2021

매쓰메딕

객관식을 주관식으로!

change

정답은 PDF에서만
제공됩니다.

객 → 주
관식 관식

MATHMEDIC

1번

$\sin \frac{7}{6}\pi$ 의 값은?

11502

2번

좌표평면에서 곡선 $y = a^x$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 곡선이 점 $(2, 3)$ 을 지날 때, 양수 a 의 값은?

11503

3번

함수 $y = a\sin\frac{\pi}{2b}x$ 의 최댓값은 2 이고 주기는 2 이다. 두 양수 a , b 의 합 $a + b$ 의 값은?

11504

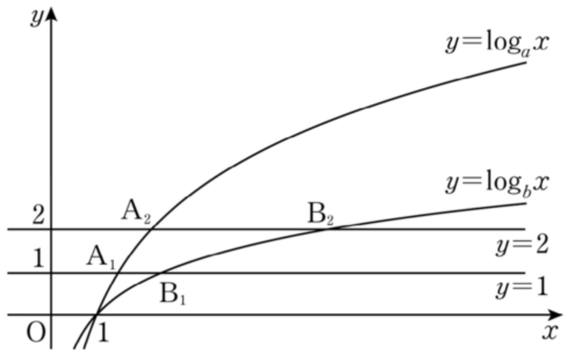
4번

좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = \log_2(2^n - x)$ 가 만나는 점의 x 좌표를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$ 의 값은?

11505

5번

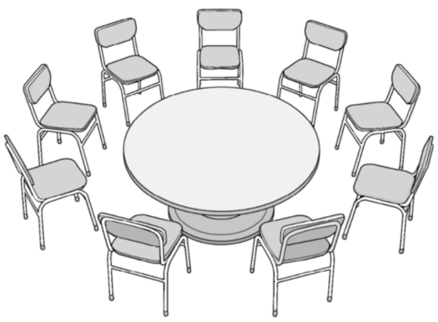
그림과 같이 두 곡선 $y=\log_a x, y=\log_b x\,(1<a<b)$와 직선 $y=1$ 이 만나는 점을 $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1$ 이라 하고, 직선 $y=2$ 가 만나는 점을 $\mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2$ 라 하자. 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ 의 중점의 좌표는 $(2, 1)$ 이고 $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}=1$ 일 때, $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}$ 의 값은?



\# 11506

6번

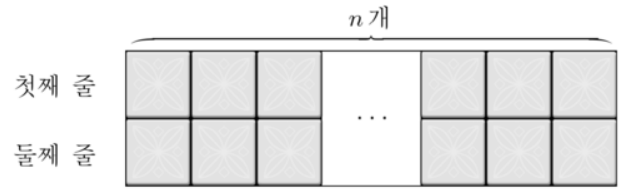
여학생 3 명과 남학생 6 명이 원탁에 같은 간격으로 둘러앉으려고 한다. 각각의 여학생 사이에는 1 명 이상의 남학생이 앉고 각각의 여학생 사이에 앉은 남학생의 수는 모두 다르다. 9 명의 학생이 모두 앉는 경우의 수가 $n\times 6!$ 일 때, 자연수 n의 값은?
(단, 회전하여 일치하는 것들은 같은 것으로 본다.)



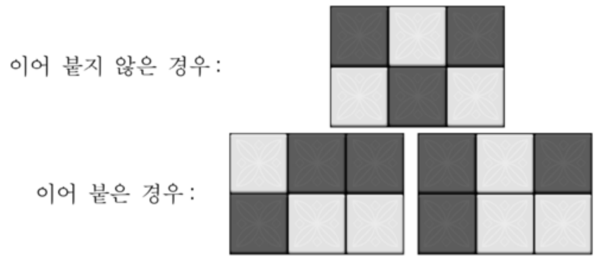
\# 11507

7번

그림과 같이 가로로 n 개, 세로로 2 개씩 총 $2n$ 개의 크기가 같은 정사각형 모양의 타일을 이어 붙인다.



이 타일 중에서 3 개를 골라 검은색으로 칠하되, 검은색으로 칠한 타일이 서로 이어 붙지 않게 하려고 한다. 다음은 검은색으로 칠한 타일이 이어 붙지 않은 경우와 이어 붙은 경우의 한 예이다.



