2021
매쓰메딕
수1 교육청 기출 모음 (369 문항)

Part.2

MATHMEDIC

4.

등차수열과 등비수열

교육청 149문항

1번

자연수 n, x, y에 대하여 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}(x \leq y)$과 같이 $\frac{1}{n}$을 두 분수의 합으로 나타낼 수 있는 방법의 수를 a_n이라 하자. 예를 들어,

$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ 이므로 $a_1=1$,
$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ 이므로 $a_2=2$,
$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$이므로 $a_3=2$ 이다.

다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

> 자연수 n, x, y에 대하여 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}(x \leq y)$라 하면
> $xy=n(x+y)$이다.
> 따라서 $(x-n)(y-n)n^2 \quad \cdots\cdots (*)$
> 이므로 $x-n$과 $y-n$은 n^2의 약수이다.
> $d(n)$을 n의 양의 약수의 개수라 하고, 방정식 $(*)$의 해의 개수를 구하면
> i) $x=y$인 경우,
> $x=y=\boxed{(가)}$ 이므로 1개이다.
> ii) $x<y$인 경우,
> $x=y=\boxed{(가)}$이 제외되므로 $\frac{\boxed{(나)}}{2}$개이다.
> 그러므로 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}(x \leq y)$로 표시할 수 있는 방법의 수는 $\boxed{(다)}$개이다.
> 따라서 구하는 수열의 일반항 $a_n=\boxed{(다)}$이다.

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?

① (가) : n (나) : $d(n^2)$ (다) : $\frac{d(n^2)+1}{2}$

② (가) : n (나) : $d(n^2)-1$ (다) : $\frac{d(n^2)}{2}+1$

③ (가) : $2n$ (나) : $d(n^2)-1$ (다) : $\frac{d(n^2)+1}{2}$

④ (가) : $2n$ (나) : $d(n^2)-1$ (다) : $\frac{d(n^2)}{2}+1$

⑤ (가) : $2n$ (나) : $d(n^2)$ (다) : $\frac{d(n^2)}{2}+1$

100414나 # 5847

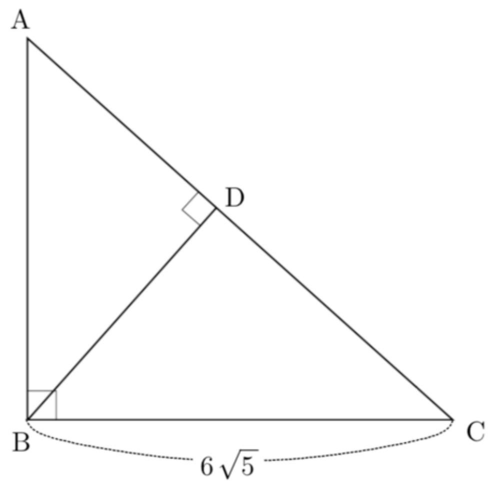
2번

자연수 n에 대하여 n^2을 6으로 나눈 나머지를 a_n이라 할 때, $a_n=4$를 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오.

100321나 # 5804

3번

그림과 같이 $\angle B=90^\circ$이고 선분 BC의 길이가 $6\sqrt{5}$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 B에서 빗변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 세 선분 AD, CD, AB의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 선분 AC의 길이를 구하시오.



110425가 외 1회 # 5644

4번

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_3=-2, a_9=46$일 때,
$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{10}|$의 값을 구하시오.

080422나 # 6235

5번

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 각 항이 0이 아닌 실수일 때, 방정식 $a_{n+2}x^2+2a_{n+1}x+a_n=0$의 한 근을 b_n이라 하면 등차수열 $\left\{\dfrac{b_n}{b_n+1}\right\}$의 공차는? (단, $b_n \neq -1$)

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{8}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

100410나 # 5844

6번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=-1, a_1+2a_3=0$일 때, a_{10}의 값은?

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

090704나 # 6085

7번

직각삼각형의 세 변의 길이 a, b, c가 공차가 d인 등차수열을 이룬다고 한다. 이 때, 이 직각삼각형의 넓이를 d의 식으로 나타내면?

① $4d^2$ ② $6d^2$ ③ $8d^2$ ④ $10d^2$ ⑤ $12d^2$

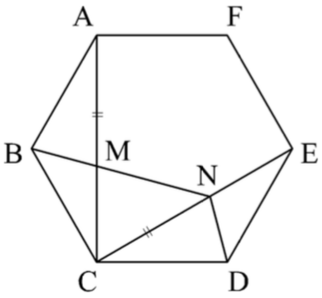
060326나 # 7342

8번

그림과 같이 정육각형 ABCDEF의 두 대각선 AC,CE 위에 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{CN}}$이 되도록 각각 M,N을 잡는다. 다음은 세 점 B,M,N이 일직선 위에 있으면 세 각

$$\angle\mathrm{BNC},\quad \angle\mathrm{CND},\quad \angle\mathrm{DNE}$$

의 크기는 이 순서로 등차수열을 이룸을 증명한 것이다.



<증명>
$\overline{\mathrm{CM}}=\boxed{\text{(가)}}$, $\angle\mathrm{BCM}=\angle\mathrm{DEN}=30^\circ$ 이므로
$\triangle\mathrm{BCM}\equiv\triangle\mathrm{DEN}$ $\therefore \angle\mathrm{CBM}=\angle\mathrm{EDN}$
$\angle\mathrm{BND}=\angle\mathrm{BNC}+\angle\mathrm{CND}$
$\qquad=(\angle\mathrm{BCN}-\angle\mathrm{CBM})+(\angle\mathrm{CED}+\angle\mathrm{EDN})$
$\qquad=\boxed{\text{(나)}}$
따라서 점 N은 점 C를 중심으로 하고 $\overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{CD}}$를 반지름으로 하는 원 위에 있다.
$\therefore \overline{\mathrm{CB}}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CN}}$
$\therefore \angle\mathrm{BNC}=\boxed{}$, $\angle\mathrm{CND}=\boxed{}$, $\angle\mathrm{DNE}=\boxed{}$
그러므로, 세 각 $\angle\mathrm{BNC}$, $\angle\mathrm{CND}$, $\angle\mathrm{DNE}$의 크기는
이 순서로 공차가 $\boxed{\text{(다)}}$인 등차수열을 이룬다.

위의 증명과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열하면 ?

① $\overline{\mathrm{EN}}, 135^\circ, 25^\circ$
② $\overline{\mathrm{MN}}, 135^\circ, 30^\circ$
③ $\overline{\mathrm{EN}}, 120^\circ, 25^\circ$
④ $\overline{\mathrm{EN}}, 120^\circ, 30^\circ$
⑤ $\overline{\mathrm{MN}}, 120^\circ, 35^\circ$

050316가 외 1회 # 6992

9번

공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_9=2a_3$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{24}\frac{(a_{n+1}-a_n)^2}{a_n a_{n+1}}$의 값은?

① $\frac{3}{14}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

200714나 # 9769

10번

첫째항이 a 이고 공차가 -4 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여 $S_n<200$ 일 때, 자연수 a 의 최댓값을 구하시오.

150328가 # 3711

11번

첫째항이 1 이고 공차가 6 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$
$$T_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$$

이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{2n}T_{2n}}{S_{2n}}$ 의 값을 구하시오.

150327나 # 3010

12번

공차가 $d_1(d_1 \neq 0)$인 등차수열 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \cdots$에 대하여 두 수열

$$a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, a_7 + a_8, \cdots$$
$$a_1 + a_2 + a_3, a_4 + a_5 + a_6, a_7 + a_8 + a_9, \cdots$$

의 공차를 각각 d_2, d_3라고 할 때, 다음 중 옳을 것을 고르시오.

① $2d_2 = 3d_3$ ② $3d_2 = 2d_3$ ③ $5d_2 = 2d_3$
④ $7d_2 = 3d_3$ ⑤ $9d_2 = 4d_3$

060328나 # 7343

13번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 5$ 이고 $a_6 + a_7 = 24$ 일 때, a_{20} 의 값을 구하시오.

150722가 # 3125

14번

세 실수 a , b , c 가 이 순서대로 등차수열을 이루고 다음 조건을 만족시킬 때, abc 의 값을 구하시오.

(가) $\dfrac{2^a \times 2^c}{2^b} = 32$
(나) $a + c + ca = 26$

170426나 # 2619

15번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 = 26,\ a_9 = 8$$

일 때, 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 최대가 되도록 하는 자연수 n 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

160309가 # 2812

16번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 + a_4 + a_6 = 30$ 일 때, $a_1 + a_7$의 값을 구하시오.

111019나 # 5757

17번

첫째항이 a이고 공차가 $a+1$인 등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 = 15$$

를 만족시킬 때, a_7의 값을 구하시오.

121023가 외 1회 # 5546

18번

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_9 = |S_3| = 27$일 때, a_{10}의 값은?

① 23 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 27

200414나 # 9094

19번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 3$, $a_5 = a_3 + 4$ 일 때, $a_n > 100$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은?

① 46 ② 47 ③ 48 ④ 49 ⑤ 50

140405나 # 3258

20번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$가 성립할 때, $a_1 : a_4$는 ? (단, $a_1 \neq 0$이다.)

① $1 : 2$ ② $1 : 3$ ③ $2 : 3$
④ $2 : 5$ ⑤ $3 : 5$

070306가 외 1회 # 6344

21번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_4 = 9$, $a_7 = 21$ 일 때, $a_3 + a_8$ 의 값은?

① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

160306나 # 2779

22번

첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 + a_4 = 2(a_5 - 4)$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하시오.

100319나 # 5802

23번

첫째항이 $a(a \neq 0)$이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 임의의 자연수 m, n에 대하여

$$a_m + a_n = a_{m+n}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 나타내는 것은?

① $25a$ ② $35a$ ③ $45a$ ④ $55a$ ⑤ $65a$

091027나 # 6146

24번

등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 + a_2 + a_3 = 159$

(나) $a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = 96$ 인 자연수 m에 대하여

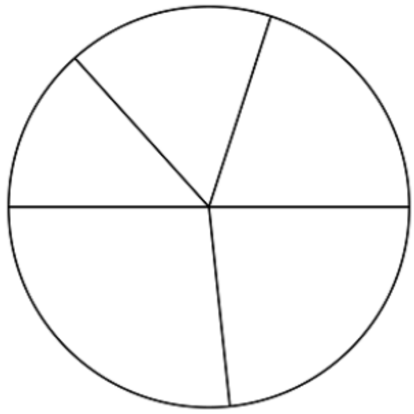
$\sum_{k=1}^{m} a_k = 425$ (단, $m > 3$)

a_{11}의 값을 구하시오.

190428나 # 4427

25번

그림과 같이 반지름의 길이가 15인 원을 5개의 부채꼴로 나누었더니 부채꼴의 넓이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루었다. 가장 큰 부채꼴의 넓이가 가장 작은 부채꼴의 넓이의 2배 일 때, 가장 큰 부채꼴의 넓이는 $k\pi$이다. 이때 k의 값을 구하시오.



090325나 # 5997

26번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 + a_5 = 36$이고, $a_2 a_4 = 180$일 때, $a_n < 100$을 만족시키는 n이 최댓값을 구하시오.

081019나 # 6330

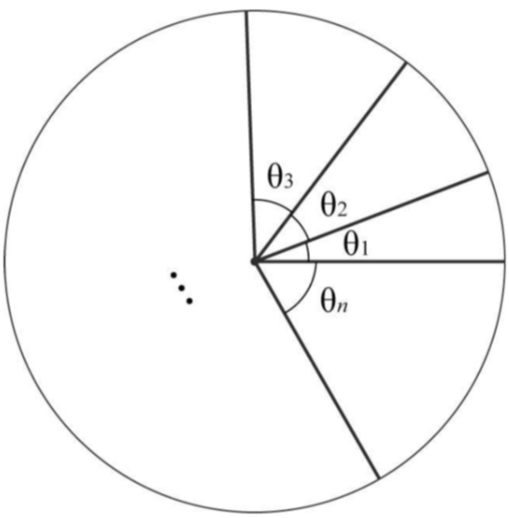
27번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 + a_4 = 54,\ a_{12} + a_{14} = 254$ 일 때, a_{14} 의 값을 구하시오.

161025나 # 2948

28번

넓이가 A인 원을 중심각이 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_n$인 n개의 부채꼴로 나누고 중심각이 $\theta_k(k=1, 2, \cdots, n)$인 부채꼴의 넓이를 A_k이라 하자. 수열 $\{\theta_n\}$이 등차수열을 이루고, $\sum_{k=1}^{n}\theta_k = 2\pi$이다.
$A_1 + A_n = \frac{1}{5}A$일 때, n의 값은?



① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

100707나 # 5895

29번

첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n = ka_n$을 만족하는 k가 두 자리 자연수가 되게 하는 n의 최댓값은? (단, $a_1 \neq 0$)

① 191 ② 193 ③ 195
④ 197 ⑤ 199

110706나 # 5700

30번

다음과 같이 4와 109사이에 k개의 수를 넣어 항의 개수가 $k+2$인 등차수열을 만들려고 한다. 만들 수 있는 등차수열 중 공차가 1이 아닌 최소의 자연수일 때, k의 값은?

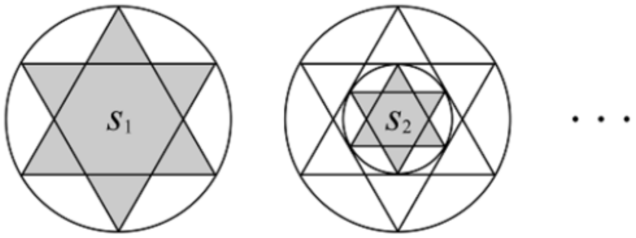
$$4,\ \overbrace{\square,\ \square,\ \cdots,\ \square}^{k\text{개}},\ 109$$

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

050428나 # 7100

31번

반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$인 원이 있다. 그림과 같이 이 원에 내접하는 두 정삼각형이 겹쳐지는 부분이 정육각형이 되도록  모양의 도형 S_1(어두운 부분)을 그린다. 또, S_1의 정육각형에 내접하는 원을 그리고, 이 원에 내접하는 두 정삼각형이 겹쳐지는 부분이 정육각형이 되도록  모양의 도형 S_2(어두운 부분)를 그린다.
이와 같은 방법으로  모양의 도형 $S_3, S_4, \cdots, S_{10}$을 그릴 때, 도형 S_{10}의 넓이는?

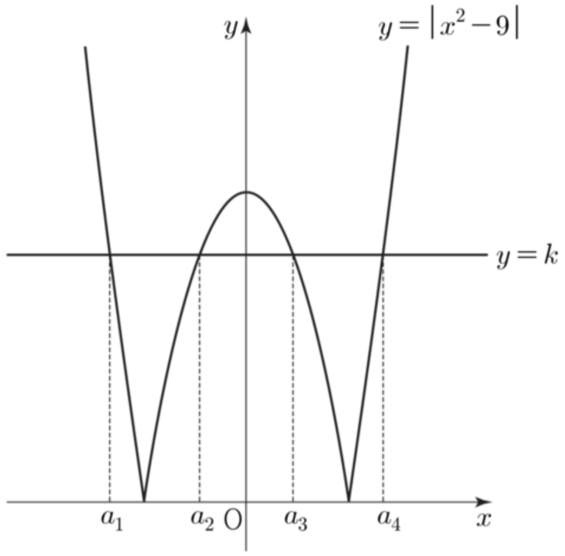


① $\frac{\sqrt{3}}{2^{15}}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2^{16}}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{2^{15}}$
④ $\frac{3\sqrt{3}}{2^{16}}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{2^{16}}$

090317나 # 5994

32번

그림과 같이 함수 $y = |x^2 - 9|$ 의 그래프가 직선 $y = k$ 와 서로 다른 네 점에서 만날 때, 네 점의 x 좌표를 각각 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ 라 하자. 네 수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k 의 값은? (단, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$)



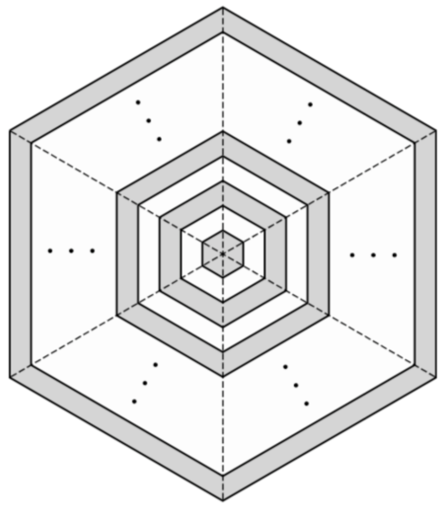
① $\frac{34}{5}$ ② 7 ③ $\frac{36}{5}$ ④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{38}{5}$

150420나 # 3063

33번

유전 연구에 필요한 두 가지 식물 A, B를 재배하기 위하여 정육각형 모양의 토지를 다음과 같이 나누어 놓았다.

○ 정육각형을 여섯 개의 정삼각형으로 나눈다.
○ 인접한 두 삼각형이 공유하고 있는 변(점선 부분)을 각각 21등분한다.
○ 21 등분한 각 점을 직선 모양의 울타리로 서로 연결하여 모두 21개의 부분으로 구분하여 놓는다.



