

구간별로 정의된 함수의 미분가능성을 논할 때

미분계수의 정의를 써야 한다, 즉 도함수의 연속성을 가정할 수 없다

vs

도함수의 우극한, 좌극한만 보면 된다, 즉 도함수의 연속성을 가정하자

라는 논쟁이 있습니다.

그런데 이 논쟁이 고교 과정에서 사실상 실효성이 없다는 것을 보여주는 정리가 하나 있습니다.

다르부의 정리(Darboux's theorem)

구간 $[a, b]$ 에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(a) \neq f'(b)$ 이면,

$f'(a)$ 와 $f'(b)$ 사이의 임의의 실수 k 에 대하여 $f'(c) = k$ 인 $c \in (a, b)$ 가 존재한다.

증명 과정은 이해가 안 가면 그냥 넘기셔도 됩니다.

(일반성을 잃지 않고 $f'(a) < f'(b)$ 라고 합시다. 그 반대의 경우는 아래 보조 정리를 최솟값에 대한 것으로 수정하면 됩니다.)

본 명제를 증명하기 위해 보조정리 하나를 증명합시다.

보조정리

$[a, b]$ 에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여, 다음 명제가 성립한다.

1. $f'(a) > 0$ 이면, $f(a)$ 는 f 의 최댓값이 아니다.
2. $f'(b) < 0$ 이면, $f(b)$ 는 f 의 최댓값이 아니다.

(증명)

f 는 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이므로 최대 최소 정리에 의해 구간에서 최댓값을 가진다.

명제 1을 증명하는 것은 그 대우인

$f(a)$ 가 f 의 최댓값이라면 $f'(a) \leq 0$ 이다.

를 증명하는 것과 같다.

$f(a)$ 가 f 의 최댓값이라면, 모든 $x \in [a, b]$ 에 대하여 $f(a) \geq f(x)$ 이다. 따라서

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

에서, $x - a > 0$ 이고, $f(x) - f(a) \leq 0$ 이므로 $f'(a) \leq 0$ 이다.

명제 1의 대우가 참임을 증명했으므로 명제 1도 참이고, 비슷한 방법으로 명제 2도 참임을 보일 수 있다. (증명 끝)

이제 본 정리를 증명합시다.

(증명)

상수 $k \in (f'(a), f'(b))$ 에 대하여 $g(x) = kx - f(x)$ 라고 정의하자.

g 는 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이므로 최대 최소 정리에 의해 구간에서 최댓값을 가지고, 구간에서 미분가능하다.

이때

$$g'(a) = k - f'(a) > 0$$

이므로 보조정리의 명제 1에 의해 $g(a)$ 는 g 의 최댓값이 아니다. 마찬가지로

$$g'(b) = k - f'(b) < 0$$

이므로 보조정리의 명제 2에 의해 $g(b)$ 는 g 의 최솟값이 아니다.

따라서, $g(x)$ 가 최댓값을 가지는 점 c 는 열린 구간 (a, b) 에 존재한다. 그런데 미분가능한 함수가 열린 구간에서 최댓값을 가질 때 그 점에서의 미분계수는 0이므로

$$g'(c) = k - f'(c) = 0, \text{ 즉 } f'(c) = k$$

이다. 이것은 임의의 상수 $k \in (a, b)$ 에 대해 성립하는 것이므로 본 정리는 참이다. (증명 끝)

이상으로 다르부의 정리를 증명했습니다. 이게 도함수의 극한에 대한 논의와 무슨 관련이 있을까요? 다르부의 정리의 결론부를 자세히 보시기 바랍니다.

$f'(a)$ 와 $f'(b)$ 사이의 임의의 실수 k 에 대하여 $f'(c) = k$ 인 $c \in (a, b)$ 가 존재한다.

이거 어디서 많이 본 문장 아닌가요? 맞습니다. 사잇값 정리와 유사하죠. 다만 사잇값 정리는 닫힌 구간에서 연속인 f 에 대한 정리이고, 다르부의 정리는 닫힌 구간에서 정의된 f' 에 대한 정리라는 점에서 다릅니다.

