심층 문제 모음 ver0.1

강사 약력
KMO 금상, 서울시 수학경시대회 금상, 민사고 수학경시대회 금상
서울과학고등학교 졸업
서울대 수리과학부 수석 졸업
심층면접, 수리논술 관련해 고2, 고3 학생들 첨삭 및 강의 다수 경험
연락처 010-육이칠일-1949

두 수열 $(a_n),(b_n)$이 주어졌다고 하자. 이제 여러분들이 잘 알고 있는 로피탈의 정리를 수열의 경우에 살펴보자. (참고 : 수열에서의 샌드위치 정리)

(1) $a_n \to 0, b_n \to 0$임을 가정하자. 또한 (b_n)은 감소하는 수열이고, 충분히 큰 n에 대해 다음의 극한값이 존재한다고 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$.

이 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$이 존재함을 보이고 그 값이 l임을 보여라.
또한, (b_n)이 감소하는 수열이 아닐 때, 반례를 찾아보아라.

(2) 이제 함수에서의 로피탈의 정리와 마찬가지로 $a_n \to \infty, b_n \to \infty$ 인 경우를 생각해보자. (1)에서 알 수 있듯이, 수열에서의 로피탈의 정리는 일정한 조건 하에서만 성립한다. (1)의 증명을 참고해 이 경우에 (1)과 같은 정리를 만들고 증명하라.

다음의 다양한 극한 값을 구해보자.

(1) $A_1,\cdots,A_k$ 이 모두 음이 아닌 수라 하자. 이때 다음을 구하라.

$$\lim_{n\to\infty}(A_1^n + \cdots + A_k^n)^{1/n}$$

(2) (1)의 조건이 달라질 경우 주어진 극한값이 존재하지 않을 수 있는 예를 들어라.

(3) $\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n}$

(4) $\lim_{n\to\infty}((n!)^{1/n})/n$

다음 문제는 유전학과 생물학에서 자주 쓰이는 로지스틱 식(normalized logistic equation)에 관한 내용이다. 가장 간단한 경우 로지스틱 식은 시간의 변화에 따른 생물체의 인구수에 관한 근사값을 제공한다. 다음의 점화식에서 a_n은 n년째 인구수를 나타낸다. (이때, 적당한 상수를 곱해 a_n이 0과 1 사이의 값을 갖게 한다.)

문제) 수열 a_n이 다음을 만족한다.

(1) $a_1 \in (0,1)$

(2) 모든 n에 대해 $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$

이때 다음을 보여라.

1. (2)의 점화식을 위의 제시문에 따라 해석해 보아라.
2. $\lim_{n\to\infty} na_n = 1$임을 보이고 제시문에 따라 해석해 보아라.
3. $\lim_{n\to\infty} n(1-na_n)/\ln n = 1$임을 보이고 제시문에 따라 해석해 보아라. (힌트 : $b_n = 1/a_n$)

다음의 문제는 천체물리학에 나오는(물리 2 참고) 케플러의 제 2 법칙과 관련된 문제이다. 케플러 제 2법칙이란 행성과 태양을 잇는 선은 같은 시간동안 같은 넓이의 자취를 갖는다는 내용이다.

문제) $0<\epsilon<1$와 실수 a가 주어져 있다. 이때, 다음의 케플러 식을 생각하자. $x-\epsilon\sin x=a$. 이제 수열을 이용해 이 식의 해를 구해보자.

(1) 이 문제를 풀기 위해서는 다음의 정리를 이용해야 한다.
코시의 정리 : (a_n)이 실수 수열일 때, $\lim_{m,n\to\infty}|a_m-a_n|=0$ 을 만족한다면, (a_n)은 수렴한다. 이는 다른 방식으로 쓰며, 임의의 실수 $\epsilon>0$에 대해, 다음을 만족하는 자연수 N_ϵ이 존재한다, $m,n\geq N_\epsilon$이면 $|a_m-a_n|<\epsilon$이다.

이제 다음과 같이 수열 (x_n)을 정의하자. $x_0=a, x_n=a+\epsilon\sin x_{n-1}$. 이때, (x_n)이 유한한 값들만을 가짐을 보이고, 위의 정리를 이용해서 수렴하는 수열임을 보여라.