그림과 같이 가장 안쪽에 있는 정육각형 모양의 토지부터 시작하여 검은 부분과 흰 부분으로 토지를 교대로 구분한 다음 검은 부분에는 A를 심고, 흰 부분에는 B를 심었다. A를 심은 부분의 넓이가 231m^2일 때, B를 심은 부분의 넓이는? (단, 울타리가 차지하는 넓이는 고려하지 않는다.)

① 210m^2 ② 212m^2 ③ 214m^2
④ 216m^2 ⑤ 218m^2

060716가 외 1회 # 7422

34번

a, b, c가 서로 다른 세 실수일 때, 이차함수 $f(x) = ax^2 + 2bx + c$에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은 ?

<보기>

ㄱ. a, b, c가 이 순서로 등차수열을 이루면 $f(1) = 4b$이다.
ㄴ. a, b, c가 이 순서로 등차수열을 이루면 $y = f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
ㄷ. a, b, c가 이 순서로 등비수열을 이루면 $y = f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ ④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

080314가 외 1회 # 6163

35번

첫째항이 3이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n = 3d$를 만족시키는 n이 존재하도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은 ?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

081011가 외 1회 # 6301

36번

세 수 1 , $\log_2(2^x + 1)$, $\log_2(4^x - 1)$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루도록 하는 x 의 값을 α 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $0 < \alpha < 1$ ② $1 < \alpha < 2$ ③ $2 < \alpha < 3$ ④ $3 < \alpha < 4$ ⑤ $4 < \alpha < 5$

130308나 # 3411

37번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 세 수 $a_1,\ a_1 + a_2,\ a_2 + a_3$ 이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\dfrac{a_3}{a_2}$ 의 값은? (단, $a_1 \neq 0$)

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

181006나 # 2509

38번

등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$의 공차가 각각 $-2, 3$일 때, 등차수열 $\{3a_n+5b_n\}$의 공차는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 15

080704나 # 6274

39번

선미는 문제 수가 x인 수학책을 첫째 날에는 15문제를 풀고 둘째 날부터 매일 문제 수를 d만큼씩 증가시키면서 풀어 아홉째 날까지 문제를 풀고 나면 24문제가 남게 된다. 또, 첫째 날에는 30문제를 풀고 둘째 날부터 매일 문제 수를 d만큼씩 증가시키면서 풀어 일곱째 날까지 문제를 풀고 나면 39문제가 남게 된다. 선미가 풀고자 하는 이 수학책의 문제 수 x의 값을 구하시오.

070325나 # 6379

40번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=3, a_4=9$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 공차는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

200403나 # 9083

41번

다음은 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하고 $S_n=p, S_{2n}=q$라 할 때, S_{3n}을 p, q로 나타내는 과정이다. (단, $p\neq 0, q\neq 0$)

자연수 n에 대하여
$A=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$
$B=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{2n}$
$C=a_{2n+1}+a_{2n+2}+a_{2n+3}+\cdots+a_{3n}$이라 하자.
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 A, B, C는 이 순서대로 공비가 $\boxed{(가)}$인 등비수열을 이룬다.
등비중항의 성질에 의하여 $B^2=AC$
또한,
$$\begin{cases} A=S_n=p \\ B=S_{2n}-S_n=q-p \\ C=S_{3n}-S_{2n}=S_{3n}-q \end{cases}$$
따라서 $S_{3n}=\boxed{(나)}$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : r^{n-1} (나) : $\dfrac{(p-q)^2}{p}$

② (가) : r^n (나) : $\dfrac{(p+q)^2}{p}$

③ (가) : r^n (나) : $\dfrac{p^2-pq+q^2}{p}$

④ (가) : r^n (나) : $\dfrac{p^2+pq+q^2}{p}$

⑤ (가) : r^{2n} (나) : $\dfrac{p^2-pq+q^2}{p}$

061011가 외 1회 # 7472

42번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 2$, $a_4 + a_{10} = 28$ 일 때, a_{13} 의 값을 구하시오.

141022나 # 3365

43번

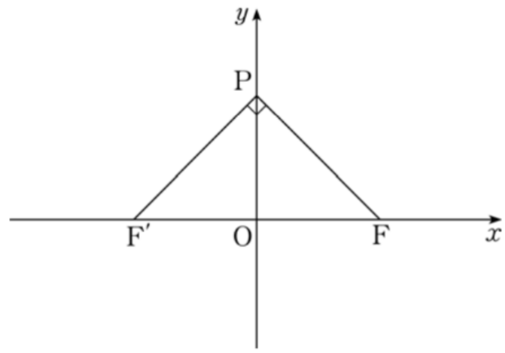
표의 빈 칸에 6개의 자연수를 한 칸에 하나씩 써넣어 가로, 세로, 대각선 방향으로 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 빈 칸에 써넣을 6개의 수의 합을 구하시오.

3		7
	11	

060420가 외 1회 # 7369

44번

$[13 \sim 14]$ 그림과 같이 좌표평면에 x축 위의 두 점 F, F'과 점 $\mathrm{P}(0, n)$ $(n > 0)$이 있다. 삼각형 $\mathrm{PF'F}$가 $\angle \mathrm{FPF'} = \dfrac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형일 때, 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



n 이 자연수일 때 삼각형 $\mathrm{PF'F}$ 의 세 변 위에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n 이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n$ 의 값은?

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

161013가 # 2966

45번

수학자 드 므와브르에 대하여 다음과 같은 일화가 전해지고 있다.

> 드 므와브르는 자신의 수면시간이 매일 15분씩 길어진다는 것을 깨닫고, 수면 시간이 24시간이 되는 날을 계산하여 그날에 자신이 죽을 것이라고 예측하였다. 그런데, 놀랍게도 그날에 수면하는 상태에서 생을 마쳤다.

드 므와브르가 매일 밤12시에 잠든다고 가정할 때, 처음 이 사실을 알게 된 날의 수면 시간이 14시간이었다면 그날부터 생을 마칠 때까지 깨어있는 시간의 합은 ?

① 197 ② 205 ③ 214
④ 224 ⑤ 235

090427나 # 6049

46번

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$ 이고, 공차가 3 인 등차수열일 때,
$a_1 + a_3 + a_5$ 의 값을 구하시오.

131022가 외 1회 # 3635

47번

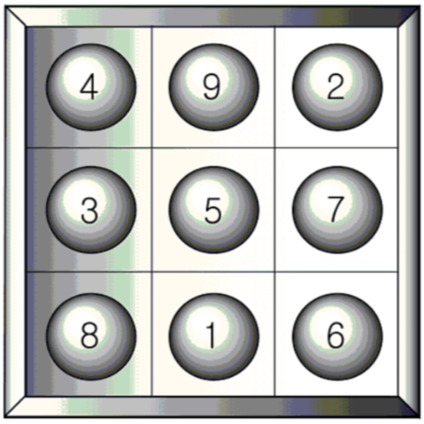
첫째항이 7, 공차가 3인 등차수열의 제7항은?

① 24 ② 25 ③ 26 ④ 27 ⑤ 28

200302나 # 8848

48번

1부터 9까지 번호가 적힌 9개의 공이 있다. 아래 그림과 같이 가로, 세로, 대각선 방향에 놓여 있는 공에 적힌 수들의 합이 각각 15가 되도록 3×3 격자판 위에 빈칸 없이 공을 배열하였다.



위와 같은 방법으로 5부터 40까지 번호가 적힌 36개의 공을 가로, 세로, 대각선 방향에 놓여있는 공에 적힌 수들의 합이 각각 m이 되도록 $n \times n$ 격자판 위에 빈 칸 없이 모두 배열할 때, $m+n$의 값은?

① 137 ② 139 ③ 141
④ 143 ⑤ 145

050411나 # 7086

49번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1a_6 = 0, a_2a_5 = 36$일 때, a_3a_4의 값은?

① 46 ② 48 ③ 50 ④ 52 ⑤ 54

101004나 # 5941

50번

첫째항이 3 이고 공차가 2 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터제 10 항까지의 합은?

① 80 ② 90 ③ 100
④ 110 ⑤ 120

180405나 # 2358

51번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 2$, $a_5 - a_3 = 6$ 일 때, a_6 의 값을 구하시오.

180323나 # 2316

52번

첫째항이 10이고 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_3의 값을 구하시오.

190322나 # 4184

53번

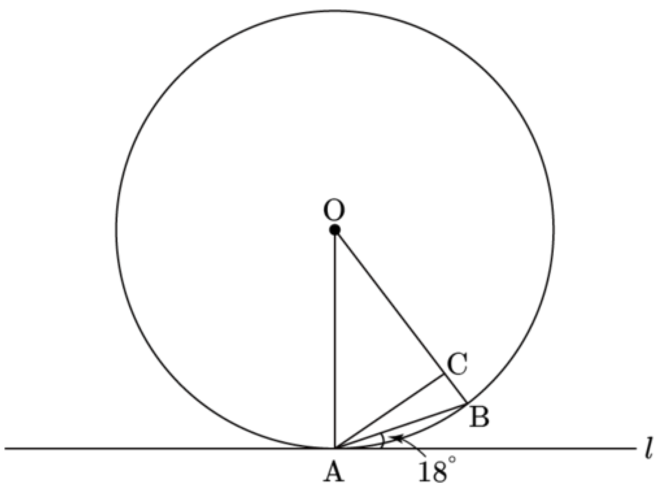
등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 6,\ a_4 + a_6 = 20$ 일 때, a_7 의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

160407나 # 2840

54번

원 O위에 두 점 A,B가 있다. 점 A에서 원 O에 접하는 접선 l과 선분 AB가 이루는 예각의 크기가 18°이다. 선분 OB위의 한 점 C에 대하여 삼각형 OAC의 세 내각의 크기가 등차수열을 이룰 때, 가장 큰 내각의 크기는 ?



① 68° ② 72° ③ 76° ④ 80° ⑤ 84°

070413가 외 1회 # 6396

55번

등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = 1,\ a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 55$$

일 때, a_{11} 의 값은?

① 21 ② 24 ③ 27 ④ 30 ⑤ 33

160406가 # 3719

56번

수열 $\{a_n\}$ 과 공차가 3 인 등차수열 $\{b_n\}$ 에 대하여

$$b_n - a_n = 2n$$

이 성립한다. $a_{10} = 11$ 일 때, b_5 의 값을 구하시오.

150725나 # 3098

57번

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_3=40, a_8=30$일 때,
$|a_2+a_4+\cdots+a_{2n}|$이 최소가 되는 자연수 n의 값을 구하시오.

100421나 # 5853

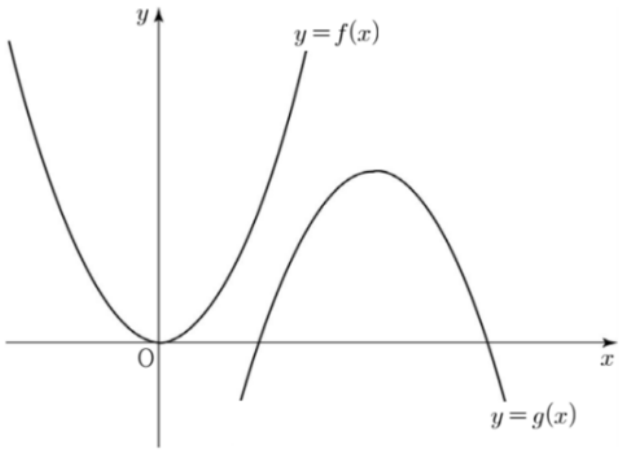
58번

등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1=4$, $a_2+a_3=17$ 일 때, a_4 의 값을 구하시오.

130322가 외 1회 # 3455

59번

[13 ~ 14] 두 함수 $f(x)=x^2$과 $g(x)=-(x-3)^2+k(k>0)$에 대하여 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



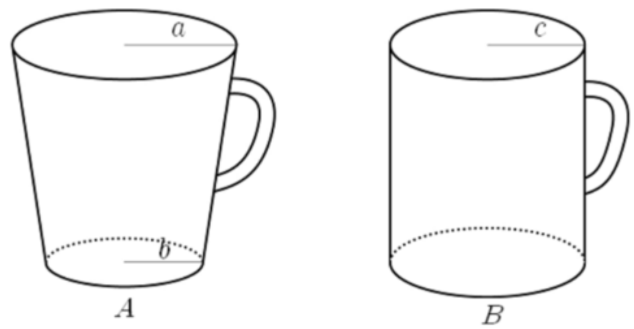
직선 $y=k$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 두 점을 A, B 라 하고, 함수 $y=g(x)$ 의 꼭짓점을 C 라 하자. 세 점 A, B, C 의 x 좌표가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k 의 값은? (단, A 는 제 2 사분면 위의 점이다.)

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

160713나 # 2876

60번

직원뿔대 모양의 커피잔 A와 직원기둥 모양의 커피잔 B가 있다. 커피잔 A의 윗면의 반지름의 길이를 a, 아랫면의 반지름의 길이를 b, 커피잔 B의 반지름의 길이를 c라 할 때, a, c, b순으로 등차수열을 이루고 $a : b = 3 : 1$이며 각각의 높이는 윗면과 아랫면의 반지름의 길이의 합과 같다. A, B 두 커피잔에 커피를 높이의 $\frac{1}{2}$까지 부었을 때, 커피의 양을 각각 V_A, V_B라 하자. $\frac{V_A}{V_B}$의 값을 $\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소)라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.



080730나 # 6290

61번

첫째항이 30 이고 공차가 $-d$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 등식

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} = 0$$

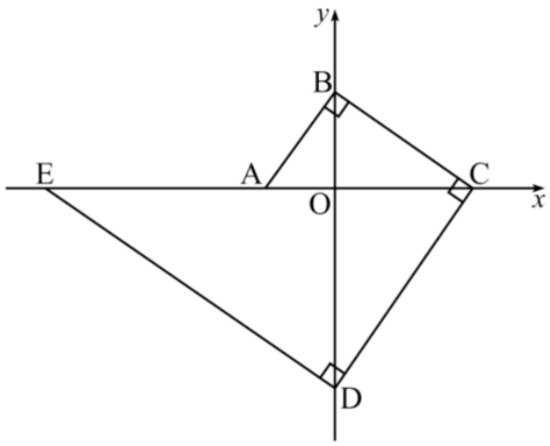
을 만족시키는 두 자연수 m , k 가 존재하도록 하는 자연수 d 의 개수는?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

150315나 # 2998

62번

그림과 같이 좌표축 위에 다섯 개의 점 A,B,C,D,E에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} \perp \overline{\mathrm{BC}}, \overline{\mathrm{BC}} \perp \overline{\mathrm{CD}}, \overline{\mathrm{CD}} \perp \overline{\mathrm{DE}}$가 성립한다. 세 선분 AO,OC,EA의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 AB의 기울기는 ? (단, O는 원점이고 $\overline{\mathrm{OA}} < \overline{\mathrm{OB}}$ 이다.)



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

070314가 외 1회 # 6352

63번

첫째항이 60 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{T_n\}$ 을

$$T_n = |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n|$$

이라 하자. 수열 $\{T_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $T_{19} < T_{20}$
(나) $T_{20} = T_{21}$

$T_n > T_{n+1}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오.

140330나 # 3223

64번

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2 = 8$, $a_6 = 16$ 일 때, a_4의 값을 구하시오.

180423나 # 2376

65번

공차가 2 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$|a_3 - 1| = |a_6 - 3|$$

을 만족시킨다. 이때, $a_n > 92$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오.

140423가 # 3676

66번

$[13 \sim 14]$ 양의 실수 x에 대하여 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x) = \log x$$

13번과 14번의 두 물음에 답하시오.

세 실수 $f(3),\ f(3^t + 3),\ f(12)$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 실수 t 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

160313나 # 2786

67번

첫째항이 50 , 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{T_n\}$ 을

$$T_n = |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n|$$

이라 하자. 수열 $\{T_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $T_{16} < T_{17}$
(나) $T_{17} > T_{18}$

$T_n > T_{n+1}$ 을 만족시키는 n 의 최댓값을 구하시오.

140329가 # 3252

68번

등차수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$, $a_{100} - a_{90} = 34$ 를 만족할 때, a_{21} 의 값을 구하시오.

130722나 # 3545

69번

첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(a_{5n} - a_n) = 440$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n$ 의 값을 구하시오.

170726나 # 2709

70번

자연수 n 에 대하여 다음과 같은 규칙으로 제 n 행에 n 개의 정수를 적는다.

(가) 제 1 행에는 100 을 적는다.
(나) 제 $(n+1)$ 행의 왼쪽 끝에 적힌 수는 제 n 행의 오른쪽 끝에 적힌 수보다 1 이 작다.
(다) 제 n 행의 수들은 왼쪽부터 순서대로 공차가 -1 인 등차수열을 이룬다. ($n \geq 2$)

제 n 행에 적힌 모든 수의 합을 a_n 이라 할 때, $a_{13} - a_{12}$ 의 값은?

