2021 EBS 수능특강 수학1 7. 수학적 귀납법(1)

p103　　1번 단순변형

1.수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=3$를 만족시킨다. $a_5=729$일 때, a_1의 값은?

① $\dfrac{1}{9}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ 1　④ 3　⑤ 9

p103　　2번 단순변형

2. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$(a_{n+1}-a_n)^2-3(a_{n+1}-a_n)-4=0$

을 만족시킨다. a_{10}의 값은?

① 36　② 37　③ 38　④ 39　⑤ 40

p105　　3번 단순변형

3. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n=\dfrac{1}{3n+2}$

을 만족시킨다. $a_6=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

p105　　4번 단순변형

4. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 $a_1=1$, $b_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=-a_n+3b_n$, $b_{n+1}=2b_n-a_n$

을 만족시킨다. a_4+b_4의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

p107 5번 단순변형

5. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$ ⋯⋯ ㉠이 성

$= \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$

립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때

(좌변)$=1\times2\times3\times4=24$

(우변)$=\dfrac{1\times2\times3\times4\times5}{5}=24$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m} k(k+1)(k+2)(k+3)$

$= \dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{5}$

⋯⋯ ㉡

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$를 더하면

$\sum_{k=1}^{m+1} k(k+1)(k+2)(k+3)$

$= \dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{5} + \boxed{\text{가}}$

$= \dfrac{m(m+1)(m+2)(m+3)\times\boxed{\text{나}}}{5}$

따라서,$n=m+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 식을 $f(m)$, (나)에 알맞은 식을 $g(m)$이라 할 때, $f(1)+g(2)$의 값은?

①162 ②164 ③166 ④168 ⑤170

p108 1번 단순변형

6. 수열 $\{a_n\}$은 $a_3=5$, $a_{15}=35$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}=0$을 만족시킨다. $a_8+a_9+a_{10}$의 값은?

①60 ②61 ③62 ④63 ⑤64

p108 2번 응용 변형

7.수열 $\{a_n\}$을

$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=-1 \\ a_{n+2}-a_n=2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$ 으로 정의할 때,$a_{15}+a_{16}$의 값을 구하시오.

①27 ②28 ③29 ④30 ⑤31

p108 3번 단순 변형

8. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=16$, $a_5=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\sqrt{a_n a_{n+2}}$를 만족시킨다. $a_k<\dfrac{1}{100}$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은?

①11 ②12 ③13 ④14 ⑤15

p108 4번 단순 변형

9. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{n+i}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

자연수 n에 대하여

$a_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}$이라 할 때, $a_n>1$임을 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때 $a_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}>1$이다.

(2) $n=k$일 때 $a_k>1$이라고 가정하면

$n=k+1$일 때

a_{k+1}

$=\dfrac{1}{k+2}+\dfrac{1}{k+3}+\cdots+\dfrac{1}{3k+4}$

$=a_k+\left(\dfrac{1}{3k+2}+\dfrac{1}{3k+3}+\dfrac{1}{3k+4}\right)-\boxed{(가)}$

한편, $(3k+2)(3k+4)\boxed{(나)}(3k+3)^2$ 이므로

$\dfrac{1}{3k+2}+\dfrac{1}{3k+4}>\boxed{(다)}$

그런데 $a_k>1$ 이므로

$a_{k+1}>a_k+\left(\dfrac{1}{3k+3}+\boxed{(다)}\right)-\boxed{(가)}>1$

그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>1$이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\dfrac{1}{k+1}$	$>$	$\dfrac{2}{3k+3}$
②	$\dfrac{1}{k+1}$	$<$	$\dfrac{2}{3k+3}$
③	$\dfrac{1}{k+1}$	$<$	$\dfrac{4}{3k+3}$
④	$\dfrac{2}{k+1}$	$>$	$\dfrac{4}{3k+3}$
⑤	$\dfrac{2}{k+1}$	$<$	$\dfrac{1}{k+1}$

p109　　1번 단순 변형

10.수열 $\{a_n\}$이

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = (-1)^n a_n a_{n+1} \end{cases} \text{(단, } n = 1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{2021} a_k$의 값은?