다음은 $n\geq 6$ 일 때, 검은색으로 칠할 타일 3 개를 고르는 경우의 수 $S(n)$ 을 구하는 과정이다.

첫째 줄에 있는 타일 중 검은색으로 칠할 타일의 개수를 $k\,(k=0, 1, 2, 3)$이라 하면

(i) $k=0$ 일 때 둘째 줄에 있는 n 개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 3 개를 고르는 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.

(ii) $k=1$ 일 때 둘째 줄에 있는 n 개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 2 개를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}$ 이고, 첫째 줄에서 검은색으로 칠할 타일 1 개를 고르는 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이므로, 검은색으로 칠할 타일 3 개를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}\times\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

(iii) $k=2$ 일 때 (ii)와 같은 방법으로 구할 수 있다.

(iv) $k=3$ 일 때 (i)과 같은 방법으로 구할 수 있다.

따라서 $S(n)=\dfrac{2(n-2)(2n^2-8n+9)}{3}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때, $f(10)+g(8)$ 의 값은?

\# 11508

8번

숫자 $0, 1, 2, 3, 4$ 중에서 중복을 허락하여 세 개를 선택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세자리 자연수의 개수는?

11509

9번

최대 충전 용량이 $Q_0(Q_0 > 0)$인 어떤 배터리를 완전히 방전시킨 후 t 시간 동안 충전한 배터리의 충전 용량을 $Q(t)$라 할 때, 다음 식이 성립한다고 한다.

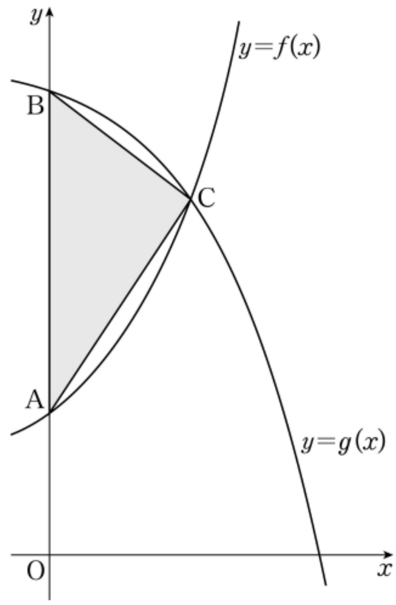
$$Q(t) = Q_0\left(1 - 2^{-\frac{t}{a}}\right)$$ (단, a는 양의 상수이다.)

$\dfrac{Q(4)}{Q(2)} = \dfrac{3}{2}$일 때, a의 값은?
(단, 배터리의 충전 용량의 단위는 mAh 이다.)

11510

10번

그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2^x + 1, g(x) = -2^{x-1} + 7$의 그래프가 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y = f(x)$와 곡선 $y = g(x)$가 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ACB의 넓이는?



11511

11번

닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x) = \left(\dfrac{3}{a}\right)^x$ 의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 곱은?

11512

12번

다음은 부등식

$$\sum_{k=1}^{n}\{2k \times ({}_n\mathrm{C}_k)^2\} \geq 10 \times {}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$$

을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하는 과정이다.

$(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수는 $\boxed{(\text{가})}$ 이다.
$(1+x)^n(1+x)^n$의 전개식에서 x^n의 계수는

$$\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k \times {}_n\mathrm{C}_{n-k}) = \sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k)^2$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\{2k \times ({}_n\mathrm{C}_k)^2\} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\{k \times ({}_n\mathrm{C}_k)^2\} + \sum_{k=1}^{n}\{k \times ({}_n\mathrm{C}_{n-k})^2\} \\
&= \{({}_n\mathrm{C}_1)^2 + 2 \times ({}_n\mathrm{C}_2)^2 + \cdots + n \times ({}_n\mathrm{C}_n)^2\} \\
&\quad + \{({}_n\mathrm{C}_{n-1})^2 + 2 \times ({}_n\mathrm{C}_{n-2})^2 + \cdots + n \times ({}_n\mathrm{C}_0)^2\} \\
&= \boxed{(\text{나})} \times \{({}_n\mathrm{C}_0)^2 + ({}_n\mathrm{C}_1)^2 + \cdots + ({}_n\mathrm{C}_n)^2\} \\
&= \boxed{(\text{나})} \times \boxed{(\text{가})}
\end{aligned}$$

