2021 수특

2021 EBS 수능특강 수학1 2. 지수함수와 로그함수 (1)

p32 4번 단순변형

1. 함수 $y=10^{ax}$의 역함수가 $y=\dfrac{a}{100}logx$ 일 때, 양수 a의 값을 구하시오.
(단, log는 상용로그)(단답형)

p32 2번 응용변형

2. 지수함수의 그래프에 대한 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보기]
ㄱ. $y=2^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동하면 $y=\dfrac{1}{2^x}$의 그래프가 된다.
ㄴ. $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 $y=2^x$의 그래프보다 아래에 놓이게 된다.
ㄷ. $y=\sqrt{2}\times 2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하여 $y=2^x$의 그래프를 얻을 수 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄴ,ㄷ
④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

p31 10번 단순변형

3. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하시오. (단답형)

$$(\log_2 x)^3+\log_2 x^3=4(\log_2 x)^2+\log_2 x$$

p23 2번 응용변형

4. 함수 $y=\log_2(x+1)+1$의 그래프가 x축 및 y축과 만나는 두 점을 지나는 직선의 기울기는?

① -2 ② -1 ③ 1
④ 2 ⑤ 4

p33 8번 단순변형

5. 다음 부등식의 해는?

$$(\log_2 x)^2+\log_2 x-2\ge 0$$

① $\dfrac{1}{4}\le x\le 2$

② $\dfrac{1}{2}\le x\le 4$

③ $2\le x\le 4$

④ $0<x\le\dfrac{1}{4}$ 또는 $x\ge 2$

⑤ $0<x\le\dfrac{1}{2}$ 또는 $x\ge 4$

p31 10번 단순변형

6. 다음 방정식의 해를 구하시오.(단답형)

$$\log_{10}x+\log_{10}(x-10)=2+\log_{10}2$$

p32 2번 단순변형

7. 함수 $y=5^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동 시켰더니 함수 $y=25\times5^{2x}+2$의 그래프가 되었다. $m+n$의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

p31 9번 단순변형

8. 지수부등식 $2^{x^2}<4\times2^x$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

p33 8번 응용변형

9. 연립부등식

$$\begin{cases}2^{x+3}>4\\2\log(x+3)<\log(5x+15)\end{cases}$$

를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

p33 6번 단순변형

10. 정의역이 $\{x|5\le x\le8\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)$의 최솟값이 -2일 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

p31 10번 단순변형

11. 로그방정식 $(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

p32 2번 단순변형

12. 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동 시킨 그래프가 두 점 $(-1,1),(0,5)$를 지날 때, m^2+n^2의 값을 구하시오. (단답형)

p31 9번 응용변형

13. 부등식 $9^x-3^{x+2}+18<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $3^\alpha\times3^\beta$의 값을 구하시오. (단답형)

p32 3번 단순변형

14. 정의역이 $\{x|-1\le x\le3\}$인 두 지수함수 $f(x)=4^x, g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에 대하여 $f(x)$의 최댓값을 M, $g(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① 8 ② 6 ③ 4
④ 2 ⑤ 1

p33 5번 단순변형

15. 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동 시킨 그래프가 함수 $y=\log_b x$의 그래프와 점 $(9,2)$에서 만날 때, $10a+b$의 값을 구하시오. (단답형)

정답 및 해설

1	10	2	③	3	16	4	④	5	④
6	20	7	②	8	①	9	①	10	④
11	③	12	18	13	18	14	①	15	53

1) 정답 10

[출제범위] 지수함수와 로그함수

$y=10^{ax}$의 역함수
$\Leftrightarrow x=10^{ay}$
$\Leftrightarrow \log x=ay$
$\Leftrightarrow \frac{1}{a}logx=y$
$\Leftrightarrow \frac{a}{100}logx=y$
$\therefore \frac{1}{a}=\frac{a}{100}$
$\Leftrightarrow a^2=100$
$\therefore a=10$ ($\because a$는 양수)

2) 정답 ③

[출제범위] 지수함수와 로그함수

ㄱ.$y=2^x$의 그래프 x축 대칭이동
$\Leftrightarrow -y=2^x$
$\Leftrightarrow y=-2^x$ (거짓)
ㄴ.$y=2^x$의 그래프 x축 방향1만큼 평행이동
$\Leftrightarrow y=2^{x-1}$
$2^x\div 2^{x-1}>1$이므로, $2^x>2^{x-1}$ (참)
ㄷ.$y=\sqrt{2}\times 2^x$
$\Leftrightarrow y=2^{x+\frac{1}{2}}$이므로
$y=\sqrt{2}\times 2^x$의 그래프를 x축의 방향으로
$\frac{1}{2}$만큼 평행이동하면 $y=2^x$그래프가 된
다. (참)
$\therefore$ ㄴ, ㄷ

필수 개념

$y=a^x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동
하면 $y=-a^x$의그래프가 된다.