제 1 행	100				
제 2 행	99	98			
제 3 행	97	96	95		
제 4 행	94	93	92	91	
제 5 행	90	89	88	87	86
$\vdots$		$\vdots$			$\ddots$

① -136 ② -134 ③ -132
④ -130 ⑤ -128

140316가 외 1회 # 3239

71번

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_2 = 7, S_7 - S_5 = 50$$

일 때, a_{11}의 값을 구하시오.

190725나 # 7171

72번

공차가 $d(d \neq 0)$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{T_n\}$을

$$T_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n$$
$$(n = 1, 2, 3, \cdots)$$

으로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $T_4 = 2d$
ㄴ. $T_5 = a_3$
ㄷ. 수열 $\{T_{2n}\}$은 등차수열이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄴ,ㄷ

080307가 외 1회 # 6156

73번

n개의 항으로 이루어진 등차수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$이 다음 조건을 만족한다.

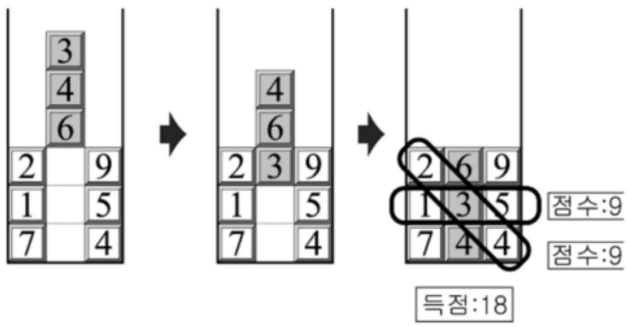
(가) 처음 4개 항의 합은 26이다.
(나) 마지막 4개 항의 합은 134이다.
(다) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 260$

이때 n의 값을 구하시오.

080322가 외 1회 # 6171

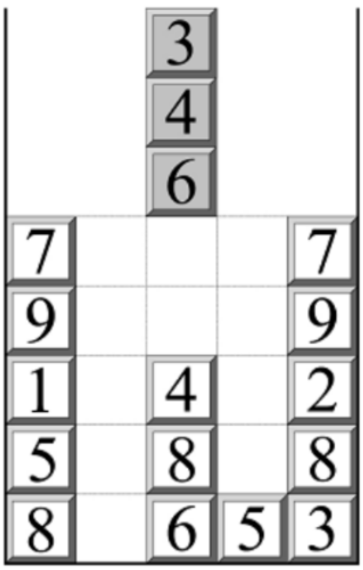
74번

어느 게임은 [예시]와 같이 엔터키를 누르면 게임이 시작되면서 어두운 부분의 막대가 아래쪽으로 계속 내려가고 더 이상 내려가지 않으면 게임은 끝난다. 방향키로는 어두운 부분의 막대를 왼쪽, 오른쪽으로만 이동시킬 수 있고 마우스를 한 번 클릭할 때마다 어두운 부분의 막대 맨 위의 숫자가 맨 아래로, 나머지 숫자들은 한 칸씩 올라간다. 더 이상 내려가지 않는 어두운 부분의 막대와 이웃한 막대들 속의 세 숫자들이 상하, 좌우 또는 대각선 방향 순서대로 등차수열이 될 때, 그 숫자들을 더한 점수들의 합을 득점으로 하는 게임이 있다.



[예시]

다음 게임에서 얻을 수 있는 득점의 최댓값을 구하시오.



080724가 외 1회 # 6265

75번

등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1+a_2+a_3=21,\ a_7+a_8+a_9=75$$

를 만족시킬 때, $a_{10}+a_{11}+a_{12}$ 의 값을 구하시오.

150423가 # 3036

76번

두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여

$$a_1+b_1=45, \sum_{k=1}^{10} a_k+\sum_{k=1}^{10} b_k=500$$

일 때, $a_{10}+b_{10}$의 값을 구하시오.

090320가 외 1회 # 5977

77번

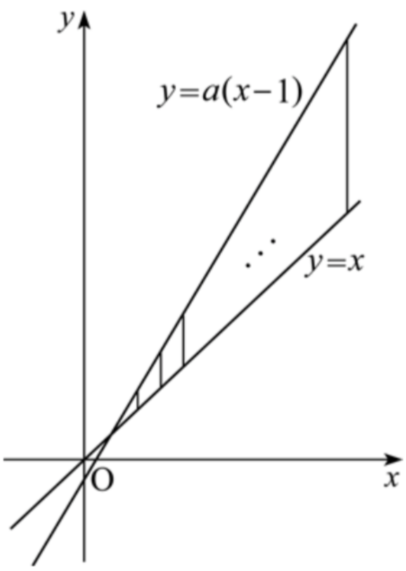
등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 10$, $a_4 - a_2 = 4$ 일 때, a_8 의 값은?

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

150304나 # 2987

78번

그림과 같이 두 직선 $y = x, y = a(a > 1)$의 교점에서 오른쪽 방향으로 y축에 평행한 14개의 선분을 같은 간격으로 그었다.



이들 중 가장 짧은 선분의 길이는 3이고, 가장 긴 선분의 길이는 42 일 때, 14개의 선분의 길이의 합을 구하시오. (단, 각 선분의 양 끝점은 두 직선 위에 있다.)

080321나 # 6188

79번

첫째항이 1 , 공차가 3 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 부등식

$$|x - a_n| \geq |x - a_{n+1}| \; (n \geq 1)$$

을 만족시키는 x 의 최솟값을 b_n 이라 할 때, 옳은 것만을 <보기> 에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $b_1 = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$ 은 공차가 $\dfrac{3}{2}$ 인 등차수열이다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} b_n = 160$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

130417나 # 3480

80번

첫째항이 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_9 = S_{18}$이다. 집합 T_n을

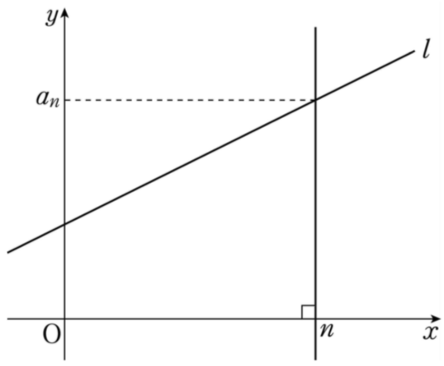
$$T_n = \{S_k | k = 1, 2, 3, \cdots, n\}$$

이라 하자. 집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

200729나 # 9782

81번

좌표평면에 그림과 같이 직선 l이 있다. 자연수 n에 대하여 점 $(n, 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 l과 만나는 점의 y좌표를 a_n이라 하자. $a_4 = \frac{7}{2}, a_7 = 5$ 일 때, $\sum_{k=1}^{25} a_k$의 값을 구하시오.



190328나 # 4190

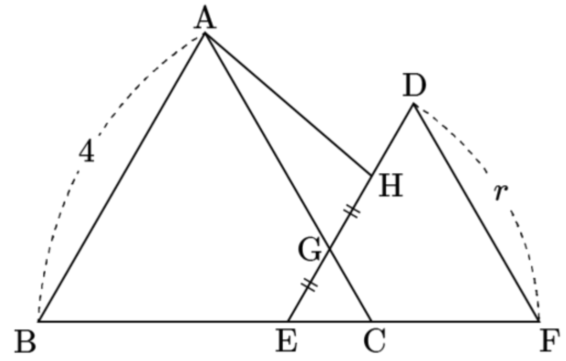
82번

세 실수 $3, a, b$가 이 순서대로 등비수열을 이루고 $\log_a 3b + \log_3 b = 5$를 만족시킨다. $a+b$의 값을 구하시오.

200427나 # 9107

83번

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 r인 정삼각형 DEF를 겹쳐서 점 E가 $\overline{BC}$ 위에 오도록 정삼각형 GEC를 만들고, $\overline{EG} = \overline{GH}$가 되도록 점 H를 $\overline{DG}$ 위에 잡는다.



$\triangle$GEC, $\angle$AGH, $\triangle$DEF의 각각의 넓이가 이 순서로 공비가 r인 등비수열을 이룰 때, r의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

060413가 외 1회 # 7358

84번

지호는 여행 비용을 마련하기 위하여 다음 조건으로 저축을 시작하였다.

(가) 2009년 1월부터 2010년 12월까지 매달 초에 입금한다.
(나) 첫째 달은 10만원을, 두 번째 달부터는 바로 전 달보다 0.8% 증가한 금액을 입금한다.
(다) 매번 입금한 금액에 대하여 입금한 날로부터 24개월까지는 월이율 1.1%의 복리로 매달 계산하고, 그 이후에는 월이율 0.8%의 복리로 매달 계산한다.

이와 같은 조건으로 저축하였을 때, 2012년 12월 말의 원리합계는? (단, $1.008^{24} = 1.2, 1.011^{24} = 1.3$으로 계산한다.)

① 368만 4천 원 ② 370만 4천 원 ③ 372만 4천 원
④ 374만 4천 원 ⑤ 376만 4천 원

101011나 # 5948

85번

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = b_1 = 6$
(나) 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 p 인 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$ 은 공비가 p인 등비수열이다.

수열 $\{b_n\}$ 의 모든 항이 수열 $\{a_n\}$ 의 항이 되도록 하는 1보다 큰 모든 자연수 p 의 합을 구하시오.

141030나 # 3373

86번

1월 초에 1000만원을 월이율 0.5%, 1개월 마다 복리로 계산하는 예금 상품에 가입하고, 1월부터 그 해 12월까지 매월 말에 50만원씩 찾았다. 그 해 12월 말에 통장에 남아있는 금액은?
(단, $1.005^{12} = 1.0617$으로 계산한다.)

① 426만 7000원 ② 432만 7000원 ③ 438만 7000원
④ 444만 7000원 ⑤ 450만 7000원

090414나 # 6041

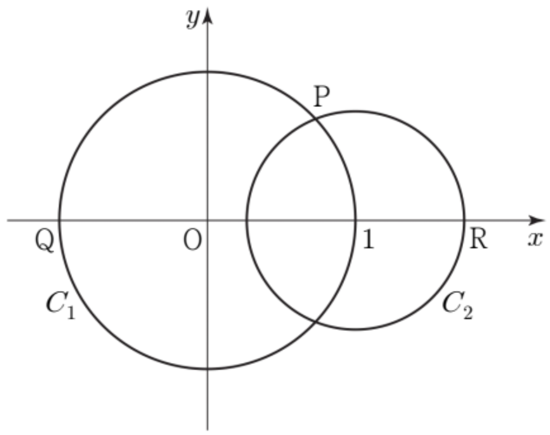
87번

$[13 \sim 14]$ 그림과 같이 좌표평면 위의 두 원

$$C_1 : x^2 + y^2 = 1$$

$$C_2 : (x-1)^2 + y^2 = r^2 \ (0 < r < \sqrt{2})$$

이 제 1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



원 C_1 이 x 축과 만나는 점 중에서 x 좌표가 0보다 작은 점을 Q, 원 C_2 가 x 축과 만나는 점 중에서 x 좌표가 1보다 큰 점을 R 라 하자. $\overline{\mathrm{OP}}$, $\overline{\mathrm{OR}}$, $\overline{\mathrm{QR}}$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 원 C_2 의 반지름의 길이는? (단, O 는 원점이다.)

① $\dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}$ ② $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ ③ $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$
④ $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

150413나 # 3056

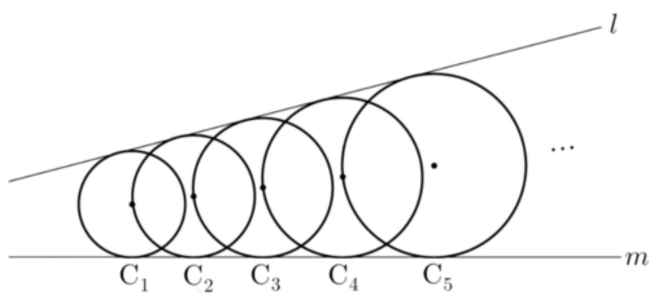
88번

세 수 $a+3, a, 4$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 양수 a의 값을 구하시오.

191023나 # 8392

89번

그림과 같이 두 직선 l, m에 동시에 접하는 원 C_1이 있다.
원 C_1의 중심을 지나고 직선 l, m에 동시에 접하면서 C_1보다 큰 원을 C_2라 하자.
원 C_2의 중심을 지나고 직선 l, m에 동시에 접하면서 C_2보다 큰 원을 C_3라 하자.
이와 같은 방법으로 원 C_k의 중심을 지나고 직선 l, m에 동시에 접하면서 C_k보다 큰 원을 C_{k+1}이라 하자.$(k=1,2,3,\cdots)$
원 C_1의 넓이가 1, 원 C_5의 넓이가 4일 때, 원 C_{19}의 넓이를 구하시오.



090425가 외 1회 # 6027

90번

수열 $\{a_n\}$이 첫째항과 공비가 모두 5인 등비수열일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}\log_{25} a_n$의 값을 구하시오.

120323나 # 5371

91번

0 이 아닌 세 실수 α, β, γ 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
$x^{\frac{1}{\alpha}} = y^{-\frac{1}{\beta}} = z^{\frac{2}{\gamma}}$ 일 때, $16xz^2+9y^2$ 의 최솟값을 구하시오.
(단, x , y , z 는 1 이 아닌 양수이다.)

140726나 # 3309

92번

첫째항이 a 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 세 수 a_3, 2, a_7 이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 양수 a 의 값은?

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

150306나 # 2989

93번

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1a_2=6, a_3a_4=12$일 때, a_7a_8의 값을 구하시오.

090318나 # 5995

94번

첫째항이 4이고 공비가 5인 등비수열에게 제 21항은 n자리의 수이다. 이때, 자연수 n의 값은 ? (단, $\log 2=0.3010$으로 계산한다.)

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

121011나 # 5561

95번

등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 5항까지의 합이 $\frac{31}{2}$이고 곱이 32일 때, $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}$의 값은 ?

① $\frac{31}{4}$ ② $\frac{31}{8}$ ③ $\frac{31}{12}$ ④ $\frac{8}{31}$ ⑤ $\frac{4}{31}$

090309가 외 1회 # 5966

96번

어느 회사원이 2011년 초에 200만원을 적립하고 다음 해부터 매년 초에 전년도 적립금액의 5%를 증액하여 적립하기로 하였다. 2030년 말까지 적립되는 원리합계는? (단, 연이율 5%, 1년마다의 복리로 계산하고, $(1.05)^{20}=2.65$로 계산한다.)

① 9600만원 ② 10600만원 ③ 11600만원
④ 12600만원 ⑤ 13600만원

080426나 # 6237

97번

모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

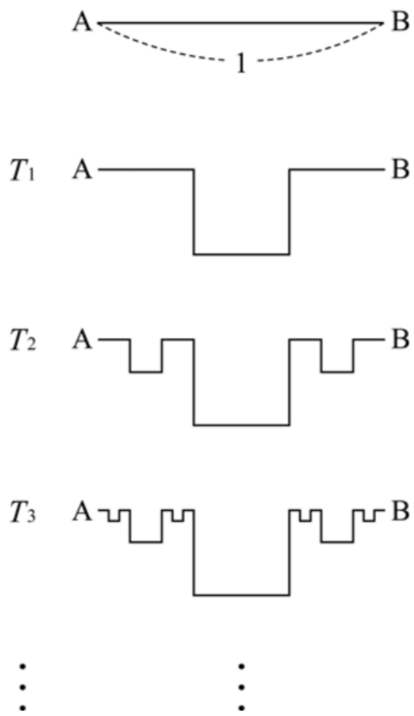
$$a_3+a_2=1,\ a_6-a_4=18$$

일 때, $\dfrac{1}{a_1}$의 값을 구하시오.

200327나 # 8873

98번

길이가 1인 선분 AB가 있다. 그림과 같이 선분 AB를 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_1이라 하자.
T_1의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 두 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_2라 하자.
T_2의 선분 중 원래의 선분 AB에서 남아 있는 네 선분을 각각 3등분한 다음, 가운데 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 그리고, 가운데 선분을 지워 만든 도형을 T_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속 방복하여 n번째 만든 도형을 T_n이라 하고, T_n에 있는 모든 선분의 길이의 총합을 a_n이라 하자. 이때 a_{20}의 값은?



① $3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\right\}$ ② $3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{21}\right\}$
③ $3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{19}\right\}$ ④ $3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{20}\right\}$
⑤ $3\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{21}\right\}$

080329나 # 6192

99번

함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{10}\frac{x^n}{n}$에 대하여 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{q}{p}$일 때, $q-p$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

① 508 ② 509 ③ 510
④ 511 ⑤ 512

110708가 # 5675

100번

등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=2, b_1=2$
(나) $a_2=b_2, a_4=b_4$

a_5+b_5의 값을 구하시오. (단, 수열 $\{b_n\}$의 공비는 1이 아니다.)

110320가 외 1회 # 5594

101번

공차가 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$과 공비가 자연수인 등비수열 $\{b_n\}$이 $a_6=b_6=9$이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_7=b_7$
(나) $94<a_{11}<109$

a_7+b_8의 값은?

① 96 ② 99 ③ 102
④ 105 ⑤ 108

200717나 # 9771

102번

다항식 $x^{10}+x^9+\cdots+x^2+x+1$을 $x-1$로 나눈 몫을 $f(x)$라고 할 때, $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는?

