

앞선 글에서 우리는 다르부의 정리를 이용하여 다음과 같은 명제들을 도출해냈습니다.

함수 $f(x)$ 가 $x = c$ 의 왼쪽과 오른쪽에서 각각 미분가능함이 보장되고,
 $\lim_{x \rightarrow c-} f'(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow c+} f'(x)$ 의 값이 각각 어떤 실수 값으로 존재하면
 “ $f(x)$ 가 $x = c$ 에서 미분가능하면 $f'(x)$ 는 $x = c$ 에서 연속이다.”
 “ $\lim_{x \rightarrow c-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow c+} f'(x)$ 이면 $f(x)$ 는 $x = c$ 에서 미분불가능하다.”
 가 성립한다.

이번 글에서 우리가 관심을 가질 질문은 다음과 같습니다.

$x = c$ 를 포함하는 열린 구간에서 연속인 함수 $f(x)$ 가
 $x = c$ 의 왼쪽과 오른쪽에서 각각 연속인 도함수를 가지는 것이 보장되고,
 $\lim_{x \rightarrow c-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow c+} f'(x) = \alpha$ (α 는 실수)이면,
 함수 $f(x)$ 는 $x = c$ 에서 미분가능한가?

만약 위의 질문에 대한 대답이 Yes라면, 앞선 글에서 도출한 결론에 의해 $f'(x)$ 는 $x = c$ 에서 연속이고 $f'(c) = \alpha$ 임을 알 수 있습니다.

다음과 같이 함수 $f(x)$ 를 정의합시다.

(a, c) , (c, b) 에서 각각 미분가능하고 도함수가 연속인 두 함수 $g(x)$ 와 $h(x)$ 에 대하여,

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (a < x < c) \\ h(x) & (c \leq x < b) \end{cases}$$

 이다. 이때 $f(x)$ 는 (a, b) 에서 연속이고,

$$\lim_{x \rightarrow c-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow c+} h'(x) = \alpha \quad (\alpha \text{는 실수})$$

 라고 가정하자.

우리가 보이고자 하는 것은,

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

의 값이 존재하고 두 값이 같다는 것입니다. 그런데 $x = c$ 의 왼쪽과 오른쪽에서 $f(x)$ 는 각각 $g(x)$, $h(x)$ 와 같으므로 위의 두 식은 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(c+h) - f(c)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h(c+h) - f(c)}{h}$$

그리고 함수 $g_1(x)$ 와 $h_1(x)$ 를 다음과 같이 정의합시다.

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) & (a < x < c) \\ \alpha(x - c) + f(c) & (c \leq x < a^*) \end{cases}$$

$$h_1(x) = \begin{cases} \alpha(x - c) + f(c) & (b^* < x \leq c) \\ h(x) & (c < x < b) \end{cases}$$

여기서 우리는 $g_1(x)$ 와 $h_1(x)$ 가 각각 구간 (a, a^*) 과 (b^*, b) 에서 미분가능하고 도함수가 연속인

것을 알 수 있습니다. $(g_1'(c))$ 와 $(h_1'(c))$ 는 미분계수의 정의를 써서 직접 계산해보면 됩니다. 계산은 생략하겠습니다)

$$g_1'(x) = \begin{cases} g'(x) & (a < x < c) \\ \alpha & (c \leq x < a^*) \end{cases}$$

$$h_1'(x) = \begin{cases} \alpha & (b^* < x \leq c) \\ h'(x) & (c < x < b) \end{cases}$$

이때

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g_1(c+h) - g_1(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_1(c+h) - g_1(c)}{h} = g_1'(c)$$

이고 $g_1'(x)$ 는 구간에서 연속이므로

$$g_1'(c) = \lim_{x \rightarrow c-} g_1'(x) = \lim_{x \rightarrow c-} g'(x) = \alpha$$

입니다. 따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \alpha$$

이고, 마찬가지로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \alpha$$

입니다.

그러므로 $f(x)$ 는 $x = c$ 에서 미분가능하고, 그 미분계수는 $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} f'(x) = \alpha$ 입니다.

즉, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있습니다.

$x = c$ 를 포함하는 열린 구간에서 연속인 함수 $f(x)$ 가
 $x = c$ 의 왼쪽과 오른쪽에서 각각 연속인 도함수를 가지는 것이 보장되고,
 $\lim_{x \rightarrow c-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow c+} f'(x) = \alpha$ (α 는 실수)이면,
 함수 $f(x)$ 는 $x = c$ 에서 미분가능하고 $f'(c) = \alpha$ 이다.

문제에서는 주로 $g(x)$ 와 $h(x)$ 가 구체적인 수식으로 주어질 텐데, 이 경우에 $g(x)$ 와 $h(x)$ 가 구간에서 연속인 도함수를 가지는지 판단하는 것은 쉽습니다. 그렇기 때문에 위의 결론을 적용시켜 $\lim_{x \rightarrow c-} g'(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow c+} h'(x)$ 의 값이 동일한 실수 값인지를 확인함으로써 $f(x)$ 가 $x = c$ 에서 미분가능함을 보이는 것은 논리적으로 하자가 없습니다.