}=35$	(나) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=10$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이와 내접원의 반지름의 길이의 합이 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[20007-0117]

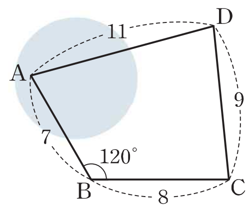
7 두 변의 길이가 각각 5, 9인 삼각형의 넓이를 S라 하자. S의 값으로 가능한 모든 자연수 S의 개수는?

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

[20007-0118]

8 그림과 같이 $\overline{AB}=7$, $\overline{BC}=8$, $\overline{CD}=9$, $\overline{DA}=11$이고, $\angle ABC=120^\circ$인 사각형 ABCD가 있다. 사각형 ABCD의 넓이가 $p\sqrt{3}+q\sqrt{35}$일 때, $p-q$의 값은?

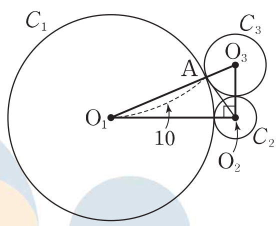
(단, p, q는 유리수이다.)



① $\frac{21}{4}$　② $\frac{11}{2}$　③ $\frac{23}{4}$　④ 6　⑤ $\frac{25}{4}$

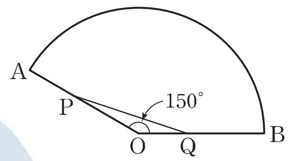
[20007-0119]

1 그림과 같이 넓이가 30이고, $\angle O_1O_2O_3=90°$인 직각삼각형 $O_1O_2O_3$이 있다. 중심이 O_1인 원 C_1과 중심이 O_2인 원 C_2가 선분 O_1O_2 위의 한 점에서 만나고, 원 C_2와 중심이 O_3인 원 C_3이 선분 O_2O_3 위의 한 점에서 만난다. 두 원 C_1, C_3이 선분 O_1O_3 위의 한 점 A에서 만나고, $\overline{O_1A}=10$일 때 $\overline{O_2A}^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[20007-0120]

2 그림과 같이 중심각의 크기가 150°인 부채꼴 AOB에서 선분 OA 위의 점 P와 선분 OB 위의 점 Q가 다음 조건을 만족시킨다.

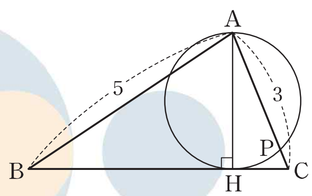


(가) $\overline{OP}\times\overline{OQ}=\overline{AP}\times\overline{BQ}$
(나) 부채꼴 AOB의 넓이와 삼각형 POQ의 넓이의 비는 $125\pi : 18$이다.

$\overline{OP}>\overline{OQ}$일 때, $\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[20007-0121]

3 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3$이고, $\cos(\angle CAB)=\frac{1}{5}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 AH를 지름으로 하는 원이 선분 AC와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라 할 때, 선분 AP의 길이는?

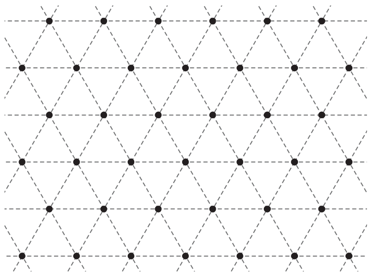


① $\frac{18}{7}$ ② $\frac{37}{14}$ ③ $\frac{19}{7}$ ④ $\frac{39}{14}$ ⑤ $\frac{20}{7}$

대표 기출 문제

출제 경향 특정한 상황의 삼각형에서 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이, 각의 크기를 구하는 문제가 출제된다.

어떤 물질은 원자를 구로 나타낼 경우 똑같은 구들을 규칙적으로 배열하여 얻은 정육각형 격자구조를 갖는다. 아래 그림은 이 격자구조의 한 단면에 놓여 있는 원자의 중심을 연결한 것이다. 이 구조에서 한 원자의 에너지는 인접한 원자의 수와 거리에 영향을 받는다. 가장 인접한 원자의 중심간의 거리가 모두 1일 때, 동일 평면상에서 고정된 한 원자와 중심 사이의 거리가 $\sqrt{7}$인 원자의 개수는? [3점]



① 4　　② 6　　③ 8　　④ 12　　⑤ 16

2002학년도 대수능

출제 의도 ▸ 주어진 상황에서 코사인법칙을 이용하여 조건을 만족시키는 점의 위치를 확인하고, 그 개수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 오른쪽 그림에서 코사인법칙에 의하여

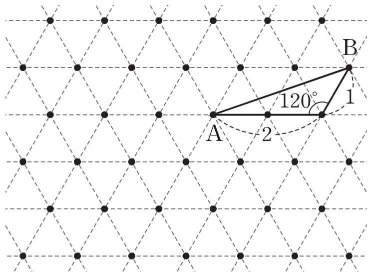
$$\overline{AB}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos 120^\circ$$
$$=4+1-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=7$$