①-2　②-1　③$0$　④$1$　⑤$2$

정답 및 해설

1	⑤	2	②	3	37	4	④	5	①
6	①	7	②	8	②	9	②	10	②

1)정답⑤

[출제범위] 수학적 귀납법

수열 $\{a_n\}$이 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n = a_1 \times 3^{n-1}$

$a_5 = a_1 \times 3^4$
$= 729$

따라서

$a_1 = \dfrac{729}{3^4} = \dfrac{3^6}{3^4}$
$= 3^2$

필수 개념

▸등비수열의 귀납적 정의

$a_{n+1} = r \times a_n$

$(a_{n+1})^2 = a_n \times a_{n+2}$

⇒공비가 r인 등비수열

2)정답②

[출제범위] 수학적 귀납법

$(a_{n+1} - a_n)^2 - 3(a_{n+1} - a_n) - 4 = 0$에서

$(a_{n+1} - a_n + 1)(a_{n+1} - a_n - 4) = 0$

$a_{n+1} - a_n = -1$ 또는 $a_{n+1} - a_n = 4$

모든 항이 양수이므로

$a_{n+1} - a_n = 4$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공차가 4인 등차수열이다.

$a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$

따라서 $a_{10} = 1 + 9 \times 4 = 37$

다른풀이

$(a_{n+1} - a_n)^2 - 3(a_{n+1} - a_n) - 4 = 0$에서

$(a_{n+1} - a_n + 1)(a_{n+1} - a_n - 4) = 0$

$a_{n+1} - a_n = -1$ 또는 $a_{n+1} - a_n = 4$

모든 항이 양수이므로

$a_{n+1} - a_n = 4$

$a_{n+1} = a_n + 4$

$a_2 = a_1 + 4$

$a_3 = a_2 + 4 = a_1 + 4 + 4 = a_1 + 4 \times 2$

$a_4 = a_3 + 4 = a_1 + 4 \times 2 + 4 = a_1 + 4 \times 3$

이런 방법으로 $a_{10} = a_1 + 4 \times 9$

$a_{10} = 1 + 36 = 37$

필수 개념

▸ 등차수열의 일반항

$a_n = a_1 + (n-1)d$ a_1은 초항, d는 공차

필수 개념

▸등차수열의 귀납적 정의

$a_{n+1} = a_n + d$

$a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}$

⇒공차가 d인 등차수열

3)정답37

[출제범위] 수학적 귀납법

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n = \dfrac{1}{3n+2}$ $\cdots$ (⋆)

이라 하자.

(⋆)에 $n=6$를 대입하면

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 = \dfrac{1}{3 \times 6 + 2}$
$= \dfrac{1}{20}$ ⋯⋯ ㉠

(*)에 $n=5$를 대입하면

$$a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5=\frac{1}{3\times5+2}$$
$$=\frac{1}{17} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠ ÷ ㉡을 하면

$$\frac{a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5\times a_6}{a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{17}}$$

이므로 $a_6=\frac{17}{20}$

따라서 $p+q=17+20=37$

다른풀이

$$a_1=\frac{1}{3\cdot1+2}=\frac{1}{5}$$

$a_1\times a_2=\frac{1}{3\cdot2+2}=\frac{1}{8}$에서

$$a_2=\frac{1}{8}\times\frac{1}{a_1}=\frac{1}{8}\times5=\frac{5}{8}$$

$a_1\times a_2\times a_3=\frac{1}{3\cdot3+2}=\frac{1}{11}$에서

$$a_3=\frac{1}{11}\times\frac{1}{a_1\times a_2}=\frac{1}{11}\times8=\frac{8}{11}$$

$a_1\times a_2\times a_3\times a_4=\frac{1}{3\cdot4+2}=\frac{1}{14}$에서

$$a_4=\frac{1}{14}\times\frac{1}{a_1\times a_2\times a_3}=\frac{1}{14}\times11=\frac{11}{14}$$

$a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5=\frac{1}{3\cdot5+2}=\frac{1}{17}$에서

$$a_5=\frac{1}{17}\times\frac{1}{a_1\times a_2\times a_3\times a_4}=\frac{1}{17}\times14=\frac{14}{17}$$

