* 2019년 6월 시행 교육청 고2 수학 가형 30번.

$2 \le k < 500$, 자연수 k, a, b, c, d

(가) $2 \le a, b, c, d \le k$.

(나) $a^{\frac{1}{b}} \times c^{\frac{1}{d}} = 24^{\frac{1}{5}}$.

모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수가 59가 되도록 하는 k의 Max + min = ?

→ 우선 $k=499$일 때의 경우들을 생각한다.

$24^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}}$

(i) $2^{\frac{1}{5}} \times 12^{\frac{1}{5}} \rightarrow 2^8 = 256,\ 12^2 = 144, \rightarrow 8 \times 2 \times 3 = 32$. 자리바꿈.

(ii) $4^{\frac{1}{5}} \times 6^{\frac{1}{5}} \rightarrow 4^4 = 256,\ 6^3 = 216 \rightarrow 4 \times 3 \times 2 = 24$.

(iii) $8^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}} \rightarrow 8^2 = 64,\ 3^5 = 243 \rightarrow 2 \times 5 \times 2 = 20$.

$= 24^{\frac{1}{10}} \times 24^{\frac{1}{10}}$ (iv) $24^{\frac{1}{10}} \times 24^{\frac{1}{10}}$ → 자리바꿈의 의미가 없다. $= 1$.

$= 24^{\frac{1}{6}} \times 24^{\frac{1}{30}}$ (v) $24^{\frac{1}{6}} \times 24^{\frac{1}{30}} \rightarrow \rightarrow 1 \times 2 = 2$.

* $24^{\frac{1}{P}} \times 24^{\frac{1}{Q}} = 24^{\frac{1}{5}}$ 에서 $\frac{P+Q}{PQ} = \frac{1}{5} \rightarrow 5P + 5Q - PQ = 0$.

$P(5-Q) + 5Q - 25 + 25 = P(5-Q) + 5(Q-5) + 25$

$= -P(Q-5) + 5(Q-5) + 25 \Rightarrow 25 = (P-5)(Q-5)$ ↗ $\begin{cases} P=30,\ Q=6 \\ \text{or} \\ P=6,\ Q=30. \end{cases}$

$= (2^{\frac{1}{10}} \times 2^{\frac{1}{10}} \times 2^{\frac{1}{10}} \times 3^{\frac{1}{10}}) \times (2^{\frac{1}{10}} \times 2^{\frac{1}{10}} \times 2^{\frac{1}{10}} \times 3^{\frac{1}{10}})$ 으로 보고 재배열까지 생각해야 한다.

(vi) $9^{\frac{1}{10}} \times 64^{\frac{1}{10}} \rightarrow 9^2 = 81,\ \sqrt{9} = 3,\ \sqrt{64} = 8 \rightarrow 3 \times 2 \times 2 = 12$.

$\sqrt{9}$도 생각해야 한다. 지수가 $\frac{1}{10}$이므로 밑수가 자연수의 제곱인 경우 $a^{\frac{1}{b}}$ 형태가 가능하다.

(vii) $18^{\frac{1}{10}} \times 32^{\frac{1}{10}} \rightarrow 18^2 = 324. \rightarrow 2 \times 1 \times 2 = 4$.

(viii) $36^{\frac{1}{10}} \times 16^{\frac{1}{10}} \rightarrow 16^2 = 256,\ \sqrt{16} = 4 \rightarrow 2 \times 3 \times 2 = 12$.

$\sqrt{\sqrt{16}}$이 자연수인 경우는 생각할 필요가 없다. $16^{\frac{1}{10}}$에서 10은 4의 배수가 아니다.

(ix) $72^{\frac{1}{10}} \times 8^{\frac{1}{10}} \rightarrow 8^2 = 64$. $\rightarrow 1 \times 2 \times 2 = 4$

(x) $144^{\frac{1}{10}} \times 4^{\frac{1}{10}} \rightarrow \sqrt{144} = 12,\ \sqrt{4} = 2,\ 4^4 = 256 \rightarrow 2 \times 5 \times 2 = 20$.

