* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 21번.

$f(x) = x^4 + ax^2 + b \rightarrow f(x) = f(-x)$: y축 대칭.

$(x \geq 0)$, $g(x) = \int_{-x}^{2x} \{f(t) - |f(t)|\} dt \longrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 & (f(t) \geq 0) \\ g(x) = \int_{-x}^{2x} 2f(t) dt & (f(t) < 0) \end{cases}$

(가) $0 < x < 1$ 에서 $g(x) = C_1$ (상수함수)

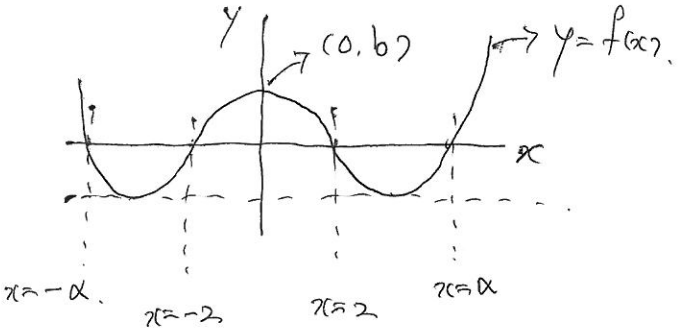
∴ 적분 시작인 0부터 상수함수가 되려면 피적분함수가 0인 상수함수이므로

$[-1, 2]$ $f(x) \geq 0 \rightarrow [-2, 2]$ $f(x) \geq 0$ (∵ y축 대칭)

(나) $1 < x < 5$, $g(x)$는 감소 $\rightarrow \int_{-1}^{2}$ 구간보다 확장되면 결과값은 음수 (∵ (가))

∴ $f(2) = 0$, $\lim_{x \to 2+} f(x) = 0(-)$, $\lim_{x \to 2-} f(x) = 0(+)$.

$f(x)$의 개형은 다음과 같다.



→ $5 \leq \alpha \leq 10 \rightarrow \alpha = 5$ ((다)조건 적용 후)

(∵ $\int_{-5}^{10}$ 계산값이 $\int_{-1}^{2}$ 부터 계속 음수가

나와야 $g(x)$ 가 감소함수가 된다.

(i) $\alpha = 5$일 때 $\int_{-5}^{10} = \int_{-5}^{-2} + \int_{-2}^{2} + \int_{2}^{5} + \int_{5}^{10} = \int_{-5}^{-2} + \int_{2}^{5}$

(ii) $\alpha > 5$일 때 $\int_{-\alpha}^{2\alpha} = \int_{-\alpha}^{-2} + \int_{-2}^{2} + \int_{2}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{2\alpha} = \int_{-\alpha}^{-2} + \int_{2}^{\alpha}$

(다) $x > 5$, $g(x) = C_2$ (상수함수)

→ $x > 5$ 에서 기존에 대해서 ($\int_{-5}^{10}$) 그 바깥구간의 적분을 통해 추가되는

부분은 모두 0이라는 의미.

∴ $\alpha = 5$. (∵ $\alpha > 5$ 이라면 $\int_{-5}^{10}$ 에 대해서 $\int_{-\alpha}^{-5}$ 부분의 음수가 추가되므로

$g(x)$는 여전히 감소, 상수함수가 아니다).

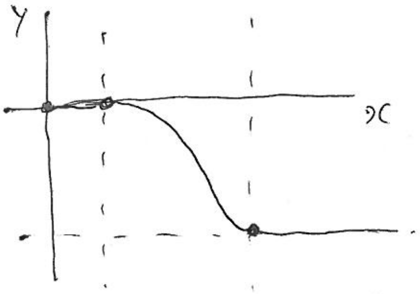
$\therefore \alpha = 5.$ 따라서 $f(x) = (x-2)(x+2)(x-5)(x+5)$

$$= (x^2-4)(x^2-25)$$

$$= x^4 - 29x^2 + 100. \quad \therefore a = -29, \ b = 100.$$

$$f(\sqrt{2}) = ((\sqrt{2})^2-4)((\sqrt{2})^2-25) = (-2)\times(-23) = 46$$

$\rightarrow$ $g(x)$의 개형은 다음과 같다.



$y = g(x).$