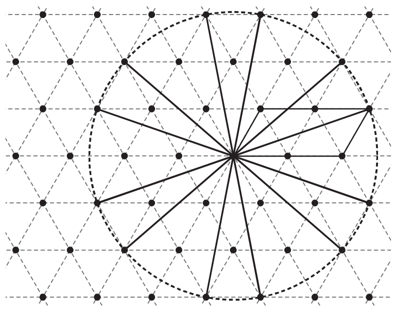
이므로 $\overline{AB}=\sqrt{7}$

즉, 고정된 한 원자 A와 중심 사이의 거리가 $\sqrt{7}$이 되려면 원자가 그림의 B의 위치에 놓여야 한다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 A를 한 점으로 하고 두 변의 길이가 각각 1, 2인 평행사변형을 찾아 A와 중심거리가 $\sqrt{7}$인 원자의 개수를 찾으면 된다.

즉, 구하는 원자의 개수는 12이다.





답 ④

대표 기출 문제

출제 경향 삼각형에서 사인법칙을 이용하여 변의 길이, 외접원의 반지름의 길이를 구하는 문제, 삼각형에서 코사인법칙을 이용하여 각의 크기를 구하는 문제가 출제된다. 사인법칙과 코사인법칙을 모두 사용하는 문제도 출제되고 있다.

삼각형 ABC에서

$$6\sin A=2\sqrt{3}\sin B=3\sin C$$

가 성립할 때, ∠A의 크기는? [3점]

① 120°　② 90°　③ 60°　④ 45°　⑤ 30°

2000학년도 대수능

출제 의도 ▸ 사인법칙을 이용하여 삼각형의 세 변의 길이의 비를 구하고, 코사인법칙을 이용하여 각의 크기를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $6\sin A=2\sqrt{3}\sin B=3\sin C$에서 $\sin A=\dfrac{\sin B}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sin C}{2}$이므로

$$\sin A : \sin B : \sin C=1 : \sqrt{3} : 2$$

이때 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C=\overline{BC} : \overline{CA} : \overline{AB}$$

이므로 양수 k에 대하여

$$\overline{BC}=k,\ \overline{CA}=\sqrt{3}k,\ \overline{AB}=2k$$

로 놓을 수 있다.

한편 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{CA}^2+\overline{AB}^2-2\times\overline{CA}\times\overline{AB}\times\cos A$이므로

$$k^2=(\sqrt{3}k)^2+(2k)^2-2\times\sqrt{3}k\times 2k\times\cos A$$

$$\cos A=\frac{(\sqrt{3}k)^2+(2k)^2-k^2}{2\times\sqrt{3}k\times 2k}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $0^\circ<A<180^\circ$이므로

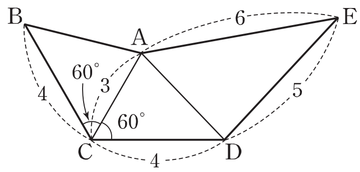
$$A=30^\circ$$

답 ⑤

대표 기출 문제

출제 경향 삼각형에서 사인법칙, 코사인법칙을 이용하여 변의 길이, 각의 크기 등을 구하고, 이를 이용하여 삼각형의 넓이 또는 사각형의 넓이를 구하는 문제가 출제된다.

그림과 같이 도형 ABCDE에서 $\angle ACB=\angle ACD=60^\circ$, $\overline{AC}=3$, $\overline{BC}=\overline{CD}=4$, $\overline{DE}=5$, $\overline{AE}=6$이다. 이 도형 ABCDE의 넓이를 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하시오.
(단, $\sqrt{3}=1.732$로 계산한다.) [3점]



2004학년도 대수능 6월 모의평가

출제 의도 ▸ 삼각형에서 코사인법칙을 이용하여 변의 길이와 각의 코사인 값을 구하고, 삼각형의 넓이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 (i) 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times4\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

삼각형 ACD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{CD}\times\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

(ii) 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{CD}\times\cos 60^\circ$$

$$\overline{AD}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\frac{1}{2}$$

$\overline{AD}^2=13$이므로 $\overline{AD}=\sqrt{13}$

이때 삼각형 ADE에서 $\angle DEA=\theta$로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=\overline{DE}^2+\overline{AE}^2-2\times\overline{DE}\times\overline{AE}\times\cos\theta$$

$$(\sqrt{13})^2=5^2+6^2-2\times5\times6\times\cos\theta$$

에서 $\cos\theta=\frac{4}{5}$이므로

$$\sin\theta=\frac{3}{5}$$

삼각형 ADE의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{AE}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{3}{5}=9$$

(i), (ii)에서 도형 ABCDE의 넓이는 세 삼각형 ABC, ACD, ADE의 넓이의 합이므로

$$3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+9=6\sqrt{3}+9=6\times1.732+9$$
$$=19.392$$

따라서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 나타내면 19.39이다.

답 19.39