(xi) $288^{\frac{1}{10}} \times 2^{\frac{1}{10}} \rightarrow 2^8 = 256 \rightarrow 1 \times 8 \times 2 = 16$

(xii) $192^{\frac{1}{10}} \times 3^{\frac{1}{10}} \rightarrow 3^5 = 243$. $\rightarrow 1 \times 5 \times 2 = 10$.

(xiii) $96^{\frac{1}{10}} \times 6^{\frac{1}{10}} \rightarrow 6^3 = 216$. $\rightarrow 1 \times 3 \times 2 = 6$

(xiv) $48^{\frac{1}{10}} \times 12^{\frac{1}{10}} \rightarrow 12^2 = 144$. $\rightarrow 1 \times 2 \times 2 = 4$.

→ (vi)~(xi) 3이 한쪽에 모여 있는 경우, (xii)~(xiv) 3이 양쪽에 하나씩 있는 경우.

∴ $K = 499$일 때 $76 + 3 + 68 + 20 = 167$개의 순서쌍이 나온다.

→ 이후 K값을 줄여 나가면서 (단계적으로 줄이는 것은 강각적으로 아닌 것을 알아야 한다. 그러므로 K값을 확 줄인다) 해당 구간을 찾아야 한다. 여기서 K값의 구간의 기준 (최솟값)이 되는 값들은 위의 case들에서 찾으면 된다.

$K = \cdots\cdots 24, 32, 36, 64, 72, 81, 96, 144, \cdots\cdots$

→ 실제 계산을 해보면 $K = 72$일 때 (i)~(xiv)까지 중 (i)~(ix), (xiv)에서

$12 + 12 + 12 + 1 + 2 + 8 + 2 + 4 + 4 + 2 = 39 + 20 = 59$가 나온다.

(참고로 $K = 72$일 때, (x)~(xiii)까지는 불가능하다).

∴ $m = 72,\ M = 80$.

* 2019년 6월 시행 교육청 고2 수학 가형 21번.

$f(n) = \begin{cases} \sqrt[4]{9 \times 2^{n+1}} & (n\text{이 홀수}) \\ \sqrt[4]{4 \times 3^{n}} & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$, 10 이하의 두 자연수 p, q에 대하여 $f(p) \times f(q)$가 자연수.

(i) p와 q 모두 홀수 : $f(p) \times f(q) = 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{p+1}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{q+1}{4}} = 3 \times 2^{\frac{p+q+2}{4}}$

$\therefore p+q = 2$ or 6 or 10 or 14 or 18.

1개, 3개, 5개, 3개, 1개. $\therefore (p, q)$의 개수는 13.

(ii) p와 q 모두 짝수 : $f(p) \times f(q) = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{p}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{q}{4}} = 2 \times 3^{\frac{p+q}{4}}$

$\therefore p+q = 4$ (1개) or 8 (3개) or 12 (5개) or 16 (3개) or 20 (1개) $\longrightarrow (p, q)$의 개수는 13.

(iii) p는 홀수, q는 짝수 : $f(p) \times f(q) = 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{p+1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{q}{4}} = 2^{\frac{p+3}{4}} \times 3^{\frac{q+2}{4}}$

$\therefore p = 1$ or 5 or 9, $q = 2$ or 6 or 10. $\longrightarrow (p, q)$의 개수는 9.

(iv) p는 짝수, q는 홀수 : $f(p) \times f(q) = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{p}{4}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{q+1}{4}} = 2^{\frac{q+3}{4}} \times 3^{\frac{p+2}{4}}$.

$\therefore p = 2$ or 6 or 10, $q = 1$ or 5 or 9 $\longrightarrow (p, q)$의 개수는 9.

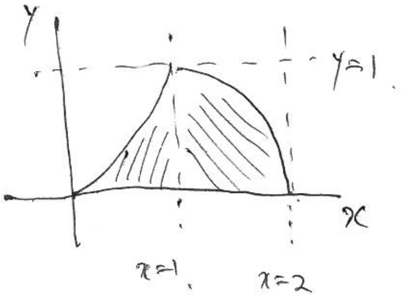
따라서 구하는 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 $13 + 13 + 9 + 9 = 44$ //

→ 문제를 읽거나 파악하는 과정에서 케이스를 나눠야겠다는 생각이 들면 다른 생각하지 말고 나눠서 계산하고, 배반인지 확인하고 계산하는 것이 제일 원할만한 접근이다.

