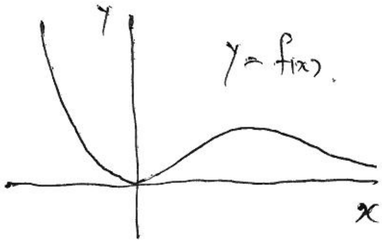
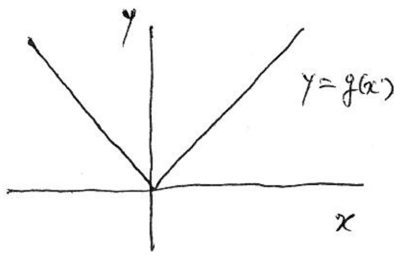
* 합성함수의 연속

$f(g(x))$ 라는 합성함수가 있을 때, 합성함수의 기본 개형은 $f(x)$에 의존한다. 여기서, 의존한다라 함은 구간의 개수나 연속점의 개수를 말하는 것이 아니다.

예를 들어 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 개형이 다음과 같을 때

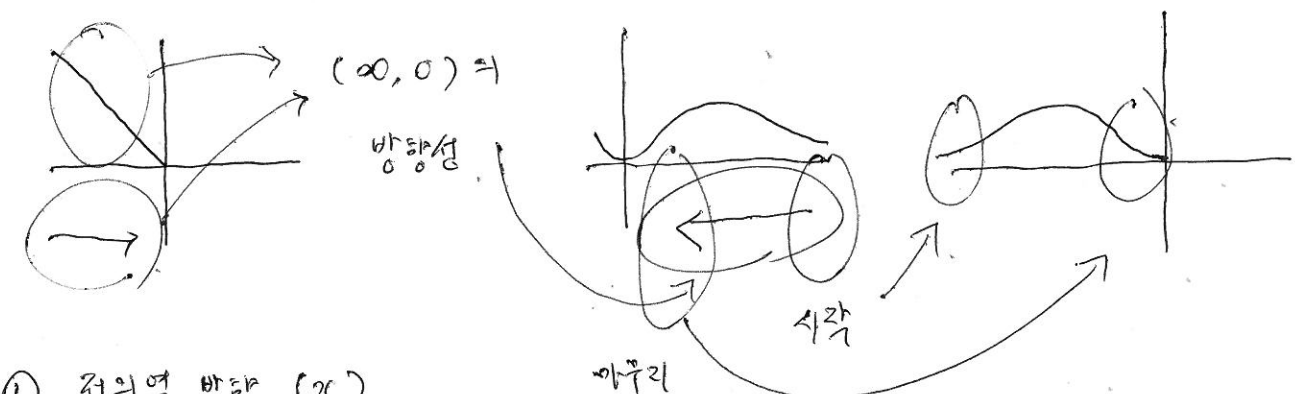




합성함수의 정의역은 $g(x)$의 정의역과 같다. $g(x)$의 치역이 $f(x)$에서 작용하는 것이지 $g(x)$의 치역을 합성함수의 정의역으로 생각하는 것은 착각이다.

(가) $(-\infty, 0)$ 구간이라면

(가)−1　　(가)−2　　(가)−3



① 정의역 방향 (x)

② 치역의 방향 (y)

③ ②에서의 방향을 다시 가로축의 방향으로 변경 ($y \to x$)

④ $f(x)$에서 ③의 결과부분을 복사.

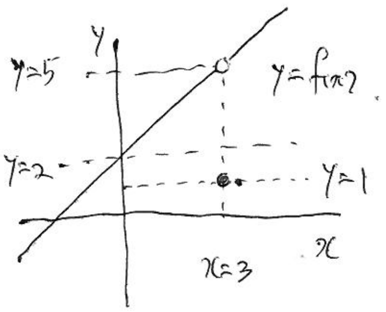
⑤ ①에서의 정의역 방향대로 ④에서 복사한 부분 붙이기

(여기서 시작과 마무리는 정의역으로 부분설정한 $(-\infty, 0)$에서 $-\infty$가 시작, 0이 마무리 부분이다)

합성함수의 연속을 확인할 때에는 속함수 (예를 들어서 $f(g(x))$에서 $g(x)$)가 불연속인 x값들과, 그러한 x값을 y값으로 갖는 x값을 모두 확인해야 하고, $f(x)$가 불연속인 x값들과, 그러한 x값을 y값으로 갖는 x값을 모두 확인하는 것이다.

⇒ 행동강령 : 불연속인 x와, 또한 같은 값을 갖는 y값들에 대한 x값 모두 확인하는 것이 안전하다.

예1) 함수 $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \neq 3) \\ 1 & (x = 3) \end{cases}$ 에 대하여 합성함수 $f(f(x))$는 $x=a$에서 불연속이다. 이 때 모든 a의 값의 합을 구하시오. (단, a는 실수이다)



① $x=3$일 때

$$f(f(3)) = f(1) = 3.$$

$$\lim_{x\to 3+} f(f(3)) = \lim_{x\to 5+} f(x) = 7$$

불연속

$\lim_{x\to 3-}$ → 더 확인할 필요가 없다.