$a_1\times a_2\times a_3\cdots\times a_6=\frac{1}{3\cdot6+2}=\frac{1}{18}$에서

$$a_6=\frac{1}{20}\times\frac{1}{a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5}=\frac{1}{20}\times17=\frac{17}{20}$$

이므로 $p=17,\ \ q=20$

$p+q=37$

필수 개념

▸ 수열의 귀납적 정의

첫 항과 이웃하는 두 항 a_n과 a_{n+1} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$사이의 관계식으로 수열의 일반항을 구하는 방법

4)정답④

[출제범위] 수학적 귀납법

$a_1=1,\ b_1=1$이므로

$$a_2=-a_1+3b_1$$
$$=-1+3=2$$

$$b_2=2b_1-a_1$$
$$=2-1=1$$

$a_2=2,\ b_2=1$이므로

$$a_3=-a_2+3b_2$$
$$=-2+3=1$$

$$b_3=2b_2-a_2$$
$$=2-2=0$$

$a_3=1,\ b_3=0$이므로

$$a_4=-a_3+3b_3$$
$$=-1+0=-1$$

$$b_4=2b_3-a_3$$
$$=0-1=-1$$

$a_4=-1,\ b_4=-1$

따라서 $a_4+b_4=-1+(-1)=-2$

필수 개념

▸ 수열의 귀납적 정의

첫 항과 이웃하는 두 항 a_n과 a_{n+1} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$사이의 관계식으로 수열의 일반항을 구하는 방법

5)정답①

[출제범위] 수학적 귀납법

$$\sum_{k=1}^{m+1} k(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} k(k+1)(k+2)(k+3) + \sum_{k=m+1}^{m+1} k(k+1)(k+2)(k+3)$$
이다.

이 때,

$$\sum_{k=1}^{m} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{5},$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{m+1} k(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} k(k+1)(k+2)(k+3) + \sum_{k=m+1}^{m+1} k(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$= \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{5} + (m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$$

즉 (가) $= (m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$ 이다.

주어진 식을 정리하면

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{5} + (m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$$
$$= (m+1)(m+2)(m+3)(m+4) \times \left\{\frac{m}{5}+1\right\}$$
$$= (m+1)(m+2)(m+3)(m+4)\left(\frac{m+5}{5}\right)$$
$$= \frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}{5}$$

으로 (나) $= (m+4)(m+5)$ 이다.

따라서,

$f(m) = (m+1)(m+2)(m+3)(m+4)$,

$g(m) = (m+4)(m+5)$로

$f(1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$g(2) = 6 \cdot 7 = 42$ 이다.

$f(1) + g(2) = 120 + 42 = 162$

필수 개념

▸ 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면

(1)$n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립함을 보인다.

(2)$n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때에도 성립함을 보인다.

6)정답①

[출제범위] 수학적 귀납법

모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차중항의 성질에 의하여

$$a_9 = \frac{a_3 + a_{15}}{2}$$
$$= \frac{5+35}{2} = 20$$

따라서

$$a_8 + a_9 + a_{10} = 2 \times \frac{a_8 + a_{10}}{2} + a_9$$
$$= 2 \times a_9 + a_9$$
$$= 3 \times a_9$$
$$= 3 \times 20$$
$$= 60$$

다른풀이

$a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} = 0$에서 모든 자연수에 대해

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$이므로 a_n은 등차수열이다.

$a_3 = a_1 + 2d = 5$

$a_{15} = a_1 + 14d = 35$

$12d = 30$

$$d = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$$

$a_1+2\times\frac{5}{2}=5$

$a_1=0$

$a_8+a_9+a_{10}$
$=a_1+7d+a_1+8d+a_1+9d$
$=3a_1+24d$

$=0\times3+24\times\frac{5}{2}=60$

필수 개념
▸ 등차수열의 일반항
$a_n=a_1+(n-1)d$ a_1은 초항, d는 공차

7)정답②
[출제범위] 수학적 귀납법

$a_3-a_1=2$

$a_4-a_2=2$

$a_5-a_3=2$

$a_6-a_4=2$

$\vdots$

$a_{15}-a_{13}=2$

$a_{16}-a_{14}=2$에서
좌변과 우변을 모두 더하면

$a_{15}+a_{16}-a_1-a_2=28$

$\therefore a_{15}+a_{16}=28$

다른풀이

$a_1=1,\ a_2=-1$

$a_{n+2}-a_n=2$
이므로

$a_{n+2}=a_n+2$이다.