① $2^{10}-10$ ② $2^{10}+11$ ③ $2^{11}-12$
④ $2^{11}-10$ ⑤ $2^{11}+11$

071013나 # 6468

103번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$\frac{a_5}{a_2} = 8,\ a_3 + a_4 = 12$$

를 만족시킬 때, a_8 의 값을 구하시오.

140322가 # 3245

104번

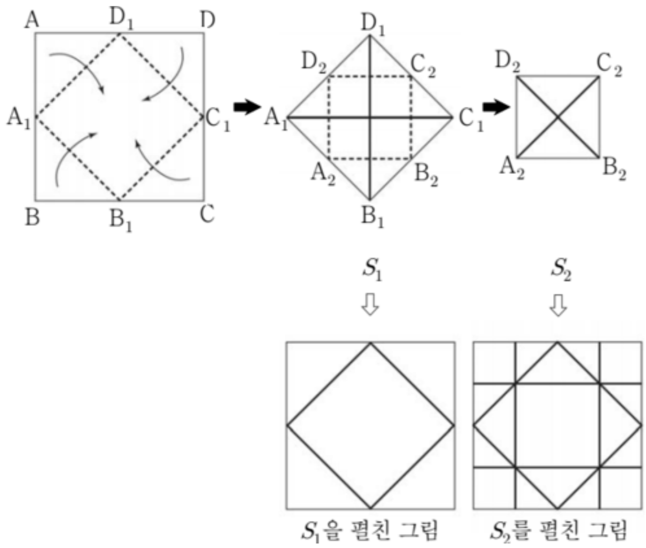
모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 ${a_2}^3 = 8,\ a_3 = 4$ 일 때, a_5 의 값은?

① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ 8 ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 16

161005나 # 2928

105번

그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 모양의 종이 ABCD 에서 각 변의 중점을 각각 $\mathrm{A_1},\ \mathrm{B_1},\ \mathrm{C_1},\ \mathrm{D_1}$ 이라 하고 $\overline{\mathrm{A_1B_1}},\ \overline{\mathrm{B_1C_1}},\ \overline{\mathrm{C_1D_1}},\ \overline{\mathrm{D_1A_1}}$ 을 접는 선으로 하여 네 점 $\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ \mathrm{D}$ 가 한 점에서 만나도록 접은 모양을 S_1 이라 하자.
S_1 에서 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 의 각 변의 중점을 각각 $\mathrm{A_2},\ \mathrm{B_2},\ \mathrm{C_2},\ \mathrm{D_2}$ 라 하고 $\overline{\mathrm{A_2B_2}},\ \overline{\mathrm{B_2C_2}},\ \overline{\mathrm{C_2D_2}},\ \overline{\mathrm{D_2A_2}}$ 를 접는 선으로 하여 네 점 $\mathrm{A_1},\ \mathrm{B_1},\ \mathrm{C_1},\ \mathrm{D_1}$ 이 한 점에서 만나도록 접은 모양을 S_2 라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 모양을 S_n 이라 하고, S_n 을 정사각형 모양의 종이 ABCD 와 같도록 펼쳤을 때 접힌 모든선들의 길이의 합을 l_n 이라 하자. 예를 들어, $l_1 = 4\sqrt{2}$ 이다. l_5 의 값은? (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)



① $24 + 28\sqrt{2}$ ② $28 + 28\sqrt{2}$ ③ $28 + 32\sqrt{2}$ ④ $32 + 32\sqrt{2}$ ⑤ $36 + 32\sqrt{2}$

160421나 # 2854

106번

공비가 2 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 + a_4 = 36$ 일 때, a_6 의 값은?

① 48 ② 64 ③ 96 ④ 108 ⑤ 128

140304나 # 3197

107번

자연수 m에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 $A(m)$이라 하자.

> 3×2^m은 첫째항이 3이고 공비가 2 이상의 자연수인 등비수열의 제k항이다.

예를 들어, 3×2^2은 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열의 제3항, 첫째항이 3이고 공비가 4인 등비수열의 제2항이 되므로 $A(2) = 3 + 2 = 5$이다. $A(200)$의 값을 구하시오.

200329나 # 8875

108번

공비가 2 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = 8$ 일 때, a_5 의 값을 구하시오.

180722나 # 2465

109번

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = 3a_n$$

을 만족시킨다. $a_2 = 2$ 일 때, a_4 의 값은?

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

180304나 # 2297

110번

첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{S_n+p\}$가 등비수열을 이루도록 하는 상수 p의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

061006나 # 7493

111번

각 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$b_n=\log_3 a_n \ (n=1,2,3\cdots)$$

수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{11}의 값은?

(가) $b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{15}+b_{17}=36$
(나) $b_2+b_4+b_6+\cdots+b_{16}+b_{18}=45$

① 3^5 ② 3^6 ③ 3^7 ④ 3^8 ⑤ 3^9

110315나 # 5608

112번

등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_2+a_4=810$, $a_5+a_7=30$일 때, a_{10}의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

080403나 # 6225

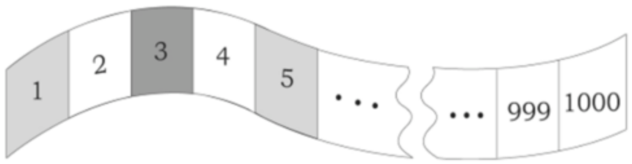
113번

$a, 10, 17, b$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루고 a, x, y, b 는 이 순서대로 등비수열을 이루고 있다. xy 의 값을 구하시오.

151023가 외 1회 # 3186

114번

그림과 같이 1부터 1000까지의 자연수가 쓰여진 흰색 종이 띠에 1부터 시작하여 공차가 4인 등차수열의 수가 있는 부분에는 빨간색, 3부터 시작하여 공비가 3인 등비수열의 수가 있는 부분에는 파란색을 칠하였다. 빨간색과 파란색이 겹쳐 칠해진 부분에 쓰여진 수 중에서 가장 큰 수를 구하시오.



070422나 # 6425

115번

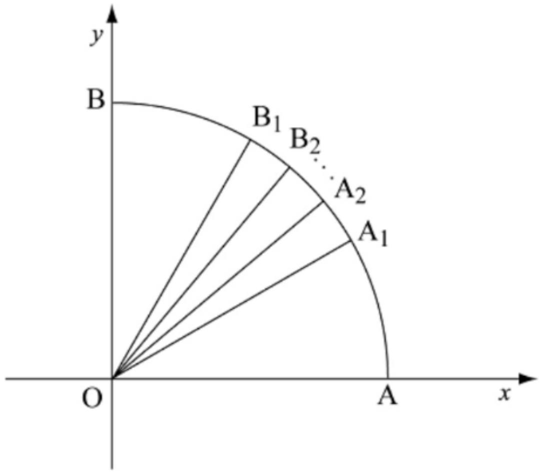
세 수 $3, -6, a$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

190304나 # 4166

116번

그림과 같이 사분원 AOB에 대하여 $\angle\mathrm{AOB}$를 삼등분하는 직선이 사분원과 만나는 교점을 각각 $\mathrm{A_1}, \mathrm{B_1}$이라 하고, $\angle\mathrm{A_1OB_1}$을 삼등분하는 직선이 사분원과 만나는 교점을 각각 $\mathrm{A_2}, \mathrm{B_2}$라고 하자. 이와 같은 방법으로 계속할 때, $\angle\mathrm{A_{10}OB}$의 크기는?



① $\dfrac{\pi}{4}\left(1-\dfrac{1}{3^9}\right)$ ② $\dfrac{\pi}{4}\left(1+\dfrac{1}{3^9}\right)$

③ $\dfrac{\pi}{4}\left(1-\dfrac{1}{3^{10}}\right)$ ④ $\dfrac{\pi}{4}\left(1+\dfrac{1}{3^{10}}\right)$

⑤ $\dfrac{\pi}{4}\left(1+\dfrac{1}{3^{11}}\right)$

090717나 # 6091

117번

등차수열 $\{a_n\}$ 과 공비가 1 보다 작은 등비수열 $\{b_n\}$ 이

$$a_1 + a_8 = 8\,,\, b_2 b_7 = 12\,,\, a_4 = b_4\,,\, a_5 = b_5$$

를 모두 만족시킬 때, a_1 의 값을 구하시오.

171027나 # 2770

118번

서로 다른 세 자연수 a, b, c가 다음 세 조건을 모두 만족시킬 때, $a+b+c$의 값은?

(가) a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
(나) $b - a = n^2$ (단, n은 자연수이다.)
(다) $\log_6 a + \log_6 b + \log_6 c = 3$

① 26 ② 28 ③ 30 ④ 32 ⑤ 34

110429나 # 5666

119번

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 \cdot a_3 \cdot a_8 = 64$일 때, a_4의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 24

060303가 외 1회 # 7276

120번

세 양수 a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이루고, 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $a + b + c = \dfrac{7}{2}$
(나) $abc = 1$

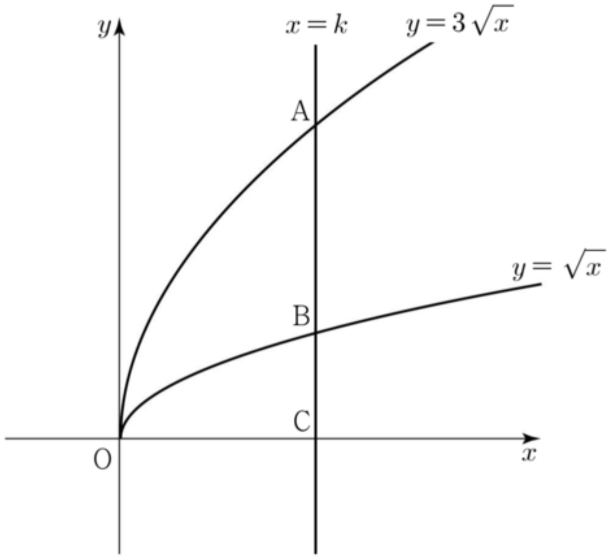
$a^2 + b^2 + c^2$의 값은?

① $\dfrac{13}{4}$ ② $\dfrac{15}{4}$ ③ $\dfrac{17}{4}$ ④ $\dfrac{19}{4}$ ⑤ $\dfrac{21}{4}$

070327나 # 6380

121번

그림과 같이 두 함수 $y=3\sqrt{x}, y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $x=k$가 만나는 점을 각각 A,B라 하고, 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 C라 하자.



$\overline{\mathrm{BC}}, \overline{\mathrm{OC}}, \overline{\mathrm{AC}}$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 상수 k의 값은? (단, $k>0$이고, O는 원점이다.)

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3
④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

140407가 # 8314

122번

모래시계 A, B, C에 들어 있는 모래의 양은 각각 $3^x, 9^b, 27^c$이고 매 초당 모래가 위에서 아래로 일정하게 떨어지는 양은 각각 a, b, c이다. a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이루고, $3^a, 9^b, 27^c$도 이 순서대로 등비수열을 이루며, 두 수열의 공비는 같다. 모래시계 A, B, C로 잴 수 있는 시간(초)을 각각 t_A, t_B, t_C라 할 때, $t_A+t_B+t_C$의 값을 구하시오. (단, 모래가 다 떨어지진 후 뒤집지 않는다.)

090725가 외 1회 # 6077

123번

세 수 $1, x, 5$는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $1, y, 5$는 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, x^2+y^2의 값을 구하시오.

060718가 외 1회 # 7424

124번

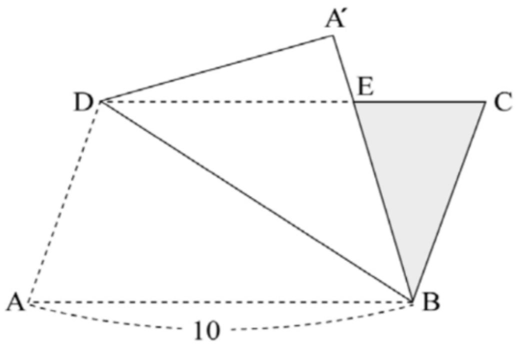
그림과 같이 각 단의 부피가 일정한 비율로 감소하는 8단 케이크를 만들었다. 이 케이크의 제 2단의 부피를 p, 제 4단의 부피를 q라 할 때, 제 8단의 부피를 p와 q로 나타낸 것은 ?

① $\frac{q^3}{p^2}$ ② $\frac{q^2}{p^2}$ ③ $\frac{p^3}{q^2}$ ④ $\frac{p^3}{q}$ ⑤ $\frac{p^2}{q}$

080316가 외 1회 # 6165

125번

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=10$인 평행사변형 ABCD가 있다. 이 도형을 대각선 BD를 따라 접어서 생기는 삼각형 EBC의 넓이가 평행사변형 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{5}$이고, $\overline{\mathrm{CE}}, \overline{\mathrm{EB}}, \overline{\mathrm{BD}}$의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 선분 AD의 길이는?

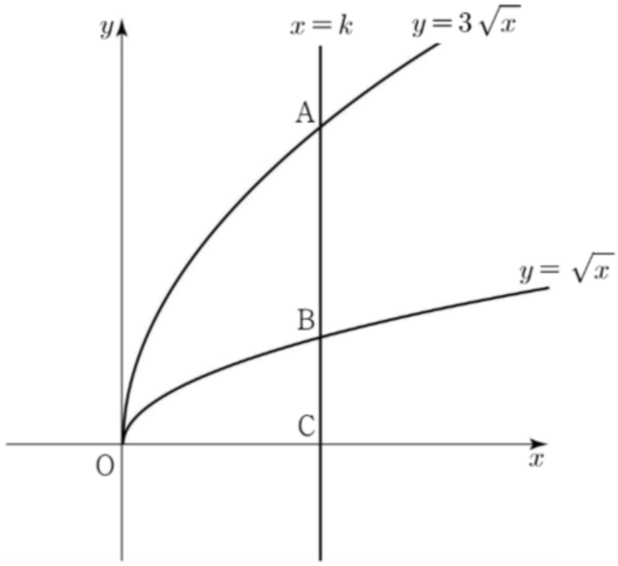


① $2\sqrt{11}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{46}$ ④ $\sqrt{47}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

110711나 # 5704

126번

[$12 \sim 13$] 그림과 같이 두 함수 $y=3\sqrt{x}, y=\sqrt{x}$의 그래프와 직선 $x=k$가 만나는 점을 각각 A,B라 하고, 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 C라 하자. 12번과 13번의 두 물음에 답하시오.
(단, $k>0$이고, O는 원점이다.)



$\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{AC}}$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 상수 k 의 값은?

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

140412나 # 3660

127번

모든 항이 양수인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 a_n, b_n, a_{n+1}은 이 순서대로 등차수열을 이루고, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}은 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 일반항 a_n과 b_n을 구하는 과정이다.
(단, $a_1 = 1, a_2 = 3, b_1 = 2$)

a_n, b_n, a_{n+1}은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b_n = a_n + a_{n+1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

b_n, a_{n+1}, b_{n+1}은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(a_{n+1})^2 = b_n b_{n+1}$$

이고, $a_{n+1} > 0, a_{n+2} > 0$이므로

$$a_{n+1} = \sqrt{b_n b_{n+1}}, a_{n+2} = \sqrt{b_{n+1} b_{n+2}} \quad \cdots ㉡$$

이다.

또한, ㉠, ㉡에서 얻어진 $2b_{n+1} = \sqrt{b_n b_{n+1}} + \sqrt{b_{n+1} b_{n+2}}$의 양변을 $\sqrt{b_{n+1}}$로 나누면 $2\sqrt{b_{n+1}} = \sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n+2}}$이므로 $\{\sqrt{b_n}\}$은 $\boxed{(가)}$ 수열이다.

그러므로 $a_2 = 3, b_1 = 2, (a_2)^2 = b_1 b_2$에서 $b_2 = \dfrac{9}{2}$이므로 $b_n = \boxed{(나)}$이다.

따라서, $a_n = \boxed{(다)}$이다.

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 ?

① (가) : 등차, (나) : $\frac{1}{2}(n+1)^2$, (다) : $\frac{n(n+1)}{4}$

② (가) : 등비, (나) : $\frac{1}{2}(n+1)^2$, (다) : $\frac{n(n+1)}{2}$

③ (가) : 등차, (나) : $\frac{1}{4}(n+1)^2$, (다) : $\frac{n(n+1)}{4}$

④ (가) : 등비, (나) : $\frac{1}{4}(n+1)^2$, (다) : $\frac{n(n+1)}{4}$

⑤ (가) : 등차, (나) : $\frac{1}{2}(n+1)^2$, (다) : $\frac{n(n+1)}{2}$

110410나 # 5653

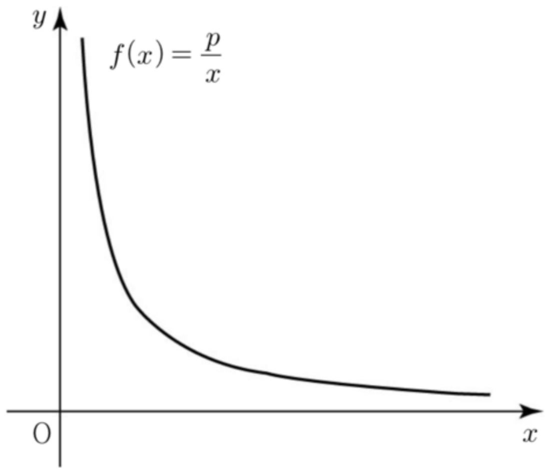
128번

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 3$, $a_6 = 12$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하시오.