(2) 위에서 구한 극한값이 케플러 식의 유일한 해임을 보여라.

이번 문제에서는 정수 계수 다항식의 특이한 성질에 대해 알아보자. $f(x)$를 주어진 정수 계수 다항식이라 하고, 이를 이용하여 다음의 수열을 정의하자.

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = f(a_n)$$

(1) $a_1 = 0$ 일 조건을 구해 보라.

(2) $a_2 = 0$ 일 조건을 구해 보라.

a_1, a_2는 주어진 수열을 초기항들에 불과하지만, $f(x)$가 정수 계수 다항식이라는 것 때문에, 주어진 수열에 많은 제한 조건을 준다. 다음 문제를 통해 이런 현상을 살펴보자.

(3) m, n이 정수일 때, $f(m) - f(n)$이 $m - n$의 배수임을 보여라.

(4) $m \geq 1$에 대해 $a_m = 0$이라면 $a_1 = 0$ 이거나 $a_2 = 0$임을 보여라.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$의 급수는 과거부터 수학자들의 많은 관심을 받아왔다. 많은 수학자들이 이 급수의 수렴, 발산성에 대해 궁금해 했고, 수렴할 경우 그 값을 구하고 싶어 했다. 우리는 특별히 $k=1,2$인 경우에 대해 알아보자.

(1) $k=1$인 경우 급수가 발산함을 보여라.
(2) $k=2$인 경우 급수가 수렴함을 보여라.

이제 $k=2$인 경우 수렴값을 정확히 구해보자.

(3) $\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi+x}{2}}\right]$임을 보여라.

(4) $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하고 (3)을 반복적으로 적용해,

$$1=\frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}$$

임을 보여라.
(5) (4)의 결과에서 극한을 적용해 $k=2$일 때 극한값을 구하라.

다음은 매우 잘 알려진 예이지만, 함수의 극한에 대한 직관을 부수는 대표적인 문제이므로 한 번 확인해보도록 하자.

다음과 같이 함수 $f(x)$를 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 가 유리수} \\ 0 & x \text{ 가 무리수} \end{cases}$$

이 함수 $f(x)$는 어느 점에서도 극한을 갖지 않음을 보여라.

실수에서 정의된 함수 $f(x)$에 대해 다음을 보여라. (단, k는 1보다 큰 자연수이다.)

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^k}=a$이고, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^{k-1}}=b$라면 $b=ka$이다.

두 주기함수 f,g가 다음을 만족한다.

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$$

이때 다음을 보여라.

(1) f,g는 같은 주기를 가짐을 보여라.

(2) f,g가 같음을 보여라.

(3) 위의 결과를 해석해 보고 이 정리가 응용될 수 있는 상황을 제시해 보아라.

(1) $x>0$일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$$

(2) (1)의 결과를 이용하여 다음의 극한값을 구하라

$a_n=(1+\frac{p}{n^2})(1+\frac{2p}{n^2})\cdots(1+\frac{np}{n^2})$, $\lim_{n\to\infty}a_n=?$

xy평면상의 포물선 $C: y=\frac{1}{2}x^2$위에 동점 $P(t, \frac{t^2}{2})$ $(t \geq 0)$가 있다. 포물선 C의 초점을 F라 하고, 점P 에서 접선을 l, 접선 l과 y축의 교점을 Q, 원점을 O라 하자.

(1) 선분 FP의 길이를 t를 이용하여 표현하라.

(2) 선분 FQ와 선분 PQ의 사이각을 θ라 하자. $\cos\theta, \sin\theta$를 구하라.

(3) $\int_0^t \sqrt{1+x^2}\,dx$를 구하라.(힌트: $\sqrt{1+x^2}=u-x$로 치환하라.)

(1) 좌표평면 상의 구간 $[a,b]$에서 정의된 직선 $f(x)$가 있을 때, 이것의 길이를 평균값의 정리를 활용해 나타내라.