3) 정답 16

[출제범위] 지수함수와 로그함수

$\log_2 x=t$라 하자.
$(\log_2 x)^3+\log_2 x^3=4(\log_2 x)^2+\log_2 x$
$\Leftrightarrow t^3+3t=4t^2+t$
$\Leftrightarrow t^3-4t^2+2t=0$
$\Leftrightarrow t(t^2-4t+2)=0$
$case1)\ t=0$일 때, $\log_2 x=0$이므로, $x=1$
$case2)\ t^2-4t+2=0$일 때,
$(\log_2 x)^2-4\log_2 x+2=0$의 두 근을 α,β라
하면, $\log_2\alpha+\log_2\beta=4$이므로,
$\log_2\alpha\beta=4$이다. $\therefore \alpha\beta=16$
$\therefore 1\times\alpha\times\beta=1\times 16=16$

필수 개념

$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$의 근이 α,β이면
$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$

4) 정답 ④

[출제범위] 지수함수와 로그함수

$y=\log_2(x+1)+1$의 그래프에서,
$x=0$일 때, $y=\log_2 1+1=1$
$y=0$일 때, $0=\log_2(x+1)+1$
$\Leftrightarrow -1=\log_2(x+1)$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}=x+1$
$\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ 이므로,
$y=\log_2(x+1)+1$ 의 그래프는,
$(0,1)$과 $(-\frac{1}{2},0)$을 지난다.
두 점을 지나는 직선의 기울기는,
$\frac{1-0}{0-\left(-\frac{1}{2}\right)}=2$
$\therefore 2$

필수 개념

$A(a,b), B(c,d)$ 두 점을 지나는
직선의 기울기 $m=\frac{d-b}{c-a}$

5) 정답 ④

[출제범위] 지수함수와 로그함수

$(\log_2 x)^2+\log_2 x-2\geq 0$에서,
$x>0$이고, $\log_2 x=t$라 하자.
$(\log_2 x)^2+\log_2 x-2\geq 0$
$\Leftrightarrow t^2+t-2\geq 0$
$\Leftrightarrow (t+2)(t-1)\geq 0$
$\Leftrightarrow t\geq 1$ 또는 $t\leq -2$
$\Leftrightarrow \log_2 x\geq 1$ 또는 $\log_2 x\leq -2$
$\Leftrightarrow x\geq 2$ 또는 $0<x\leq \frac{1}{4}$ ($\because$ 진수조건)
$\therefore x\geq 2$ 또는 $0<x\leq \frac{1}{4}$

필수 개념
로그가 정의되려면, 밑은 1이 아닌 양수, 진수는 양수라는 두가지 조건을 모두만족해야 한다.

6) 정답 20

[출제범위] 지수함수와 로그함수

$\log_{10}x+\log_{10}(x-10)=2+\log_{10}2$
$\Leftrightarrow \log_{10}x(x-10)-\log_{10}2=\log_{10}100$
$\Leftrightarrow \log_{10}\frac{x^2-10x}{2}=\log_{10}100$
$\Leftrightarrow \frac{x^2-10x}{2}=100$
$\Leftrightarrow x^2-10x-200=0$
$\Leftrightarrow (x-20)(x+10)=0$
$\therefore x=20$ ($\because x>10$)

7) 정답 ②

[출제범위] 지수함수와 로그함수

함수 $y=5^{2x}$의 그래프를
x축 방향으로 m만큼, y축 방향으로 n만큼
평행이동 시키면 $y=5^{2(x-m)}+n$의
그래프가 된다.
$y=5^{2(x-m)}+n$
$\Leftrightarrow y=25\times 5^{2x}+2$
$\Leftrightarrow y=5^{2x+2}+2$
$\Leftrightarrow y=5^{2(x+1)}+2$
$\therefore m=-1, n=2$이므로 $m+n=-1+2=1$

필수 개념
지수함수 $y=a^x$의 그래프를 x축 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동 하면 $y=a^{x-m}+n$의 그래프가 된다.

다른풀이

$y=25\times 5^{2x}+2$
$\Leftrightarrow y=5^{2(x+1)}+2$
$y=5^{2(x+1)}+2$의 그래프를
x축으로 1만큼, y축으로 -2만큼
평행이동 시키면, $y=5^{2x}$그래프가 된다.
$\therefore m=-1, n=2$이므로 $m+n=1$

8) 정답 ①

[출제범위] 지수함수와 로그함수

$2^{x^2}<4\times 2^x$
$\Leftrightarrow 2^{x^2}<2^{2+x}$
$\Leftrightarrow x^2<2+x$
$\Leftrightarrow x^2-x-2<0$
$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)<0$
$\Leftrightarrow -1<x<2$
$\therefore \alpha+\beta=-1+2=1$

9) 정답 ①

[출제범위] 지수함수와 로그함수

$2^{x+3}>4$
$\Leftrightarrow 2^{x+3}>2^2$
$\Leftrightarrow x+3>2$
$\Leftrightarrow x>-1$
$2\log(x+3)<\log(5x+15)$
$\Leftrightarrow \log(x+3)^2<\log(5x+15)$
$\Leftrightarrow (x+3)^2<5x+15$
$\Leftrightarrow x^2+6x+9<5x+15$
$\Leftrightarrow x^2+x-6<0$
$\Leftrightarrow (x+3)(x-2)<0$
$\Leftrightarrow -3<x<2$ ($\because x>-3$)
$\therefore -1<x<2$이므로,
정수 x의 개수는 2개이다

필수 개념
로그가 정의되려면, 밑은 1이 아닌 양수, 진수는 양수라는 두가지 조건을 모두만족해야 한다.