170722나 # 2705

129번

$[13 \sim 14]$ 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x) = \dfrac{p}{x}$ $(p > 1)$의 그래프는 그림과 같다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



세 수 $f(a), f\left(\sqrt{3}\right), f(a+2)$ 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 양수 a 의 값은?

① 1 ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{11}{8}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

160713가 # 2906

130번

세 양수 a, b, c가 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이루고 $a+b=4, a+b+c=13$을 만족시킬 때, 공비 r의 값은 ?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

120404나 # 5462

131번

어느 연구소의 보고서에 따르면 앞으로 LPG 경차 사용이 늘어나 자동차 휘발유 소비량이 감소할 것이라고 한다. 2007년 A지역의 연간 자동차 휘발유 소비량은 a톤이고, 매년 이 지역의 연간 자동차 휘발유 소비량은 전년도에 비하여 일정한 비율로 감소하여 2015년에는 $\frac{1}{3}a$톤이 된다고 한다. 2015년 이후에도 이와 같은 비율로 계속 감소한다고 할 때, A지역에서 2007년부터 2022년까지 16년 동안 사용되는 자동차 휘발유 소비량의 총 합은 ? (단, $\sqrt[8]{3}=1.15$로 계산한다)

① $\frac{145}{27}a$ ② $\frac{154}{27}a$ ③ $\frac{164}{27}a$ ④ $\frac{175}{27}a$ ⑤ $\frac{184}{27}a$

090316가 외 1회 # 5973

132번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여,

$a_1a_2=a_{10}, a_1+a_9=20$ 일 때,

$(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)$ 의 값은?

① 494 ② 496 ③ 498 ④ 500 ⑤ 502

140414나 # 3267

133번

두 양수 a, b 에 대하여 세 수 $a+3, 3, b$ 는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $\frac{2}{b}, 1, \frac{2}{a+3}$ 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이때, $b-a$ 의 값은?

① $-5-2\sqrt{5}$ ② $-3-2\sqrt{5}$ ③ $-1-2\sqrt{5}$ ④ $1-2\sqrt{5}$ ⑤ $3-2\sqrt{5}$

130410나 # 3473

134번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 a_3 = \frac{1}{36},\ a_5 = \frac{4}{81}$$

일 때, a_4 의 값은?

① $\frac{1}{27}$ ② $\frac{2}{27}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{4}{27}$ ⑤ $\frac{5}{27}$

150407나 # 3050

135번

공비가 5인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_5}{a_3}$의 값을 구하시오. (단, $a_3 \neq 0$)

200422나 # 9102

136번

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 양수이고 공비가 1 보다 큰 등비수열이다. $a_3 a_5 = a_1$ 일 때, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 를 만족시키는 자연수 n 의 값을 구하시오.

151026가 # 3189

137번

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 4, a_4 = 8$ 일 때, a_6 의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

170303나 # 2536

138번

등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 a_{10} = 9$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 곱은 ?

① 3^{10} ② 3^{11} ③ 3^{12} ④ 3^{13} ⑤ 3^{14}

111006나 # 5751

139번

첫째항이 a, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제 6항까지의 합이 21일 때, a의 값은 ?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

081004나 # 6322

140번

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_7 = 12, \frac{a_6 a_{10}}{a_5} = 36$$

이 성립할 때, a_{15}의 값을 구하시오.

080318나 # 6186

141번

수열 $\{a_b\}$에 대하여 $b_n = a_{n+1} - a_n$이라 할 때, 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은 ? (단, $a_n \cdot b_n \neq 0$)

<보기>

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이면 수열 $\{b_n\}$도 등비수열이다.

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$이 등비수열이면 수열 $\{a_n\}$도 등비수열이다.

ㄷ. 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이면 수열 $\{a_n \cdot b_n\}$도 등비수열이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄴ ④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄴ,ㄷ

060308가 외 1회 # 7281

142번

첫째항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 4a_3, a_2 + a_3 = -12$$

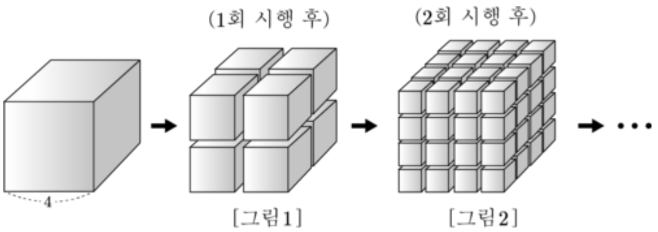
를 만족시킬 때, a_5 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

180311나 # 2304

143번

한 변의 길이가 4인 정육면체가 있다.
[그림1]은 이 정육면체의 각 모서리를 수직이등분하여 분리된 정육면체들을 나타낸 것이다.
[그림2]는 [그림1]의 정육면체들의 각 모서리를 수직이등분하여 분리된 정육면체들을 나타낸 것이다.



이와 같은 시행을 계속해 나갈 때, 5회 시행 후 분리된 모든 정육면체들의 겉넓이의 합은 ?

① 3×2^{10} ② 3×2^{12} ③ 3×2^{15} ④ 3×2^{17} ⑤ 3×2^{20}

070417가 외 1회 # 6400

144번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 5$, $a_{10} = 80$ 일 때, $\dfrac{a_5}{a_1}$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

170405나 # 2598

145번

표는 어느 달 국내 원유 수입량의 70%를 차지하는 두바이(Dubai)유의 1배럴당 국제 가격을 일주일 간격으로 나타낸 것이다. 이 표에 있는 두바이유의 가격 a_n은 다음 관계식을 만족한다.

$a_n = 34.4 + 0.3 \times b_n$ (단, n은 자연수)

이러한 추세로 가격이 결정될 때, $\sum_{k=1}^{8} b_k$의 값을 구하시오.

(가격단위 : 달러)

n째주	두바이유 가격 a_n
1	34.7
2	35.0
3	35.6
4	36.8
5	39.2
⋮	⋮

051025나 # 7262

146번

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2 , 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다. 모든 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n 의 좌표를 (n, a_n) , 점 Q_n 의 좌표를 $(n, 0)$ 이라 하자.

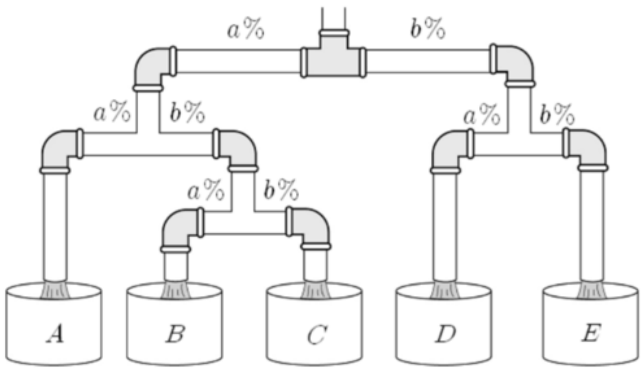
삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ 의 넓이를 A_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} A_n$ 의 값은?

① $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$ ② $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ ③ $2+\left(\frac{1}{2}\right)^{21}$ ④ $2+\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ ⑤ $2+\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$

130416나 # 3479

147번

그림과 같이 수도관은 물로 흘려 보내면 유실되는 물이 없이 왼쪽으로 $a\%$, 오른쪽으로 $b\%$가 흐른다. 일정한 양의 물을 흘려 보낸 후 물통 A, B, C, D, E의 물의 양을 측정하면 물통 B, C, D순으로 등비수열을 이룬다. $b = p\sqrt{5} - q(p, q$는 유리수$)$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $ab \neq 0$)



080725가 외 1회 # 6266

148번

두 양수 a, b에 대하여 세 수 $a^2, 12, b^2$이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $a \times b$의 값을 구하시오.

190424나 # 4423

149번

두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여

$$a_4b_4 = 3, a_7b_7 = 6$$

일 때, $a_{16}b_{16}$의 값은 ?

① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

100304가 외 1회 # 5769

빠른 정답표

1번. ③	2번. 34	3번. 18	4번. 240	5번. ①
6번. ④	7번. ②	8번. ④	9번. ①	10번. 37
11번. 6	12번. ⑤	13번. 39	14번. 80	15번. ①
16번. 20	17번. 27	18번. ①	19번. ⑤	20번. ②
21번. ③	22번. 100	23번. ④	24번. 26	25번. 60
26번. 24	27번. 137	28번. ③	29번. ④	30번. ⑤
31번. ④	32번. ③	33번. ①	34번. ③	35번. ②
36번. ②	37번. ③	38번. ④	39번. 375	40번. ③
41번. ③	42번. 26	43번. 51	44번. ⑤	45번. ②
46번. 21	47번. ②	48번. ③	49번. ⑤	50번. ⑤
51번. 14	52번. 20	53번. ⑤	54번. ⑤	55번. ①
56번. 16	57번. 22	58번. 13	59번. ①	60번. 19
61번. ②	62번. ①	63번. 61	64번. 12	65번. 50
66번. ④	67번. 33	68번. 70	69번. 120	70번. ②
71번. 43	72번. ⑤	73번. 13	74번. 33	75번. 102
76번. 55	77번. ②	78번. 315	79번. ③	80번. 273
81번. 200	82번. 36	83번. ④	84번. ④	85번. 11
86번. ④	87번. ④	88번. 6	89번. 512	90번. 105
91번. 24	92번. ⑤	93번. 48	94번. ③	95번. ②
96번. ②	97번. 12	98번. ⑤	99번. ④	100번. 10
101번. ⑤	102번. ③	103번. 128	104번. ⑤	105번. ①
106번. ③	107번. 477	108번. 32	109번. ⑤	110번. ②
111번. ②	112번. ①	113번. 72	114번. 729	115번. ③
116번. ④	117번. 18	118번. ①	119번. ②	120번. ⑤
121번. ③	122번. 27	123번. 14	124번. ①	125번. ③
126번. ③	127번. ⑤	128번. 48	129번. ①	130번. ④
131번. ⑤	132번. ②	133번. ⑤	134번. ②	135번. 25
136번. 13	137번. ④	138번. ①	139번. ③	140번. 108

빠른 정답표

141번. ④	142번. ①	143번. ①	144번. ④	145번. 255
146번. ①	147번. 100	148번. 12	149번. ④	

5.

수열의 합

교육청 128문항

1번

수열 $\{a_n\}$ 이 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n-1$ 을 만족시킬 때, a_{10} 의 값을 구하시오.

170323나 # 2556

2번

$\sum_{k=1}^{10} a_k = 8$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = 10$일 때, $\sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k + 3)$의 값을 구하시오.

070418나 # 6422

3번

$\sum_{k=1}^{10} (k+2)^2$의 값은?

① 645 ② 630 ③ 615
④ 600 ⑤ 585

051002가 외 1회 # 7219

4번

다음 등식을 만족시키는 자연수 n 의 값을 구하시오.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 - \sum_{k=1}^{n} (k^2 + k) = 78$$

140324나 # 3217

5번

$$\sum_{k=1}^{10}(k+5)(k-2)-\sum_{k=1}^{10}(k-5)(k+2)$$의 값을 구하시오.

050322가 외 1회 # 7005

6번

<보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면 ?

<보기>

ㄱ. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{2}{n(n+1)}$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k}l\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

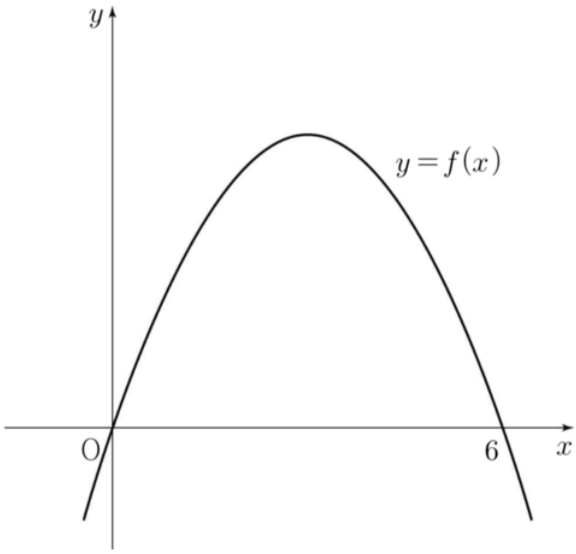
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄷ

④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

080408나 # 6227

7번

$[13\sim14]$ 이차함수 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x$에 대하여 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_n=2f(n)$ 이다. a_6 의 값은?

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

170713나 # 2696

8번

$\sum_{k=2}^{10}(k+1)^2 - \sum_{k=1}^{10}(k-1)^2$의 값을 구하시오.

060419나 # 7393

9번

$\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2 - 2\sum_{k=1}^{10}(k+2) + \sum_{k=1}^{10}3$의 값은?

① 365 ② 370 ③ 375 ④ 380 ⑤ 385

070302나 # 6369

10번

$\sum_{k=1}^{10}(k^2+k+1) - \sum_{k=1}^{10}(k^2-k-1)$의 값을 구하시오.

061018나 # 7500

11번

$\sum_{k=1}^{12}k^2 + \sum_{k=2}^{12}k^2 + \sum_{k=3}^{12}k^2 + \cdots + \sum_{k=12}^{12}k^2$의 값은?

① 3376 ② 4356 ③ 5324 ④ 5840 ⑤ 6084

100427나 # 5857

12번

자연수 n 에 대하여 두 함수 $f(x)=x^2-(n+1)x+n^2$, $g(x)=n(x-1)$ 의 그래프의 두 교점의 x 좌표를 a_n , b_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{19}\frac{100}{a_nb_n}$ 의 값은?

① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

130711나 # 3534

13번

수열 $\{a_n\}$의 첫째항에서 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ 일 때, a_{15}를 구하시오.

050422나 # 7094

14번

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=3, a_n=8n-4 \ \ (n=2,3,4,\cdots)$$

를 만족시키고, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

121030나 # 5574

15번

함수 $f(x)=6\tan 2x$ 에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 의 값을 구하시오.

170723가 # 2676

16번

n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식
$x^2-33x+n(n+1)=0$의 두 근을 α_n, β_n이라 하자. 이 때,
$\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)$의 값을 구하시오.

110420나 # 5659

17번

수열 $\{a_n\}$ 은 15 와 서로소인 자연수를 작은 수부터 차례대로 모두 나열하여 만든 것이다. 예를 들면 $a_2=2$, $a_4=7$ 이다. $\sum_{n=1}^{16}a_n$ 의 값은?

① 240 ② 280 ③ 320 ④ 360 ⑤ 400

160321나 # 2794

18번

1부터 n까지 자연수의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20}[\log_{10}S_n]$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

090322가 외 1회 # 5979

19번

수열 $\{a_n\}$ 의 각 항이

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 1+3 \\
a_3 &= 1+3+5 \\
&\vdots \\
a_n &= 1+3+5+\cdots+(2n-1) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

일 때, $\log_4(2^{a_1}\times 2^{a_2}\times 2^{a_3}\times\cdots\times 2^{a_{12}})$ 의 값은?

① 315 ② 320 ③ 325 ④ 330 ⑤ 335

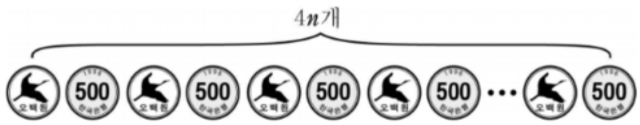
180716나 # 2459

20번

동전의 앞면과 뒷면은 다음과 같다.

앞　　　뒤

동전 $4n$ 개 (n 은 자연수) 가 앞면이 보이도록 일렬로 나열되어 있다. 이웃한 동전 한 쌍을 뒤집는 시행을 반복하여 <그림>과 같이 앞면과 뒷면이 앞면부터 교대로 나열되도록 만들려고 한다.



<그림>

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \left(\begin{array}{c}\text{앞면이 보이도록 나열된 4n개의 } \langle\text{그림}\rangle \\ \text{처럼 만드는데 필요한 최소의 시행 횟수}\end{array}\right)$$

이다. 예를 들어, 앞면이 보이도록 나열된 4개의 동전을

와 같이 두 번의 시행으로 <그림>처럼 만들 수 있으므로 $a_1 = 2$ 이다. $\sum_{n=1}^{20} a_n$ 의 값을 구하시오.