(2) 구간 $[a,b]$에서 정의 된 곡선 $f(x)$의 길이는 다음과 같이 근사시킬 수 있다.

$$L \approx \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

평균값의 정리를 활용해 위 식을 유도하라.

(3) 좌표평면상에 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}-1$인 곡선과 반지름 $\dfrac{3}{8\pi}$인 원이 원점에서 접하도록 위치해 있다. 원위의 점 P가 현재 원점에 있고, 원이 곡선과 접하면서 오른쪽으로 미끄러짐 없이 굴러 올러간다. P가 다시 곡선과 최초로 만났을 때의 원의 중심의 좌표를 구하라.

함수 $f(x)$가 $[a,b]$에서 연속이고, 음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 $\int_a^b x^n f(x)dx=0$일 때, $f(x)=0$임이 알려져 있다.

(1) 함수 $f(x)$가 $[-a,a]$에서 연속이고 $a>0$일 때, 다음을 증명하라

1. 음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 $\int_{-a}^{a} x^{2n} f(x)dx=0$이면 $f(x)$는 기함수이다.
2. 음이 아닌 모든 정수 n에 대하여 $\int_{-a}^{a} x^{2n+1} f(x)dx=0$이면 $f(x)$는 우함수이다.

(2) 함수 $f(x)$가 실수 전체에서 연속일 때, 다음을 증명하여라.

1. 임의의 실수 x에 대하여 $\int_{-x}^{x} f(t)dt=0$이면 $f(x)$는 기함수이다.
2. 임의의 실수 x에 대하여 $\int_{-x}^{x} f(t)dt=2\int_0^x f(t)dt$이면 $f(x)$는 우함수이다.

$(M_a f)(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt$라 정의 하자. 이제 이 함수에 대해 다음 물음에 답하라.

(1) $(M_a f)(x)$의 도함수를 구하라.

(2) $u(x) = \begin{cases} 0, \ x > 1, \ x < -1 \\ \frac{1}{2}, -1 \le x \le 1 \end{cases}$ 일 때, $(M_{\frac{1}{2}} u)(x)$의 그래프를 그려라.

(3) $(M_{\frac{1}{4}}(M_{\frac{1}{2}} u))(x)$의 그래프를 설명하라.

(4) $f(x) > 0, \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) < \infty$ 일 때, $Mf(x) = \max\{(M_a f)(x) \mid |a| \le 1\}$라 정의하자.

임의의 $\alpha > 0$에 대해 다음을 만족하는 c가 존재함을 보여라.

$$|\{x | Mf(x) > \alpha\}| \le \frac{c}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f$$

수열 (a_n)을 $a_1=1, a_2=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}, a_3=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}}, \cdots$ 라 정의하자. 그리고 a_n을 기약분수 $\dfrac{p_n}{q_n}$으로 표현하자.

(1) p_{n+1}, q_{n+1}을 p_n, q_n으로 표현하라.

(2) 수열 (a_n)이 수렴함을 보이고, 극한값을 구하라.

(1) 양수 t,s가 $t \geq s \geq \dfrac{t}{2}$를 만족할 때, $y=sx$를 $y=tx$에 대칭시킨 직선의 기울기를 구하라.

(2) 곡선 $y=x^2$위의 점 $P(a,a^2)$에서 출발한 빛이 $Q(b,b^2)$에서 반사되었을 때, $y=x^2$과 처음으로 다시 만나는 점의 x 좌표를 구하라.

(3) $a_0=(0,0)$에서 출발하여 기울기 $l>0$로 진행하는 빛이 $y=x^2$과 다시 만나는 점의 x좌표를 차례로 $a_1,a_2,\cdots$라 하자. 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}$이 수렴함을 보여라. (힌트:$b_n=a_{n+1}-a_n$)

$a_n > 0$인 감소수열 (a_n)이 있다.

(1)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$임을 보여라.
2. 수열 (a_n)이 감소한다는 조건이 없을 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$인 예를 들어라.

(2) 양의 실수에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 감소함수이고, $f(x) \geq 0$이다. $a_n = f(n)$이라 할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$와 $\int_1^{\infty} f(x)dx$는 동시에 수렴 또는 발산함을 보여라.