* 2019년 6월 시행 교육청 고2 수학 가형 29번.

정의역 $[0, 8]$. $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & (0 \le x \le 1) \\ 2 - 2^{x-1} & (1 < x \le 2) \end{cases}$, (나) $n = 1, 2, 3$일 때 $2^n f(x) = f(x - 2n)$ $(2n < x \le 2n+2)$

$[0, 2]$에서 $f(x)$는 다음과 같다.



* $2 - 2^{x-1}$의 경우

1) 2^{x-1} (2^x 그래프를 x축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동)

2) -2^{x-1} (2^{x-1} 그래프를 x축 대칭이동)

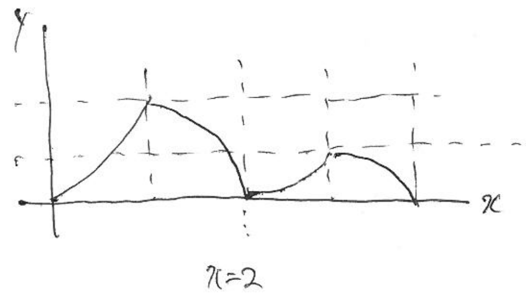
3) $2 - 2^{x-1}$ (-2^{x-1} 그래프를 y축의 양의 방향으로 2만큼 평행이동)

▨ + ▧ = 1 임을 알아차려야 한다. (혹은 $\int_0^1 \{2^x - 1\} dx + \int_1^2 \{2 - 2^{x-1}\} dx$ 도 가능)

(i) $n = 1 \Rightarrow (2 < x \le 4)$, $2f(x) = f(x-2)$

→ 정의된 구간에서 $f(x)$를 2배하면, x값 2만큼 뺀 상태 $(0 < x \le 2)$에서의 함수와 같다.

∴ $[0, 4]$에서 $f(x)$는 다음과 같다.



∴ $[0, 2]$에서의 넓이를 S_1, $[2, 4]$에서의 넓이를 S_2, $[4, 6]$에서의 넓이를 S_3, $[6, 8]$에서의 넓이를 S_4라 하면 $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$.

$\therefore 32S = 32 \times \frac{15}{8} = 4 \times 15 = 60$

* 적분값을 구하라고 문제를 낼 때와 넓이를 구하라고 문제를 낼 때의 차이점에 대해 생각.

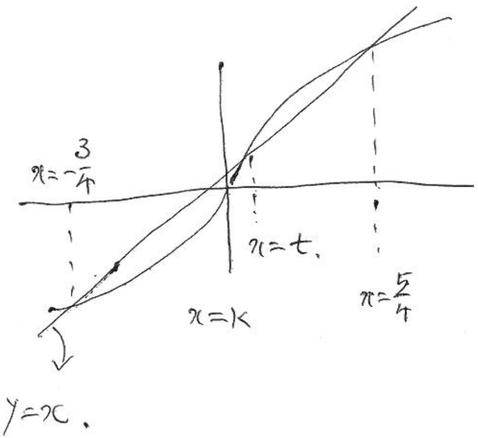
* 2019년 6월 시행 교육청 고2 수학 나형 30번.

$a>0,\ k>0,\ k\neq 1,$ $\quad f(x)=\begin{cases} 2\log_k(x-k+1)+2^{-a} & (x\geq k) \\ 2\log_{\frac{1}{k}}(-x+k+1)+2^{-a} & (x<k) \end{cases}$

→ 밑수가 k와 $\frac{1}{k}$로 역수이지만 진수에서 부호가 바뀌므로 역함수를 가질 수 있다.

(증가 or 감소). $f^{-1}(x)=g(x)$라 할 때, 방정식 $f(x)=g(x)$의 해가 $-\frac{3}{4},\ t,\ \frac{5}{4}$.