② $x=1$일 때 → y값이 1이므로 그 값을 x로 바꿔서 생각한다. (불연속인 $x=3$을 $y=3$으로 바꾸고 y값이 3인 x값을 찾으면 $x=1$이 된다)

$$f(f(1)) = f(3) = 1.$$

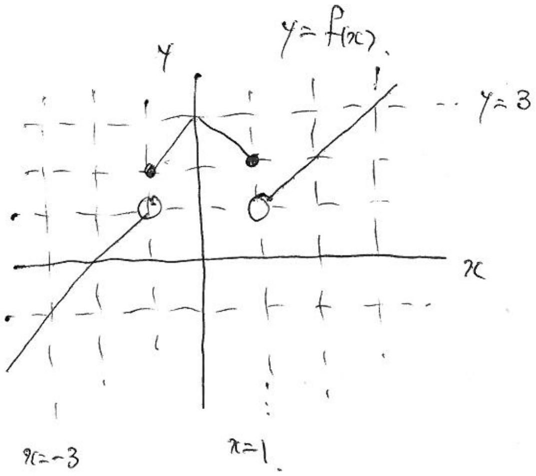
$$\lim_{x\to 1+} f(f(x)) = \lim_{x\to 3+} f(x) = 5(+).$$

불연속

∴ 모든 a는 1과 3.

* 만약 위의 예제에서 $f(x) = x+1$ 이라면 $x=3$일 때와 $x=2$일 때 합성함수가 불연속이다.

예제2) 극한 예제 1번



$f \circ f(x)$ 의 불연속인 점을 확인하시오.

1) 속함수인 $f(x)$의 불연속점

$x=-1$ 일 때와 $x=1$ 일 때

($y=2$) ($y=2$) → 극한값은 X.

좌우극한값이 다르다.

$y=-1$ 일 때 $x=-3$,

$y=1$ → 없음.

2-1) $x=-1$ 일 때

$$\left.\begin{aligned} &f \circ f(-1) = f(2) = 2 \\ &\lim_{x\to -1-} f \circ f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x) = 2 \\ &\lim_{x\to -1+} f \circ f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = 2 \end{aligned}\right\} \text{연속}$$

2-2) $x=1$ 일 때

$$\left.\begin{aligned} &f \circ f(1) = f(2) = 2 \\ &\lim_{x\to 1-} f \circ f(x) = \lim_{x\to 2+} f(x) = 2 \\ &\lim_{x\to 1+} f \circ f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = 1 \end{aligned}\right\} \text{불연속}$$

2-3) $x=-3$ 일 때

$$\left.\begin{aligned} &f \circ f(-3) = f(-1) = 2 \\ &\lim_{x\to -3-} f \circ f(x) = \lim_{x\to -1-} f(x) = 1 \end{aligned}\right\} \text{불연속}$$

* 이와 같이 $x=-1$, $x=1$ 일 때만 확인하면 $x=-3$일 때를 놓치게 된다.

* 연속을 정의할 때

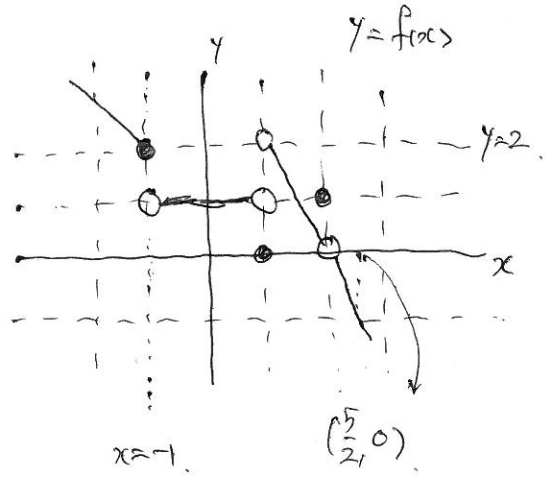
① 함숫값 존재

② 극한값 존재

③ ① = ②

그냥 문제 풀 때는 극한값 먼저 구하고 나중에 함숫값 확인해도 답은 나오겠지만 그러한 순서는 기본을 망각한 것이다. 의도적으로라도 함숫값 먼저 확인하는 습관을 들여야 한다.

예제 3) 극한 예제 2번.



$f \circ f(x)$ 함수의 불연속을 확인하시오.

1) $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$, $x=2$일 때 불연속.

$\rightarrow$ $(\frac{5}{2}, -1)$, $(-1, 2)$.

$(\{(-1 \leq x < 1) \cap (x=2)\}, 1)$

임의의 점 하나로 확인 (ex: ($x=0$))

3-1) $x=-1$일 때

$f \circ f(-1) = f(2) = 1$.

$\lim_{x \to -1-} f \circ f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = 0$ } 불연속.

3-2) $x=1$일 때

$f \circ f(1) = f(0) = 1$

$\lim_{x \to 1-} f \circ f(x) = f(1) = 0$ } 불연속.

3-3) $x=2$일 때

$f \circ f(2) = f(1) = 0$

$\lim_{x \to 2-} f \circ f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ } 불연속.

3-4) $x=\frac{5}{2}$일 때

$f \circ f(\frac{5}{2}) = f(-1) = 2$

$\lim_{x \to \frac{5}{2}-} f \circ f(x) = \lim_{x \to -1+} f(x) = 1$ } 불연속.

3-5) $x=0$일 때

$f \circ f(0) = f(1) = 0$

$\lim_{x \to 0-} f \circ f(x) = f(1) = 0$

$\lim_{x \to 0+} f \circ f(x) = f(1) = 0$. } 연속.