131030나　　# 3613

21번

n이 자연수일 때, x에 대한 다항식 $x^3 + (1-n)x^2 + n$을 $x-n$으로 나눈 나머지를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\frac{7}{8}$　② $\frac{8}{9}$　③ $\frac{9}{10}$　④ $\frac{10}{11}$　⑤ $\frac{11}{12}$

190712나　　# 7156

22번

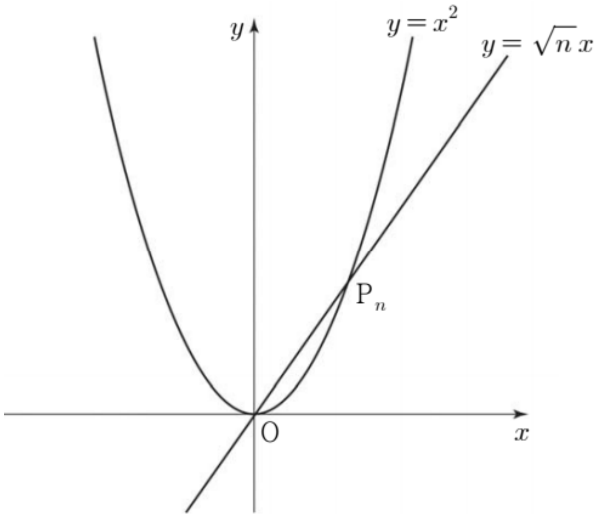
$a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 $a^{\log_5 16}$ 이 2^n ($n = 1, 2, 3, \cdots$)이 되도록 하는 a 를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, k 번째 수를 a_k 라 하자. $\sum_{k=1}^{40} \log_5 a_k$ 의 값은?

① 185　② 190　③ 195　④ 200　⑤ 205

150717나　　# 3090

23번

$[13 \sim 14]$ 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=\sqrt{n}x$가 제 1사분면에서 만나는 점을 P_n이라 하자. 13번과 14번의 두물음에 답하시오.



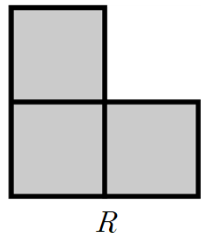
점 P_n 을 지나고 직선 $y=\sqrt{n}x$ 와 수직인 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 Q_n, R_n 이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OQ}_n\mathrm{R}_n$ 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{5} \frac{2S_n}{\sqrt{n}}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.)

① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

160414나 # 2847

24번

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 3개로 이루어진 도형 R가 있다.



자연수 n에 대하여 $2n$개의 도형 R를 겹치지 않게 빈틈없이 붙여서 만든 직사각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=10}^{15} a_n$의 값은?

① 378 ② 396 ③ 414 ④ 432 ⑤ 450

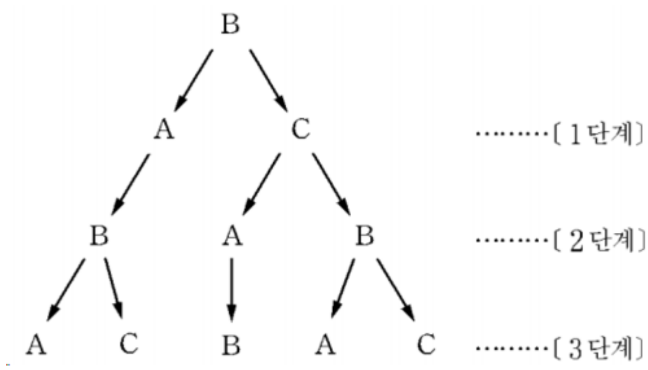
200311나 # 8857

25번

A, B, C 세 사람은 아래와 같은 규칙으로 전자우편을 보내기로 하였다.

I. A는 B에게만 보낸다.
II. B는 A와 C 모두에게 각각 한 통씩 보낸다.
III. C는 A와 B 모두에게 각각 한 통씩 보낸다.

아래 그림과 같이 B부터 전자우편을 보내기 시작할 때, [1 단계], [2 단계], [3 단계]에서 A가 받은 전자우편의 개수를 각각 a_1, a_2, a_3라 할 때, a_{10}의 값을 구하시오. (예를들면 $a_3=2$이며, 전자우편의 개수와 용량은 제한하지 않는다.)



050423나 # 7095

26번

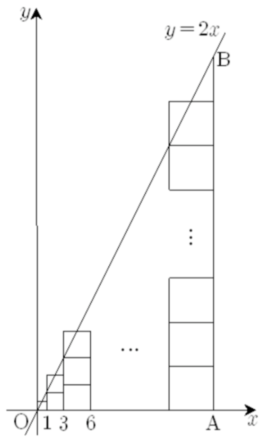
수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$의 값은?

① 240 ② 300 ③ 360
④ 420 ⑤ 480

060727나 # 7458

27번

그림은 직선 $y=2x$와 한 변의 길이가 1인 정사각형 1개, 한 변의 길이가 2인 정사각형 2개, $\cdots$, 한 변의 길이가 n인 정사각형 n개를 나타낸 것이다.
원점으로부터의 거리가 $1+2+3+\cdots+n$인 x축 위의 점 A를 지나고 y축에 평행인 직선이 $y=2x$와 만나는 점을 B라 하자.



다음은 이를 이용하여 어떤 수열의 합을 구하는 과정이다.

> 모든 정사각형들의 넓이의 합을 직각삼각형 OAB의 넓이와 같으므로
> $\boxed{(가)} = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}}$이다.
> $\overline{\mathrm{AB}} = 1+2+3+\cdots+n$이고 $\overline{\mathrm{AB}} = \boxed{(나)}$이다.
> 따라서, $\boxed{(가)} = \boxed{(다)}$이다.

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
(나) : n^2
(다) : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

② (가) : $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
(나) : $n(n+1)$
(다) : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ (가) : $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$
(나) : $n(n+1)$
(다) : $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

④ (가) : $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$
(나) : $n(n+1)$
(다) : $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

⑤ (가) : $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$
(나) : n^2
(다) : $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

070414나 # 6420

28번

그림과 같이 자연수를 다음 규칙에 따라 나열한다.

[규칙1] 1행에는 $2, 3, 6$의 3개의 수를 차례대로 나열한다.
[규칙 2] $n+1$행에 나열된 수는 1열에 2, 2열부터는 n행에 나열된 수는 1열에 2, 2열부터는 n행에 나열된 각 수에 2를 곱하여 차례대로 나열한다.

	[1열]	[2열]	[3열]	[4열]	[5열]	$\cdots$
[1행]	2	3	6			
[2행]	2	4	6	12		
[3행]	2	4	8	12	24	
$\vdots$			$\vdots$			

10행에 나열된 모든 자연수의 합을 S라 할 때, $S = p \times 2^9 - 2$이다. 이 때, p의 값을 구하시오.

110421나 # 5660

29번

수열 $\{a_n\}$ 이 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1} = n^2 + n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n}$ 의 값은?

① $\frac{5}{11}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{6}{11}$ ④ $\frac{13}{22}$ ⑤ $\frac{7}{11}$

140317나 # 3210

30번

자연수 n을 2진법으로 나타냈을 때, 일의 자리의 수를 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{30} k a_k$의 값은 ?

① 225 ② 226 ③ 227
④ 228 ⑤ 229

100704나 # 5892

31번

두 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1), \mathrm{Q}(x_2, y_2)$에 대하여 $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$를

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = |x_1 - x_2| + |y_1 + y_2|$$

라 정의하자. 두 점 $\mathrm{A}(1, 0)$과 $\mathrm{P}_n(n, 2^n)$에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} d(\mathrm{A}, \mathrm{P}_n)$의 값은 ?

① $2^9 + 45$ ② $2^{10} + 43$ ③ $2^{10} + 45$
④ $2^{11} + 43$ ⑤ $2^{11} + 45$

120711가 외 1회 # 5486

32번

다음은 네 자연수 $1, 2, 3, 4$를 한 번씩 사용하여 만든 네 자리 정수를 크기 순으로 나열한 것이다.

1234	1243	$\cdots$	1423	1432
2134	2143	$\cdots$	2413	2431
3124	3142	$\cdots$	3412	3421
4123	4132	$\cdots$	4312	4321

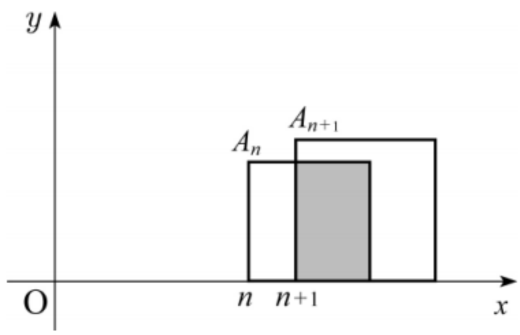
위의 모든 수들의 총합은 ?

① 88880 ② 77770 ③ 66660
④ 55550 ⑤ 44440

051006나 # 7251

33번

n이 3이상의 자연수일 때, 네 점 $(n, 0)$, $\left(\frac{3n}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3n}{2}, \frac{n}{2}\right)$, $\left(n, \frac{n}{2}\right)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 A_n이라 하자. 두 정사각형 A_n, A_{n+1}이 겹치는 부분(어두운 부분)의 넓이를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=3}^{10} \frac{1}{a_n}$의 값은?



① $\frac{113}{45}$ ② $\frac{116}{45}$ ③ $\frac{118}{45}$
④ $\frac{121}{45}$ ⑤ $\frac{124}{45}$

100311나 # 5801

34번

첫째항이 400, 공차가 -5인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{59}} + \sqrt{a_{61}}}$$

의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

071005가 외 1회 # 6436

35번

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) S_n은 n에 대한 이차식이다.
(나) $S_{10} = S_{50} = 10$
(다) S_n은 $n = 30$에서 최댓값 410을 갖는다.

50보다 작은 자연수 m에 대하여 $S_m > S_{50}$을 만족시키는 m의 최솟값을 p, 최댓값을 q라 할 때, $\sum_{k=p}^{q} a_k$의 값은?

① 39 ② 40 ③ 41 ④ 42 ⑤ 43

201017나 # 10946

36번

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2$ 일 때, a_{50} 의 값을 구하시오.

160323나 # 2796

37번

x에 대한 이차방정식 $x^2 + 4x - (2n-1)(2n+1) = 0$의 두 근 α_n, β_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$의 값은 ?

① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{20}{21}$ ③ $\frac{31}{21}$ ④ $\frac{40}{21}$ ⑤ $\frac{50}{21}$

060428나 # 7401

38번

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[0,\ 2]$ 에서 $f(x) = |x-1|$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+2)$ 를 만족시킬 때, 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = x + f(x)$$

라 하자. 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b 의 순서쌍 $(a,\ b)$ 의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n$ 의 값을 구하시오.

(가) $n \le a \le n+2$
(나) $0 < b \le g(a)$

160330가 # 2833

39번

좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 점 P_n , Q_n 을 다음 규칙대로 잡는다.

(가) 점 P_1 의 좌표는 $(0,0)$ 이다.
(나) 점 P_n 을 x 축의 방향으로 n 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동시킨 점은 Q_n 이다.
(다) 점 Q_n 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨 점은 P_{n+1} 이다.

점 Q_n 의 좌표를 (a_n, b_n) 이라 할 때, $a_{21}+b_{21}$ 의 값을 구하시오.

130330나 # 3433

40번

다음과 같이 어떤 규칙에 의하여 0부터 6까지의 정수를 각 칸에 써 넣을 때, 위로부터 12번째, 왼쪽에서 3번째 킨에 있는 수는 ?

4	5	6	0	1	2	$\cdots$
0	1	2	3	4	5	$\cdots$
3	4	5	6	0	1	$\cdots$
6	0	1	2	3	4	$\cdots$
2	3	4	5	6	0	$\cdots$
5	6	0	1	2	3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

050426나 # 7098

41번

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n + 2^n$ 일 때, a_6 의 값은?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

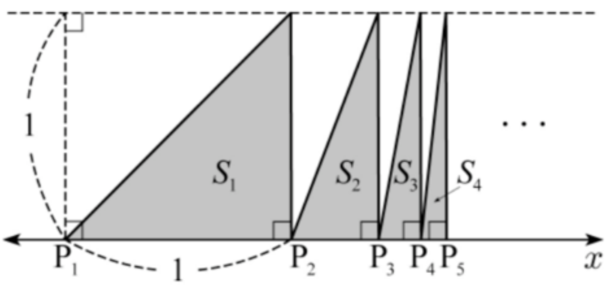
160706나 # 2869

42번

수직선 위에 점 $\mathrm{P}_n(n-1,2,3,\cdots)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $\mathrm{P}_1(0)$이다.
(나) $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=1$이다.
(다) $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \dfrac{n-1}{n+1} \times \overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$ $(n=2,3,4,\cdots)$

선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$을 밑변으로 하고 높이가 1인 직각삼각형의 넓이를 S_n이라 하자. $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{50}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



110330나 # 5619

43번

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} k \log a_k = n^2 - n \,(\, n \geq 1\,)$$

이 성립한다. $\log a_m$ 의 가수가 0.9 일 때, m 의 값을 구하시오.

150329나 # 3012

44번

일반항이 $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$인 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_n 의 값이 6 의 배수인 항들을 작은 것부터 차례로 나열한 수열을 $\{b_n\}$ 이라 할 때, 다음은 $\sum_{k=1}^{4n} b_k$ 를 구하는 과정이다.

$a_{n+12} - a_n = \boxed{(가)}$ 이므로 $a_{n+12} - a_n$ 은 6 의 배수이다. $\cdots\cdots$ ㉠

a_1 , a_2 , a_3 , $\cdots$, a_{12} 중에서 6 의 배수인 것은

$a_3 = 6$, $a_8 = 36$, $a_{11} = 66$, $a_{12} = 78$ 이므로

$b_1 = a_3$, $b_2 = a_8$, $b_3 = a_{11}$, $b_4 = a_{12}$ 이다. $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$b_{4n-3} = a_{12n-9} = 6(4n-3)(3n-2)$

$b_{4n-2} = a_{12n-4} = 6(3n-1)(4n-1)$

$b_{4n-1} = \boxed{(나)}$

$b_{4n} = 6n(12n+1)$

따라서 $\sum_{k=1}^{4n} b_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{(다)}\right) = \square$

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(k)$ 라 할 때, $f(1)+g(2)+h(1)$ 의 값은?

① 552 ② 558 ③ 564 ④ 570 ⑤ 576

130317가 외 1회 # 3450

45번

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

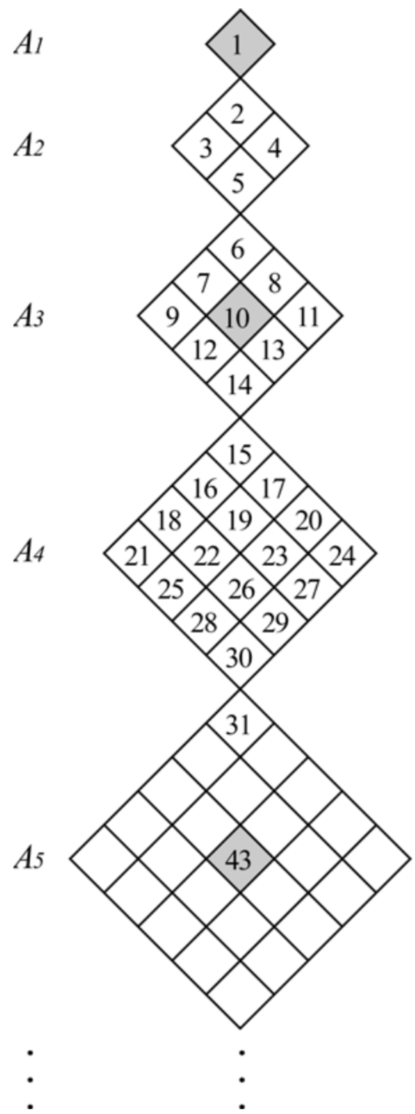
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \log_2(n^2+n)$$

일 때, $\sum_{n=1}^{15} a_{2n+1}$ 의 값을 구하시오.

181025나 # 2528

46번

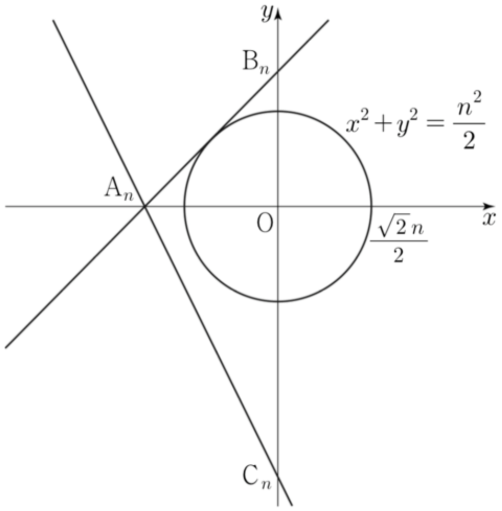
그림과 같이 크기가 같은 정사각형 1개, 4개, 9개, $\cdots$로 만들어진 도형 $A_1, A_2, A_3, \cdots$이 이어져 있다. 각 정사각형에 자연수를 규칙적으로 적어 나갈 때, $A_1, A_3, A_5, \cdots$에는 정중앙(어두운 부분)에 적힌 수가 있다. 예를 들면, A_3의 정중앙에 적힌 수는 10이고, A_5의 정중앙에 적힌 수는 43 이다. 이때 A_9의 정중앙에 적힌 수를 구하시오.



080330나 # 6193

47번

그림과 같이 자연수 n 에 대하여 기울기가 1 이고 y 절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=\dfrac{n^2}{2}$ 에 접할 때, 이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A_n, B_n 이라 하자. 점 A_n 을 지나고 기울기가 -2 인 직선이 y 축과 만나는 점을 C_n 이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$ 과 그 내부의 점들 중 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n 이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오.