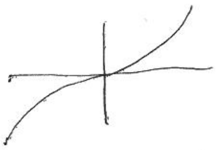
(i) 증가함수라면 $(k>1)$ $\qquad (0<t<1)$.



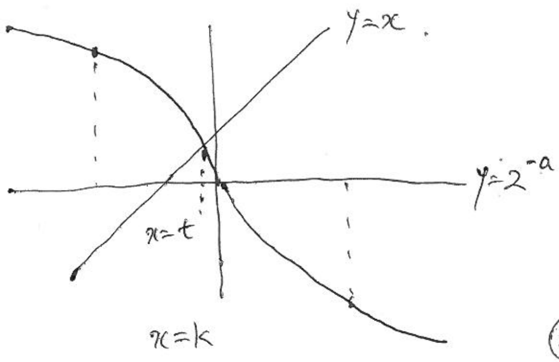
→ 불가능. 개형상 $t>k>1$ 이므로

$(0<t<1)$ 조건에 위배.

→ 개형에 대해서도 생각할 것.

( → 이런 개형은 왜 안되는지...)

(ii) 감소함수라면 $(0<k<1)$



→ $\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$, (t, t), $\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$을 지난다.

$$-2\log_k\left(\frac{7}{4}+k\right)+2^{-a}=\frac{5}{4} \quad \cdots\cdots ①$$

$$2\log_k\left(\frac{9}{4}-k\right)+2^{-a}=-\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots ②$$

$$② - ① = 2\log_k\left\{\left(\frac{9}{4}-k\right)\left(\frac{7}{4}+k\right)\right\} = -2$$

$\therefore\ \frac{63}{16}+\frac{k}{2}-k^2=\frac{1}{k}$ 에서 $16k^3-8k^2-63k+16=0$.

→ $(0, 16)$, $(1, -39)$ $\therefore$ 열린구간 $(0, 1)$ 사이에 실근 존재. 이럴 때 (정수근이 아닐 때)

최고차항의 계수를 활용해서 근을 찾을 수 있는 경우가 많다.

ex) $k=\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{8}{16}, \cdots$ $\qquad k=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ 이면 $\frac{16}{64}-\frac{8}{16}-\frac{63}{4}+16=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{63}{4}+\frac{64}{4}=0$.

∴ 준식은 $(k-\frac{1}{4})$로 인수분해된다.

$16k^3-8k^2-63k+16=(4k-1)(4k^2-k-16)=0$.

∴ $k=\frac{1}{4}$ or $\frac{1\pm\sqrt{1+256}}{2\cdot4}$. ∴ $k=\frac{1}{4}$ $(0<k<1)$

① 에서 $-2\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\right)+2^{-a}=\frac{5}{4}$ $=$ $1+2^{-a}=\frac{5}{4}$. ∴ $a=2$.

감소함수의 개형상 $0<t\leq k<1$ 이므로 (t,t)를 만족해야 한다.

∴ $\log_2\left(\frac{5}{4}-t\right)=t-\frac{1}{4}$ ($f(x)$는 연속이므로 $(x<k)$를 $(x\leq k)$으로 생각할 수 있다)

→ $t=\frac{1}{4}$일 때 성립. 이 경우에는 한번 더 확인을 하는 것이 좋다. 연속함수의 특성상

가능하지만 $t=k=\frac{1}{4}$ 이 같으면 $x=k$가 정의되는 함수에서 최종확인을 한다.

→ $2\log_k(x-k+1)+2^{-2}$ $(x\geq k)$ 이 $k=\frac{1}{4}$ 일 때 $x=t=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{4}$을 확인.

$-\log_2 1+2^{-2}=\frac{1}{4}$ (성립).

∴ $a=2$, $t=\frac{1}{4}$, $k=\frac{1}{4}$. $30\times\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=30\times\frac{5}{2}=15\times5=75$ //

* 2019년 6월 시행 교육청 고2 수학 나형 21번.