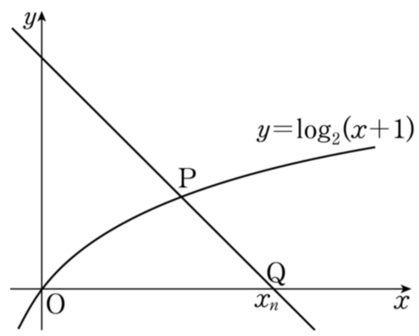
이다.
따라서 부등식 $\sum_{k=1}^{n}\{2k \times ({}_n\mathrm{C}_k)^2\} \geq 10 \times {}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}$을
만족시키는 자연수 n의 최솟값은 $\boxed{(\text{다})}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$이라 하고, (다) 에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(3)+g(3)+p$의 값은?

11513

13번

그림과 같이 제 1사분면에 있는 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}n$이 되도록 하는 점 Q의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{5} x_k$의 값은?



11514

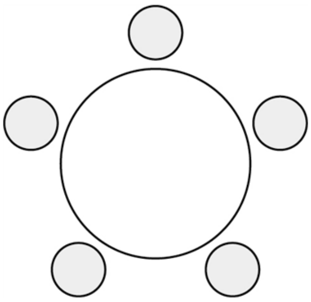
14번

함수 $y=\ln(x-a)+b$의 그래프는 점 $(2, 5)$를 지나고, 직선 $x=1$을 점근선으로 갖는다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

11515

15번

그림과 같이 원형 탁자에 5개의 의자가 일정한 간격으로 놓여있다. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 1명이 모두 이 5개의 의자에 앉으려고 할 때, 1학년 학생 2명이 서로 이웃하도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



11516

16번

부등식

$$\log_2(x^2-1)+\log_2 3 \le 5$$

를 만족시키는 정수 x의 개수는?

11517

17번

$0 \le x \le \pi$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\cos x \tan x + a & \left(x \ne \dfrac{\pi}{2}\right) \\ 3a & \left(x = \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 연속일 때, 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a는 상수이다.)

11518

18번

네 개의 비어 있는 상자 A,B,C,D가 있다. 각각의 상자에 최대 5개의 공을 넣을 수 있을 때, 네 상자 A,B,C,D에 $n(1 \le n \le 20)$개의 공을 남김없이 나누어 넣는 경우의 수를 $f(n)$이라 하자. 다음은 $f(15)+f(14)+f(13)$의 값을 구하는 과정이다. (단, 공은 구별하지 않고, 공을 하나도 넣지 않은 상자가 있을 수 있다.)

네 상자 A,B,C,D에 n개의 공을 남김없이 나누어 넣는 경우의 수는 공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A,B,C,D에서 총 $20-n$개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같다.

(i) $n=15$인 경우
공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A,B,C,D에서 총 5개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같으므로
$f(15)=\boxed{\text{(가)}}$

(ii) $n=14$인 경우
공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A,B,C,D에서 총 6개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같으므로
$f(14)={}_4\mathrm{H}_6-\boxed{\text{(나)}}$

(iii) $n=13$인 경우
공이 5개씩 모두 20개가 들어 있는 네 상자 A,B,C,D에서 총 7개의 공을 꺼내는 경우의 수와 같으므로
$f(13)=\boxed{\text{(다)}}$

(i),(ii),(iii)에 의해
$f(15)+f(14)+f(13)$
$=\boxed{\text{(가)}}+({}_4\mathrm{H}_6-\boxed{\text{(나)}})+\boxed{\text{(다)}}$
이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은?

11519

빠른 정답표

1. $-\frac{1}{2}$
2. $\sqrt[3]{2}$
3. $\frac{5}{2}$
4. 31
5. 4
6. 12
7. 62
8. 100
9. 2
10. $\frac{9}{2}$
11. 18
12. 32
13. 72
14. 6
15. 12
16. 4
17. 4
18. 164