170429나 # 2622

48번

$(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+11x^{10})^2$ 의 전개식에서 x^{10} 의 계수를 구하시오.

110423나 # 5662

49번

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 2,\ \sum_{k=1}^{10} b_k = 3$$

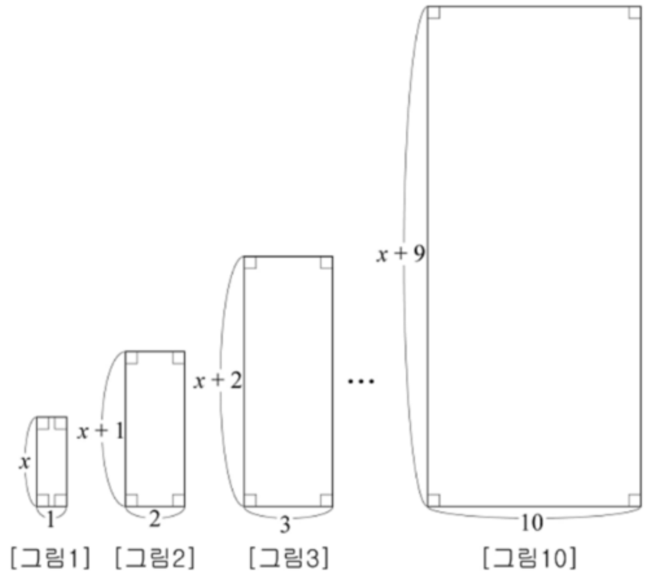
일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k)$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

180704나 # 2447

50번

그림과 같이 [그림1], [그림2], [그림3], $\cdots$, [그림10]의 직사각형의 넓이를 각각 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$이라 하자.
$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 880$일 때, x의 값을 구하시오.



080723나 # 6285

51번

자연수 n 에 대하여 2^{n-1} 의 모든 양의 약수의 합을 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{8} a_n$ 의 값을 구하시오.

160325나 # 2798

52번

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{k-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

a_n을 3으로 나눈 나머지를 b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{30} b_n$의 값은?

① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

091004나 # 6133

53번

다음과 같이 $1, 3, 5, 7, 9$를 규칙적으로 나열했을 때, 제 20행에 나열된 수들의 합을 구하시오.

제1행				1			
제2행			3	5	7		
제3행		9	1	3	5	7	
제4행	9	1	3	5	7	9	1
⋮				⋮			

060430나 # 7403

54번

수열 $\{a_n\}$이

$$a_{2n-1} = a_{2n} = n \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{S_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 240항까지의 값 중에서 3의 배수를 값으로 하는 모든 항의 개수를 구하시오.

120427가 외 1회 # 5457

55번

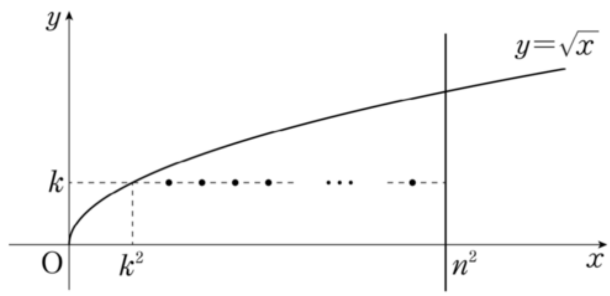
다음은 2 이상의 자연수 n 에 대하여 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x = n^2$ 으로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수 a_n 을 구하는 과정이다.

$n = 2$ 일 때, 곡선 $y = \sqrt{x}$, x 축 및 직선 $x = 4$ 로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은 $(2, 1)$, $(3, 1)$ 이므로

$a_2 = \boxed{(가)}$

이다.

3 이상의 자연수 n 에 대하여 a_n 을 구하여 보자.



위의 그림과 같이 $1 \leq k \leq n-1$ 인 정수 k 에 대하여 주어진 도형의 내부에 있는 점 중에서 x 좌표가 정수이고, y 좌표가 k 인 점은

$(k^2+1, k), (k^2+2, k), \cdots, (\boxed{(나)}, k)$

이므로 이 점의 개수를 b_k 라 하면

$b_k = \boxed{(나)} - k^2$

이다. 따라서

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \boxed{(다)}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p 라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $p + f(4) + g(6)$ 의 값은?

① 131 ② 133 ③ 135 ④ 137 ⑤ 139

180318나 # 2311

56번

모든 항이 양의 실수인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_3=7a_3$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{a_n}$ 의 값을 구하시오.

160327가 # 2830

57번

다음과 같이 제 n 행에 첫째항이 $\dfrac{1}{2^n}$ 이고 공차가 $\dfrac{1}{2^n}$ 인 등차수열의 항을 첫째항부터 차례로 (2^n-1) 개 나열한다.

제 1 행 $\quad \dfrac{1}{2}$

제 2 행 $\quad \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{2}{2^2}, \dfrac{3}{2^2}$

제 3 행 $\quad \dfrac{1}{2^3}, \dfrac{2}{2^3}, \dfrac{3}{2^3}, \dfrac{4}{2^3}, \dfrac{5}{2^3}, \dfrac{6}{2^3}, \dfrac{7}{2^3}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

제 n 행 $\quad \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{2}{2^n}, \dfrac{3}{2^n}, \dfrac{4}{2^n}, \cdots, \dfrac{2^n-2}{2^n}, \dfrac{2^n-1}{2^n}$

위와 같이 나열할 때, 제 n 행에서 $\dfrac{1}{2}$ 보다 큰 수의 개수를 a_n 이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n$ 의 값은?

① 1003 ② 1008 ③ 1013 ④ 1018 ⑤ 1023

140716나 # 3299

58번

x 에 대한 이차방정식 $nx^2-(2n^2-n)x-5=0$ 의 두 근의 합을 a_n (n 은 자연수)라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k$ 의 값은?

① 88 ② 91 ③ 94 ④ 97 ⑤ 100

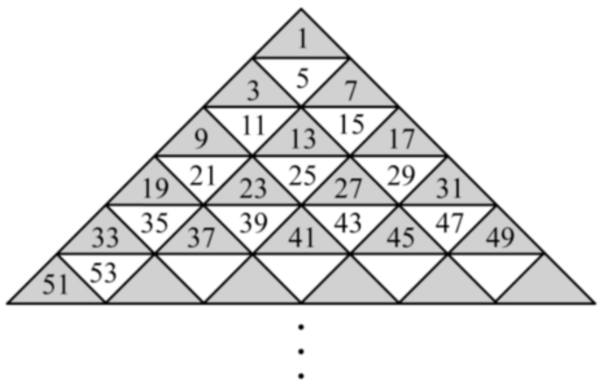
170310나 # 2543

59번

그림과 같이 홀수를 삼각형 모양으로 배열하고 어두운 부분에 있는 수를 크기순으로 나열하여 수열

$$1, 3, 7, 9, 13, 17, 19, \cdots$$

을 만들었다. 이 수열의 제 66항을 구하시오.



070324가 외 1회 # 6362

60번

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = \dfrac{n^2+3n}{2}$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{7} 2^{a_n}$ 의 값을 구하시오.

130427가 외 1회 # 3520

61번

어떤 학생이 계발활동 시간에 목걸이를 만들고자 한다. 그림과 같이 세 종류의 인조 보석 , ,  을 사용하여 처음에는  1 개,  1개,  2개를 꿰고 난 뒤, 다음 규칙을 순서대로 반복한다.

I.  는 바로 전 단계에 꿴  의 개수보다 1개 더 많이 꿴다.

II.  는 바로 전 단계에 꿴  의 개수보다 2개 더 많이 꿴다.

III.  는 I과 II에서 꿴  과  의 개수를 더한 만큼 꿴다.

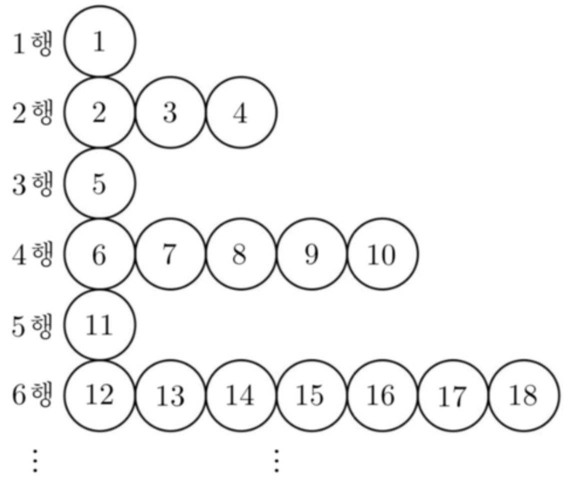
인조 보석 200개를 사용하여 목걸이를 만들었을 때, 목걸이에 있는  의 개수를 구하시오.

070425가 외 1회 # 6408

62번

그림과 같이 자연수 n 에 대하여 $(2n-1)$ 행에는 1 개, $2n$ 행에는 $(2n+1)$ 개의 원을 나열하고, 각 원 안에는 1 부터 연속된 자연수를 하나씩 다음과 같은 규칙에 따라 써 넣는다.

(가) 1행의 원 안에는 1을 써 넣는다.
(나) $2n$행의 모든 원 안에는 $(2n-1)$행에 써 넣은 수보다 1만큼 큰 수부터 차례로 써 넣는다.
(다) $(2n+1)$행의 원 안에는 $2n$행의 마지막에 써 넣은 수보다 1만큼 큰 수를 써 넣는다.

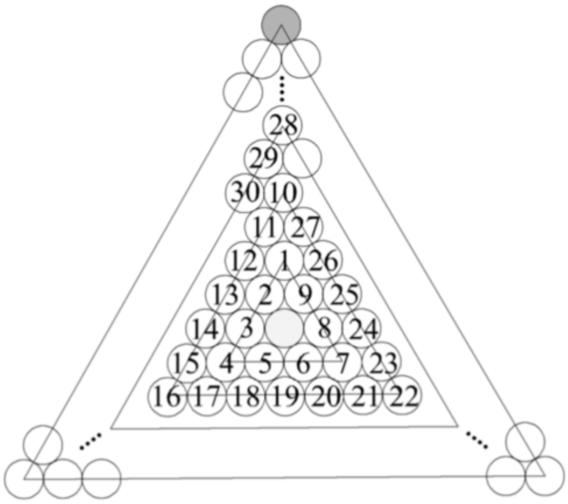


20행에 나열된 원 안에 써 넣은 모든 수의 합을 S 라 할 때, $\dfrac{1}{10}S$ 의 값을 구하시오.

140430나 # 3283

63번

그림과 같이 맨 안쪽 정삼각형에서부터 바깥쪽 정삼각형의 순서로 정삼각형의 변을 따라 자연수가 적힌 원을 차례로 배열한다. 이때 10 번째 정삼각형의 맨 위의 꼭짓점에 있는 원에 적힌 수는?



① 401 ② 406 ③ 411 ④ 416 ⑤ 421

050314나 # 7028

64번

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 3^n - 1$ 일 때, a_3 의 값을 구하시오.

150422나 # 3065

65번

아래에서 제 n행은 n의 양의 약수를 나열한 것이다. 제 1행부터 제 20행까지 나열된 수의 개수를 구하시오.

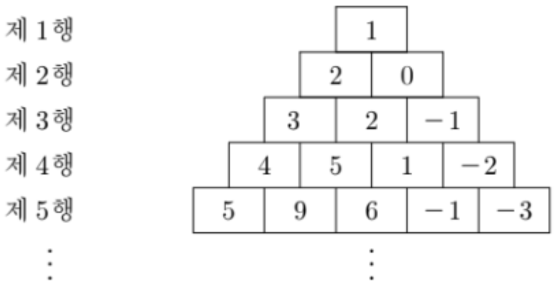
제 1행	1							
제 2행	1	2						
제 3행	1		3					
제 4행	1	2		4				
제 5행	1				5			
제 6행	1	2	3			6		
제 7행	1						7	
제 8행	1	2		4				8
$\vdots$				$\vdots$				

071023가 외 1회 # 6454

66번

그림과 같이 제 1행에는 1개, 제 2행에는 2개, $\cdots$, 제 n행에는 n개의 직사각형을 나열하고 그 안에 다음과 같은 규칙으로 수를 적었다.

(가) 제 1행의 직사각형에는 1을 적는다.
(나) 제 $n+1$행의 왼쪽 끝 직사각형에는 제 n행의 왼쪽 끝 직사각형에 적힌 수보다 1이 큰 수를 적는다.
(다) 제 $n+1$행의 오른쪽 끝 직사각형에는 제 n행의 오른쪽 끝 직시각형에 적힌 수보다 1이 작은 수를 적는다.
(라) 제 $n+1$ 행의 안쪽 직사각형에는 그 직사각형에 인접한 제 n행의 두 직사각형에 적힌 수의 합을 적는다.



제 n행의 맨 왼쪽으로부터 k 번째 직사각형에 적힌 수를 $<n, k>$로 나타내자. 예를 들어 $<4, 2>=5$ 이다. 이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $<10, 1>+<10, 10>=2$
ㄴ. $<11, 2>+<11, 10>=20$
ㄷ. $<12, 3>+<12, 4>+\cdots+<12, 10>=2024$

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ ④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

101017가 외 1회 # 5926

67번

다음과 같이 규칙적으로 나열된 수가 있다.

1행 1
2행 $\frac{1}{3}$ 1
3행 $\frac{1}{3^2}$ $\frac{1}{3}$ 1
4행 $\frac{1}{3^3}$ $\frac{1}{3^2}$ $\frac{1}{3}$ 1
$\vdots$ $\vdots$
10행 $\frac{1}{3^9}$ $\frac{1}{3^8}$ $\frac{1}{3^7}$ $\cdots$ 1

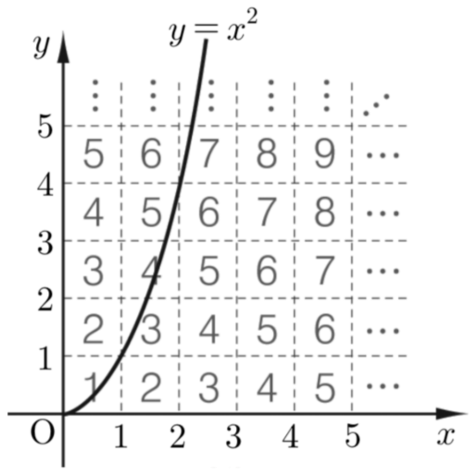
1행부터 10행까지의 수를 모두 더한 값은?

① $\frac{3}{4}\left\{19+\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\right\}$ ② $\frac{3}{2}\left\{19+\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\right\}$
③ $\frac{3}{4}\left\{19+\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$ ④ $\frac{3}{2}\left\{19+\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$
⑤ $\frac{3}{2}\left\{19+\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\right\}$

100417나 # 5850

68번

그림과 같이 좌표평면의 제 1사분면을 한 변의 길이가 1인 정사각형들로 나누어 자연수를 배열하였다. $y=x^2(0 \leq x \leq 10)$의 그래프가 지나는 한 변의 길이가 1인 정사각형에 배열된 수들의 합은? (단, 그래프가 정사각형의 내부를 지나지 않는 경우는 제외한다.)

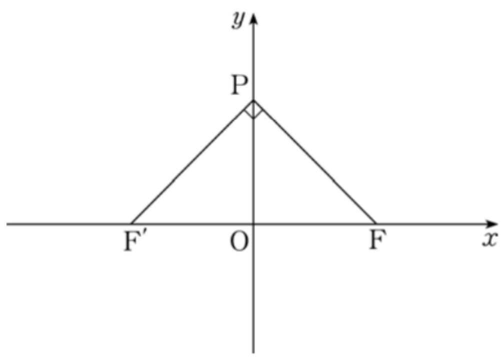


① 5625 ② 5640 ③ 5665 ④ 5680 ⑤ 5695

090415가 외 1회 # 6017

69번

$[13 \sim 14]$ 그림과 같이 좌표평면에 x축 위의 두 점 F, F'과 점 $\mathrm{P}(0, n)$ $(n>0)$이 있다. 삼각형 $\mathrm{PF'F}$가 $\angle \mathrm{FPF'} = \dfrac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형일 때, 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



n 이 자연수일 때 삼각형 $\mathrm{PF'F}$ 의 세 변 위에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n 이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n$ 의 값은?

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

161013가 # 2966

70번

첫째항이 양수이고 공비가 -2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{9}(|a_k|+a_k)=66$$

일 때, a_1의 값은?

① $\dfrac{3}{31}$ ② $\dfrac{5}{31}$ ③ $\dfrac{7}{31}$ ④ $\dfrac{9}{31}$ ⑤ $\dfrac{11}{31}$

200316나 # 8862

71번

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a_n은 자연수이다.
(나) $|a_n-\sqrt{n}|<\dfrac{1}{2}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{90} a_n$의 값을 구하시오.

120327나 # 5375

72번

자연수 n 에 대하여 다음과 같이 모든 자연수를 작은 것부터 n 행에 n 개씩 차례로 나열하였다. 이때 n 행에 있는 n 의 배수를 a_n 이라 하자. 예를 들어 $a_2 = 2$, $a_5 = 15$ 이다.