[실제로 다르부의 정리에서 $f(x) = \int_{t_0}^x g(t)dt$ (단, g 는 구간에서 연속)으로 정의하면 사잇값 정리와 동일해집니다. 이런 의미에서 사잇값 정리는 다르부의 정리의 특수한 경우라고 할 수도 있습니다.]

편의를 위해

닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f'(a) \neq f'(b)$ 이면

$f'(a)$ 와 $f'(b)$ 사이의 임의의 실수 k 에 대하여 $f'(c) = k$ 인 $c \in (a, b)$ 가 존재한다.

를 “사잇값 성질”이라고 하고, 이를 만족하는 함수 f 에 대하여 “사잇값 성질을 만족한다.”라고 하겠습니다.

우리는 사잇값 정리에 의해 “모든 연속함수가 사잇값 성질을 만족한다.”라는 것을 알고 있고, 앞서 다르부의 정리를 증명함으로써 “구간에서 정의된 모든 도함수는 사잇값 성질을 만족한다.”는 것을 알게 되었습니다. 그렇다면,

구간에서 정의된 도함수는 모두 연속인가?

라는 질문을 던질 수 있습니다. 이에 대한 답은 No로 잘 알려져 있습니다.

대표적인 반례가 다음 함수입니다.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \end{cases}$$

실수 전체에서 도함수가 정의되지만, $x = 0$ 에서 도함수는 불연속입니다.

그런데 다르부의 정리는 “모든” 도함수에 대해 적용되는 정리입니다. 이는 곧

$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \end{cases}$ 의 도함수도 사잇값 성질을 만족한다는 것인데, 여기서 우리는

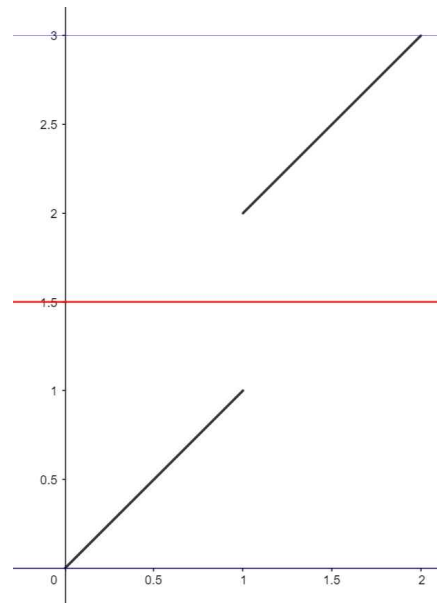
사잇값 성질을 만족하는 함수는 모두 연속함수이다.

라는 명제의 반례를 발견할 수 있습니다.

그렇다면 연속함수가 아닌 함수 중에서 사잇값 정리를 만족하지 않는 함수가 있느냐? 라는 물음

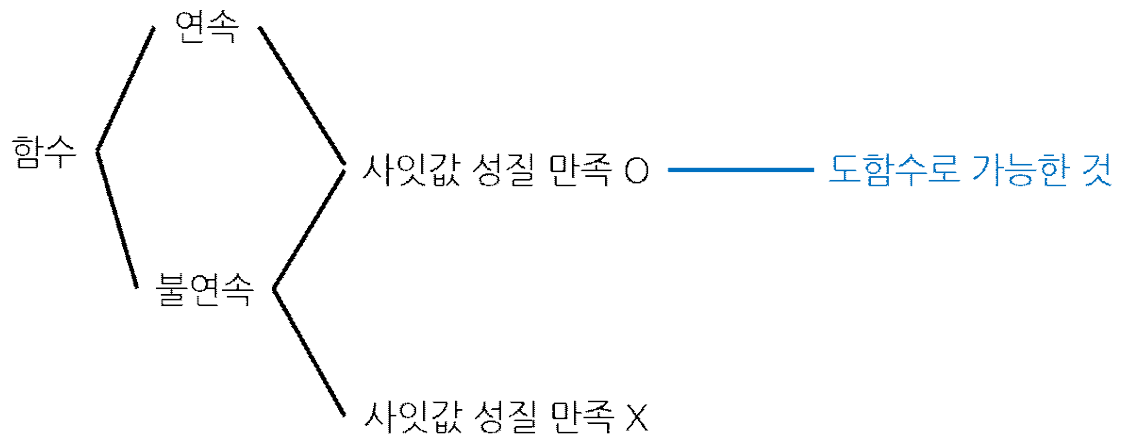
에 대해서 우리는 손쉽게 다음과 같은 함수를 제시할 수 있습니다.