a_3은 a_1보다 2가 크고 a_5는 a_3보다 2가 크다. 이런 방법으로 홀수 번째 항인a_{2n-1}은 초항이 1이고 공차가 2인 등차수열을 이루고 짝수 번째 항인 a_{2n}은 초항이 -1이고 공차가 2인 등차수열을 이룬다.

즉 $a_{2n-1}=1+(n-1)\times2=2n-1$

$a_{2n}=-1+(n-1)\times2=2n-3$

$a_{15}=a_{2\times8-1}=2\times8-1=15$

$a_{16}=a_{2\times8}=2\times8-3=13$

$a_{15}+a_{16}=15+13=28$

필수 개념
▸수열의 귀납적 정의
첫 항과 이웃하는 두 항 a_n과 a_{n+1} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$사이의 관계식으로 수열의 일반항을 구하는 방법

8)정답②
[출제범위] 수학적 귀납법

$a_{n+1}=\sqrt{a_na_{n+2}}$에서

${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$r^4=\frac{a_5}{a_1}$
$=\frac{1}{16}$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로

$r=\frac{1}{2}$

따라서 $a_n=16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{100}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\frac{1}{1600}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{11}=\frac{1}{2048}$ 이므로

$n \geq 12$ 일 때, $a_k < \frac{1}{100}$을 만족시키는 k의 최솟값은 12이다.

필수 개념
▸등비수열의 귀납적 정의 $a_{n+1}=r\times a_n$ $(a_{n+1})^2=a_n\times a_{n+2}$ ⇒공비가 r인 등비수열

9)정답②
[출제범위] 수학적 귀납법

(2) $n=k$ 일 때 $a_k>1$이라고 가정하면

$a_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k+1}>1$ 이면

$n=k+1$일 때

$$a_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}$$
$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k+1}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\right)-\frac{1}{k+1}$$

한편, $9k^2+18k+8<9k^2+18k+9$ 이므로

$(3k+2)(3k+4)<(3k+3)^2$

양변을 $(3k+2)(3k+4)(3k+3)$으로 나누면

$\frac{1}{3k+3}<\frac{(3k+3)}{(3k+2)(3k+4)}$ 이므로

$\frac{2}{3k+3}<\frac{2(3k+3)}{(3k+2)(3k+4)}$

$\frac{2}{3k+3}<\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}$에서

$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}>\frac{2}{3k+3}$

(가) $\frac{1}{k+1}$

(나) $<$

(다) $\frac{2}{3k+3}$

필수 개념
▸수학적 귀납법 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 (1) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립함을 보인다. (2) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하고 $n=k+1$일 때에도 성립함을 보인다.

10)정답②
[출제범위] 수학적 귀납법

$a_1=1$

$a_2=1$

$a_3=(-1)^1a_1a_2=-1$

$a_4=(-1)^2a_2a_3=1\cdot1\cdot(-1)=-1$

$a_5=(-1)^3a_3a_4=(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=-1$

$a_6=(-1)^4a_4a_5=1\cdot(-1)\cdot(-1)=1$

$a_7=(-1)^5a_5a_6=(-1)\cdot(-1)\cdot(1)=1$

$\{a_n\}$: $1,\ 1,\ -1,\ -1,$
$-1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,1,\cdots$

제1항부터 6개의 항이 규칙적으로 반복되므로

$2021=6\times336+5$이므로

$$\sum_{k=1}^{2021}a_k=\sum_{k=1}^{6}a_k\times336+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$
$$=335\times0+1+1+(-1)+(-1)+(-1)$$
$$=-1$$

필수 개념

▸ 주기적으로 반복되는 수열의 합

더하는 항의 개수를 반복되는 수의 개수로 나누어 생각한다.