음이 아닌 세 정수 a, b, n에 대하여 $(a^2+b^2+2ab-4)\cos\frac{n}{4}\pi+(b^2+ab+2)\tan\frac{2n+1}{4}\pi=0$

이 때, $a+b+\sin^2\frac{n}{8}\pi=?$ (단, $a\geq b$) ↳ 항등식이 아니고 방정식임에 주의

$\cos\frac{n}{4}\pi$는 주기가 8, $\tan\frac{2n+1}{4}\pi$는 주기가 2.

→ n을 기준으로 하나의 세트 (또는 주기)를 8 단위로 설정하고 계산.

(i) $n=0$일 때 ($n=9$, $n=17$, $n=25$, $n=33$, …… 등과 동일)

$a^2+b^2+2ab-4+b^2+ab+2=a^2+3ab+2b^2-2=0$

$\therefore (a+2b)(a+b)=2$. → $a=0, b=1$ ($a\geq b$ 조건에 위배) → (i) X.

(ii) $n=1$일 때 $(a^2+b^2+2ab-4)\frac{\sqrt{2}}{2}-(b^2+ab+2)=0$

$\sqrt{2}a^2+(\sqrt{2}-2)b^2+(2\sqrt{2}-2)ab-4\sqrt{2}-4=0$

$\sqrt{2}(a^2+b^2+2ab)-2(b^2+ab)=4\sqrt{2}+4$ → a, b가 0 또는 자연수이므로 $b^2+ab=-2$가 불가능.

(iii) $n=2$일 때 $b^2+ab+2=0$ → 불가능.

(iv) $n=3$일 때 $-(a^2+b^2+2ab-4)\frac{\sqrt{2}}{2}-(b^2+ab+2)=0$.

$\sqrt{2}(a^2+b^2+2ab)+2(b^2+ab)=4\sqrt{2}-4$ → 불가능.

(v) $n=4$일 때 $-(a^2+b^2+2ab-4)+b^2+ab+2=0$

$-a^2-ab+6=0$에서 $a(a+b)=6$. $\therefore a=2, b=1$, ($a=1, b=5$는 $a\geq b$ 조건에 위배)

(vi) $n=5$일 때 (iv)와 동일.

(vii) $n=6$일 때 (iii)과 동일.

(viii) $n=7$일 때 (ii)와 동일.

$\therefore n=4$ or 12 or 20 or 28 or ---. $\therefore \frac{n}{8}\pi=\frac{\pi}{2}$. $\therefore \sin^2\frac{n}{8}\pi=1^2=1$.

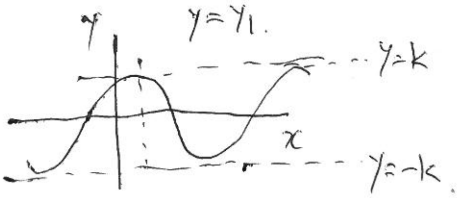
$\therefore a+b+\sin^2\frac{n}{8}\pi=2+1+1=4$//

* 2019년 6월 시행 교육청 고2 수학 나형 29번.

$y=k\sin(2x+\frac{\pi}{3})+k^2-6$ 의 그래프가 제1사분면을 지나지 않도록 ($y>0$) 하는 정수 k의 개수?

(i) $k=0$ 일 때 $y=-6$. (OK).

(ii) $k>0$ 일 때 $y_1=k\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 라 하면 (평행이동으로 생각)

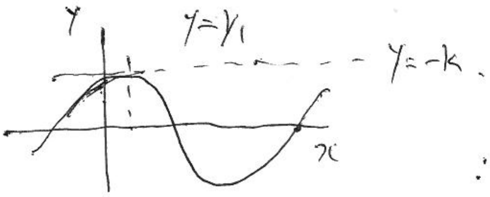


y_1의 그래프를 y축의 음의 방향으로 k 이상 이동시키면 성립한다.

$\therefore\ k^2-6\le -k \rightarrow k^2+k-6\le 0$.

$k=1$ or 2

(iii) $k<0$ 일 때



y_1의 그래프를 y축의 음의 방향으로 $-k$ 이상 이동시키면 성립한다. (주의: $-k>0$)

$\therefore\ k^2-6\le k \rightarrow k^2-k-6\le 0$.

$k=-1$ or -2.

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.