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x < 1) \\ x+1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$



$f(0) = 0$ 과 $f(2) = 3$ 사이의 실수인 $k = 1.5$ 에 대하여 $f(c) = 1.5$ 인 $c \in (0, 2)$ 가 존재하지 않음을 확인할 수 있습니다.

지금까지의 논의에 의해, 우리는 구간에서 정의된 함수를 다음과 같이 분류할 수 있습니다.



이제 본래의 주제로 돌아가서, 구간별로 정의된 함수의 미분가능성을 생각해 봅시다. 먼저 함수 $f(x)$ 를 다음과 같이 정의합시다.

$$(a, c), (c, b) \text{에서 도함수가 존재하는 두 함수 } g(x) \text{와 } h(x) \text{에 대하여,}$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (a < x < c) \\ h(x) & (c \leq x < b) \end{cases}$$

이다. 이때

$$\lim_{x \rightarrow c^-} g'(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow c^+} h'(x) = \beta \quad (\alpha, \beta \text{는 실수})$$

라고 가정하자.

1)
 $f(x)$ 가 (a, b) 에서 미분가능하다고 가정합시다. $f'(x)$ 는 아주 작은 구간 $[a^*, c]$ ($a < a^* < c$)에서 정의될 수 있고, 이 구간에서 사잇값 성질을 만족해야 합니다.
 그런데 $\alpha \neq f'(c)$ 이면 α 와 $f'(c)$ 사이의 어떤 실수 k 에 대해 $f'(c^*) = k$ 인 $c^* \in (a^*, c)$ 가 존재하지 않습니다(이 부분은 직관적으로 이해하기 바랍니다). 따라서 $\alpha = f'(c)$ 이어야 합니다.
 또 아주 작은 구간 $[c, b^*]$ ($c < b^* < b$)을 잡으면 마찬가지로 방법으로 $f'(c) = \beta$ 입니다.
 따라서 $f(x)$ 가 (a, b) 에서 미분가능하면 $f'(c) = \alpha = \beta$, 즉 $f'(x)$ 는 $x = c$ 에서 연속입니다.

2)
 1)을 변형해서, $\alpha \neq \beta$ 이면 $f'(c)$ 를 어떻게 잡더라도 c 를 포함하는 아주 작은 구간 $[a^*, b^*]$ 에서 f' 가 사잇값 성질을 만족할 수 없습니다.
 따라서 $\alpha \neq \beta$ 이면 $f(x)$ 는 $x = c$ 에서 미분불가능합니다.

위의 논의에 의해 우리는 다음과 같이 말할 수 있습니다.

$$\text{함수 } f(x) \text{가 } x = c \text{의 왼쪽과 오른쪽에서 각각 미분가능함이 보장되고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) \text{와 } \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) \text{의 값이 각각 어떤 실수 값으로 존재하면}$$

“ $f(x)$ 가 $x = c$ 에서 미분가능하면 $f'(x)$ 는 $x = c$ 에서 연속이다.”

“ $\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$ 이면 $f(x)$ 는 $x = c$ 에서 미분불가능하다.”

가 성립한다.