10)정답 ④

[출제범위] 지수함수와 로그함수

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)$는 감소함수이므로
$x=8$일 때, 최솟값 -2를 갖는다.
$-2=\log_{\frac{1}{2}}(8-a)$
$\Leftrightarrow (\frac{1}{2})^{-2}=8-a$
$\Leftrightarrow 4=8-a$
$\Leftrightarrow a=4$
$\therefore 4$

필수 개념
지수함수 $y=a^x$는 $a>1$일 때, 증가함수이고, $0<a<1$일 때, 감소함수이다.

11)정답 ③

[출제범위] 지수함수와 로그함수

$(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0$
$\Leftrightarrow(\log_2 x-1)(\log_2 x-2)=0$
$\Leftrightarrow \log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=2$
$\Leftrightarrow x=2$ 또는 $x=4$
$\therefore \alpha+\beta=2+4=6$

필수 개념
$a>0, a\neq 1, N>0$일 때, $a^x=N \Leftrightarrow x=\log_a N$

12)정답 18

[출제범위] 지수함수와 로그함수

$y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동 시키면,
$y=2^{x-m}+n$의 그래프가 된다.

$\begin{cases} 5=2^{-m}+n & \cdots ㄱ \\ 1=2^{-1-m}+n & \cdots ㄴ \end{cases}$

ㄱ식에서 ㄴ식을 빼면,
$4=2^{-m}-2^{-1-m}$
$\Leftrightarrow 4=2^{-m}(1-\frac{1}{2})$
$\Leftrightarrow 2^2=2^{-m-1}$
$\Leftrightarrow 2=-m-1$
$\Leftrightarrow m=-3$
$m=-3$을 ㄴ식에 대입하면,
$1=2^{-1+3}+n$
$\Leftrightarrow n=-3$

$\therefore m^2+n^2=(-3)^2+(-3)^2=18$

필수 개념
지수함수 $y=a^x$의 그래프를 x축 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동 하면 $y=a^{x-m}+n$의 그래프가 된다.

13)정답 18

[출제범위] 지수함수와 로그함수

$9^x-3^{x+2}+18<0$
$\Leftrightarrow(3^x)^2-9\times 3^x+18<0$
$\Leftrightarrow(3^x-6)(3^x-3)<0$
$\Leftrightarrow 3<3^x<6$
$\Leftrightarrow 1<x<\log_3 6$
$\therefore \alpha=1, \beta=\log_3 6$이므로
$3^\alpha\times 3^\beta=3^1\times 3^{\log_3 6}=18$
$\therefore 18$

다른풀이

$9^x-3^{x+2}+18<0$
$\Leftrightarrow(3^x)^2-9\times 3^x+18<0$
$3^x=t$라 하자. (단, $t>0$)
$(3^x)^2-9\times 3^x+18<0$
$\Leftrightarrow t^2-9t+18<0$
$\Leftrightarrow(t-3)(t-6)<0$
$\Leftrightarrow 3<t<6$
$\alpha<x<\beta$
$\Leftrightarrow 3^\alpha<3^x<3^\beta$
$\Leftrightarrow 3<t<6$
$\therefore 3^\alpha\times 3^\beta=3\times 6=18$

14)정답 ①

[출제범위] 지수함수와 로그함수

$f(x)=4^x$는 증가함수이다.
$\therefore x=3$일 때, 최댓값 M을 갖는다.
$f(x)=4^x$
$\Leftrightarrow M=4^3=2^6$
$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$는 감소함수이다.
$\therefore x=3$일 때, 최솟값 m을 갖는다.
$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$
$\Leftrightarrow m=\left(\frac{1}{2}\right)^3=2^{-3}$
$\therefore Mm=2^6\times 2^{-3}=2^3=8$

필수 개념

지수함수 $y=a^x$는
$a>1$일 때, 증가함수이고,
$0<a<1$일 때, 감소함수이다.

15)정답 53

[출제범위] 지수함수와 로그함수

$y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동 시키면 $y=\log_2(x-a)$의 그래프가 된다.

$y=\log_2(x-a)$
$\Leftrightarrow 2=\log_2(9-a)$
$\Leftrightarrow \log_2 4=\log_2(9-a)$
$\Leftrightarrow a=5$
$\therefore a=5$
$y=\log_b x$
$\Leftrightarrow 2=\log_b 9$
$\Leftrightarrow b^2=9$
$\Leftrightarrow b=3\,(\because b>0, b\neq 1)$
$\therefore b=3$
$\therefore 10a+b=10\times 5+3=53$

필수 개념

로그함수 $y=\log_a x$의 그래프를
x축의 방향으로 m만큼,
y축의 방향으로 n만큼 평행이동 하면
$y=\log_a(x-m)+n$의 그래프가 된다.