(3) (2)를 이용해 다음 급수의 수렴성을 밝혀라.$(\alpha > 0)$

1. $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$
2. $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)}$

단위원 $x^2+y^2=1$위를 점 $A(1,0)$에서 출발하여 시계 반대 방향으로 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표를 $(x(t),y(t))$라고 하자. 타원 $x^2+ky^2=1(k>1)$ 은 두 점 $(1,0),(-1,0)$에서 단위원에 접한다. 점 P에서 x축으로 내린 수선이 타원가 처음으로 만나는 점을 Q라고 하자. 점 P와 원점 O를 이은 선분이 타원과 만나는 점을 R이라고 하자. 선분 OA와 선분 OP가 이루는 각을 θ, 선분 OA와 선분 OQ가 이루는 각을 α라고 하자. $\overline{PQ},\overline{PR}$과 타원의 호 RQ로 둘러싸인 도형 PQR의 넓이를 $f(t)$, $\overline{OQ},\overline{OR}$과 타원의 호 RQ로 둘러싸인 도형 OQR의 넓이를 $g(t)$라 하자.

(1) 위의 상황을 그림으로 그려보라.

(2) 점 $P(x(t),y(t))$가 단위원 위의 점 $A(1,0)$에서 출발하여 반시계 방향으로 일정한 속력으로 돌고 있다. $\overline{OA},\overline{OQ}$와 타원의 호 AQ로 둘러싸인 도형 OAQ의 넓이를 $S(t)$라고 하자. $\dfrac{dS}{dt}$가 상수임을 설명하라.

(3) 각 α의 시간에 대한 변화율 $\dfrac{d\alpha}{dt}$와 각 θ의 시간에 대한 변화율 $\dfrac{d\theta}{dt}$가 같아지는 θ가 구간 $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$에서 적어도 하나는 존재함을 보여라. 또, 이때 α와 θ사이의 관계식을 구하시오.

(4) 극한값 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{\frac{\pi}{2}-\alpha}$를 구하라.

(5) 극한값 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{f}{g}$를 구하라.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

(1) $x>0$일 때, 임의의 자연수 n에 대하여 부등식 $e^x > \dfrac{x^n}{n!}$임을 보여라.

(2) 극한값 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$를 구하라.

(3) $f(x)$의 극값을 구하라.

다음의 다항식의 수열을 정의하자

$$H_0(x) = 1,\ H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\ \ (n = 1, 2, \cdots).$$

(1) $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H_n(x)'$을 계산하라.

(2) $H_n(x)$가 미분방정식 $y^n - 2xy' + 2ny = 0$의 해임을 보여라.

앞으로 세문제는 중간값 정리에 관한 문제이다.

(1) m,n이 자연수이고 $a<b$이면 함수 $f(x)=(x-a)^n(x-b)^n$에 대하여 $f'(c)=0$인 c가 구간 (a,b)에 존재함을 설명하라.

(2) $\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n=0$는 -1과 1 사이에서 n개의 실근을 가짐을 설명하라.

(1) $f(x), g(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고 미분가능하다. $f(a)=f(b)=0$, $g(x)>0$일 때, $f(c)g'(c)-f'(c)g(c)=0$을 만족하는 $a<c<b$인 c가 존재함을 보여라.

(2) $f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고 미분가능하다. $f(a)=f(b)=0$일 때, 임의의 실수 k에 대하여 $f'(c)=kf(c)$를 만족하는 $a<c<b$인 c가 존재함을 보여라.

(3) 실계수 다항식 $f(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)-xf(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수 보다 많음을 보여라.

$f(x)$가 폐구간 $[a,b]$에서 연속이고 개구간 (a,b)에서 무한번 미분가능하다. 이 때, 다음 식을 만족하는 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재함을 보여라.

(1) $f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$

(2) $f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\dfrac{(b-a)^2}{2!}f''(c)$

(3) $f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\dfrac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\dfrac{(b-a)^3}{3!}f'''(c)$

(4) $f''(a)\neq 0$이고, $f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$, $0<\theta<1$을 만족하는 θ에 대해 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$ 임을 보여라.