그런데 생각해 보면 실제로 수능 수준에서 나올 만한 미분가능한 함수들(다항, 지수, 로그, 삼각)은 대부분 $\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$ 이 값이 존재하는 것이 명백한 함수들입니다. 그래서 대부분의 경우에 문제에서 미분가능하다고 주어졌으면 도함수의 연속성이 주어졌다고 생각하고 풀어도 무방합니다.

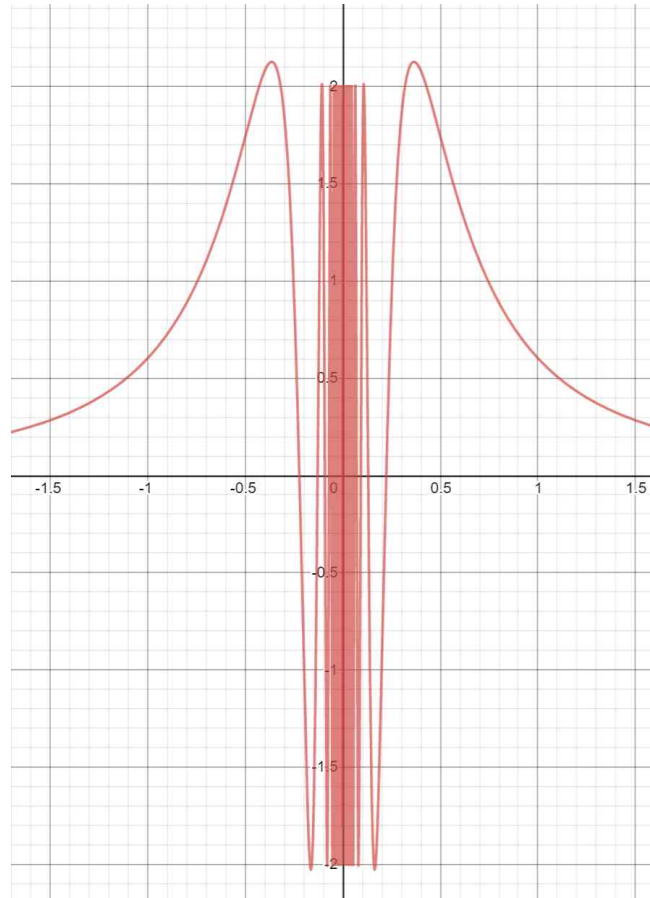
다만 그렇지 않은 경우가 있다는 걸 알고는 있어야죠. 아까 말한

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \end{cases}$$

이라는 함수가 그렇습니다. 이 함수는 어떻길래 도함수가 불연속임에도 사잇값 성질을 만족하는 것일까요? $f'(x)$ 를 직접 계산해보면 다음과 같습니다.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ 2x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x} & (x \neq 0) \end{cases}$$

그리고 그 그래프는 다음과 같습니다.



보시는 것과 같이 $x \rightarrow 0$ 일 때 $f'(x)$ 가 0 근처에서 계속 진동하는 것을 볼 수 있습니다. $x = 0$ 을 포함하는 닫힌 구간 $[a^*, b^*]$ 을 잡았을 때, $f'(a^*)$ 과 $f'(b^*)$ 사이의 임의의 실수 k 에 대하여 $f'(c^*) = k$ 인 $c^* \in (a^*, b^*)$ 가 반드시 존재하는 것이죠.

이처럼 $f'(x)$ 의 $x = c$ 에서 극한값이 존재하지 않을 때, 그 존재하지 않는 원인이 진동이라면 $f(x)$ 가 $x = c$ 에서 미분가능할 수도 있습니다. 한편 $f'(x)$ 의 $x = c$ 에서 좌극한과 우극한 중 하나 이상이 $\pm \infty$ 로 발산한다면 $f'(c)$ 의 값은 절대 존재할 수 없습니다.

다만 어디까지나 이 내용은 대단히 예외적인 내용이고, 앞서 말했듯이 수능 수준에서 나오는 미분가능한 함수는 대부분 도함수의 좌극한과 우극한 값이 각각 존재하는 형태이므로 도함수의 연속성을 가정해도 무방합니다.