1행	1					
2행	2	3				
3행	4	5	6			
4행	7	8	9	10		
5행	11	12	13	14	15	
6행	16	17	18	19	20	21
$\vdots$			$\vdots$			$\ddots$

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{30} a_n$ 의 값은?

① 4800 ② 4820 ③ 4840 ④ 4860 ⑤ 4880

150320가 외 1회 # 3703

73번

수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_n| + a_{n+1} = n + 6 \ (n \geq 1)$
(나) $\sum_{n=1}^{40} a_n = 520$

$\sum_{n=1}^{30} a_n$ 의 값을 구하시오.

151030나 # 3163

74번

$\sum_{k=1}^{5} (2^k + 5k + 1)$의 값을 구하시오.

060318가 외 1회 # 7295

75번

그림은 직사각형 모양을 이루고 있는 (5×100)개의 칸에 다음 규칙에 따라 수를 나열한 것이다.

(가) 제 1행에는 $1, 2, 3, \cdots, 100$을 차례로 나열하고 각 행의 첫 칸에는 모두 1을 나열한다.
(나) 그림에 있는 (2×2)개의 칸으로 이루어진 임의의 직사각형 $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array}$에서 등식 $d = |b - c|$가 성립하도록 한다.
예를 들면 $\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline\end{array}$에서 $3 = |5 - 2|$가 성립한다.

제 1행	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	100
제 2행	1	1	2	2	3	3	$\cdots$	50
제 3행	1	0	2	0	3	0	$\cdots$	0
제 4행	1	1	1	1	2	2	$\cdots$	25
제 5행	1	0	1	0	2	0	$\cdots$	0

이때 제 5행(어두운 부분)에 나열된 100개의 수의 합을 구하시오.

090330나 # 6002

76번

수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 36$
(나) $a_{n+1} - a_n = 2n - 14\,(n \geq 1)$

$a_n = 6$ 일 때, 모든 n 의 값의 합을 구하시오.

160426나 # 2859

77번

자연수 n 에 대하여 다음 시행을 한다.

n 이 홀수이면 n 에서 1 을 빼고,
n 이 짝수이면 n 을 2 로 나눈다.

자연수 n 이 1 이 될 때까지 반복한 시행의 횟수를 a_n 이라 정의하자. 예를 들어 $a_7 = 4$, $a_8 = 3$ 이다. $S_n = \displaystyle\sum_{k=2^n}^{2^n+3} a_k$ 라 할 때, S_{50} 의 값은? (단, $a_1 = 0$ 이다.)

① 200 ② 201 ③ 202 ④ 203 ⑤ 204

130321가 외 1회 # 3454

78번

집합 $U = \{x|x$는 30이하의 자연수$\}$ 의 부분집합 $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\ ,\ a_{15}\}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)집합 A 의 임의의 두 원소 a_i , a_j ($i \neq j$)에 대하여
$a_i + a_j \neq 31$
(나) $\displaystyle\sum_{i=1}^{15} a_i = 264$

$\dfrac{1}{31}\displaystyle\sum_{i=1}^{15} a_i^2$ 의 값을 구하시오.

160330나 # 2803

79번

자연수 m에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n = \left[\dfrac{n}{m}\right]$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

<보기>

ㄱ. $m = 2$일 때 $a_5 = 2$ 이다.

ㄴ. $m = 3$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} a_k = 1683$ 이다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{mn} a_k = \dfrac{n(mn - m + 2)}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄷ ④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

100412가 외 1회 # 5822

80번

함수 $f(x)=x+\log_{10}x$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{100}[f(n)]$$

의 값은 ? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 5055 ② 5060 ③ 5084 ④ 5128 ⑤ 5142

050310가 # 6983

81번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여,

$a_1a_2=a_{10}, a_1+a_9=20$ 일 때,

$(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)$ 의 값은?

① 494 ② 496 ③ 498 ④ 500 ⑤ 502

140414나 # 3267

82번

1부터 99까지의 홀수 중 서로 다른 10개를 택하여 그들의 합을 S라 하자. 이러한 S의 값 중 서로 다른 것을 작은 수부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, \cdots$이라 할 때, a_{100}의 값은 ?

① 268 ② 278 ③ 288 ④ 298 ⑤ 308

050318나 # 7033

83번

n 이 자연수일 때, x 에 대한 방정식

$$\sum_{k=0}^{n}(x-k)^2=\sum_{k=1}^{n}(x+k)^2$$

의 0 이 아닌 해를 $x=a_n$ 이라 하자. a_{10} 의 값은?

① 180 ② 200 ③ 220 ④ 240 ⑤ 260

130315나 # 3418

84번

$f(n)=a^{\frac{1}{n}}$ (단, $a>0, a\neq 1$)일 때

$$f(2\cdot 3)\times f(3\cdot 4)\times\cdots\times f(9\cdot 10)=f(k)$$

를 만족하는 상수 k에 대하여 $10k$의 값을 구하시오.

060322나 # 7318

85번

첫째항이 $\frac{1}{5}$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (a_n\leq 1)\\ a_n-1 & (a_n>1)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{20}a_n$ 의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

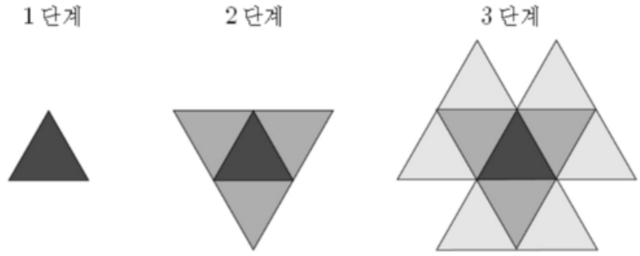
171013나 # 2756

86번

그림과 같이 넓이가 1인 정삼각형 모양의 타일을 다음과 같이 규칙으로 붙인다.

[1 단계] : 정삼각형 모양의 타일을 한 개 붙인다.
[n 단계] : $n-1$단계에서 붙여진 타일의 바깥쪽 테두리의 각 변에 정삼각형 모양의 타일을 붙인다.

이와 같이 10단계를 시행했을 때, 타일로 덮인 부분의 전체의 넓이를 구하시오.



090720나 # 6094

87번

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 양수이고 공비가 1 보다 큰 등비수열이다. $a_3a_5=a_1$ 일 때, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 를 만족시키는 자연수 n 의 값을 구하시오.

151026가 # 3189

88번

좌표평면에서 연립부등식 $\begin{cases} 2x-y \geq 0 \\ y>0 \end{cases}$ 이 나타내는 영역을 S라 하자. 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$과 영역 S가 만나는 점 중 y좌표가 정수인 모든 점들의 x좌표와 y좌표의 합을 a_n이라 하자. $a_{10}-a_5$의 값은?

① 300 ② 305 ③ 310
④ 315 ⑤ 320

201010나 # 10939

89번

수열 $\{a_n\}$에서

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

일 때, $30a_{30}-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{29})$의 값을 구하시오.

091024가 외 1회 # 6125

90번

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} a_n = 20$일 때, $\sum_{n=1}^{10}(a_n-1)$의 값은?

① 2 ② 6 ③ 10 ④ 14 ⑤ 18

190404나 # 4403

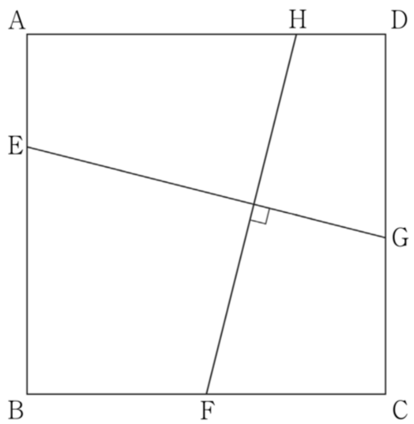
91번

자연수 n 에 대하여 곡선 $y=\frac{6^n}{x}$ 위의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오.

150427나 # 3070

92번

그림과 같이 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $2n$인 정사각형 ABCD가 있고, 네 점 $\mathrm{E,F,G,H}$가 각각 네 변 $\mathrm{AB,BC,CD,DA}$ 위에 있다. 선분 HF의 길이는 $\sqrt{4n^2+1}$이고 선분 HF와 선분 EG가 서로 수직일 때, 사각형 EFGH의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10} S_n$의 값은?



① 765 ② 770 ③ 775 ④ 780 ⑤ 785

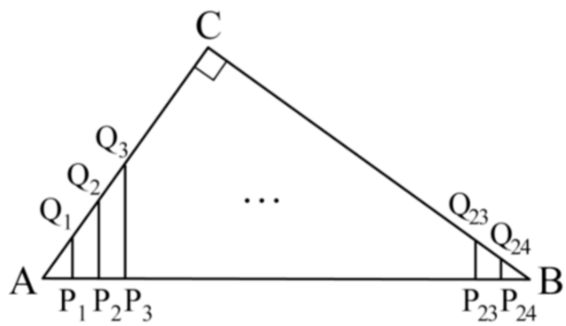
190420나 # 4419

93번

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=15, \overline{\mathrm{BC}}=20$이고, $\angle \mathrm{C}=90^\circ$인 직각삼각형 ABC가 있다.
변 AB를 25등분하는 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_{24}$를 지나 변 AB에 수직인 직선을 그어 변 AC 또는 변 CB와 만나는 점을 각각 $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \cdots, \mathrm{Q}_{24}$라 하자

$$\overline{\mathrm{P_1Q_1}}+\overline{\mathrm{P_2Q_2}}+\overline{\mathrm{P_3Q_3}}+\cdots+\overline{\mathrm{P_{24}Q_{24}}}$$

의 값을 구하시오.



070330나 # 6383

94번

첫째항이 2, 공차가 4 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 4n^3+3n^2-n$ 일 때, b_5 의 값을 구하시오.

180726나 # 2469

95번

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{20} a_n = p$ 라 할 때, 등식

$$2a_n + n = p\,(\,n \geq 1\,)$$

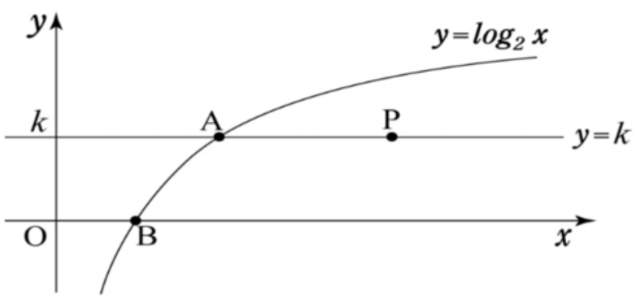
가 성립한다. a_{10} 의 값은? (단, p 는 상수이다.)

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{11}{12}$ ⑤ 1

150318나 # 3001

96번

그림과 같이 함수 $y = \log_2 x$의 그래프와 직선 $y = k$(k는 자연수), x축과의 교점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y = k$ 위의 한 점 P에 대하여 직선 OP가 $\angle$AOB를 이등분할 때, 선분 AP의 길이를 $f(k)$라 하자. $\sum_{k=1}^{4} \{f(k)\}^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점)



110725가 외 1회 # 5692

97번

첫째항이 50, 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{T_n\}$ 을

$$T_n = |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n|$$

이라 하자. 수열 $\{T_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $T_{16} < T_{17}$
(나) $T_{17} > T_{18}$

$T_n > T_{n+1}$ 을 만족시키는 n 의 최댓값을 구하시오.

140329가 # 3252

98번

수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = 2n - 3$ 일 때, $\sum_{k=2}^{m} a_{k+1} = 48$ 을 만족시키는 m 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

160409나 # 2842

99번

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=2, a_n+a_{n+1}=3n(n=1,2,3,\cdots)$$

으로 정의된다. 이때, 두 수

$$P=a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{19}$$
$$Q=a_2+a_4+a_6+a_8+\cdots+a_{20}$$

에 대하여 $P-Q$의 값을 구하시오.

051022나 # 7260

100번

첫째항이 60 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{T_n\}$ 을

$$T_n=|a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n|$$

이라 하자. 수열 $\{T_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $T_{19}<T_{20}$
(나) $T_{20}=T_{21}$

$T_n>T_{n+1}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오.

140330나 # 3223

101번

등식 $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k}=a+\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k+1}$을 만족시키는 a의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

190309나 # 4171

102번

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가)점 A의 좌표는 $(1,0)$ 이다.
(나)점 P_n은 선분 OA 를 $2^n:1$ 로 내분하는 점이다.

$l_n=\overline{\mathrm{OP}_n}$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{l_n}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.)

① $10-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ② $10+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ③ $11-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
④ $11+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ ⑤ $12-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

171015나 # 2758

103번

그림과 같이 1부터 100까지의 자연수가 배열되어 있는 숫자판에 9개의 수 $(1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23)$를 포함하는 어두운 정사각형이 놓여있다. 이 어두운 정사각형을 오른쪽으로 m칸, 아래쪽으로 n칸 이동하였을 때, 이동된 정사각형 내부의 자연수의 합을 $S(m, n)$이라 하자.
예를 들면 $S(2, 1)$은 9개의 수 $(13, 14, 15, 23, 24, 25, 33, 34, 35)$의 합이다.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

이때 $S(m, n) = 513$을 만족하는 m, n에 대하여 $m + n$의 값은 ?
(단, m, n은 7이하의 자연수)

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

050312가 외 1회 # 6986

104번

n이 2이상의 자연수일 때, n의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=2}^{m} f(n) = 33$을 만족시키는 자연수 m의 값은?

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

101008나 # 5945

105번

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3+\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n\ge n$$

을 만족시킬 때, 다음은 부등식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n\ge \boxed{\text{(가)}}$$

이 성립함을 증명한 것이다.

<증명>

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)(1\cdot 2a_1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)(3\cdot 4a_2)$

$\quad+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)(5\cdot 6a_3)+\cdots$

$\quad+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{(2n-1)\cdot 2na_n\}$

$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(1\cdot 2a_1)$

$\quad+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2)$

$\quad+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)(1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+5\cdot 6a_3)$

$\quad+\cdots$

$\quad+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\{1\cdot 2a_1+3\cdot 4a_2+$

$\quad\cdots+(2n-1)\cdot 2na_n\}$

$\ge\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)$

$+3\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\boxed{\text{(나)}}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+$

$\quad\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$

$\quad\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\boxed{\text{(다)}}$

$=\boxed{\text{(가)}}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$
(나): $\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$
(다): $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

② (가): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$
(나): $n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$
(다): $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

③ (가): $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$
(나): $n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$
(다): $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

④ (가): $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$
(나): $n\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$
(다): $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

⑤ (가): $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{n+k}$
(나): $\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)$
(다): $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$

110313가 외 1회 # 5587

106번

함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \leq x < 1$ 에서 $f(x) = |2x|$ 이다.
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) = f(x)$ 이다.

자연수 n 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 함수 $y = \log_{2n} x$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{7} a_n$ 의 값을 구하시오.

150429나 # 3072

107번

1부터 연속된 자연수를 아래와 같이 제 n행에는 n개의 자연수가 오도록 나열하였다.

제 1행 1
제 2행 $2\ 3$
제 3행 $4\ 5\ 6$
제 4행 $7\ 8\ 9\ 10$
제 5행 $11\ 12\ 13\ 14\ 15$
제 6행 $16\ 17\ 18\ 19\ 20\ 21$
$\vdots$ $\vdots$

제 19행에 나열된 모든 자연수의 평균을 구하시오.

110325나 # 5614

108번

함수 $f(x) = x^2 + x - \dfrac{1}{3}$ 에 대하여 부등식

$$f(n) < k < f(n) + 1 \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시키는 정수 k 의 값을 a_n 이라 하자. $\sum_{n=1}^{100} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{q}{p}$ 일 때, $p + q$의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

180327나 # 2320

109번

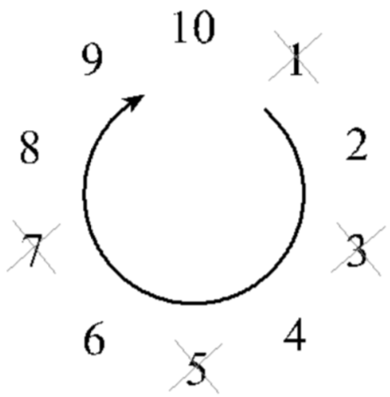
자연수 n을 이진법의 수로 나타내었을 때, 그 이진법의 수가 k자리의 수이면 $a_n = k$로 정의한다. 예를 들면 $7 = 111_{(2)}$ 이므로 $a_7 = 3$ 이고, $8 = 1000_{(2)}$ 이므로 $a_8 = 4$ 이다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 20항까지의 합을 구하시오.

060321나 # 7327

110번

그림과 같이 1부터 10까지의 자연수가 시계방향으로 둥글게 놓여있다. 맨 처음 1을 지우고 2를 건너뛰어 3을 지운다. 다시 4를 건너 뛰어 5를 지운다. 이와 같이 한 개의 수를 지우고 난 다음 아직 지워지지 않고 남아있는 수 중에서 한 개의 수를 건너뛰어 그 다음에 남아있는 수를 지우는 시행을 반복하면 $1, 3, 5, 7, 9, 2, 6, 10, 8$이 차례로 지워지고 마지막에 4가 남는다.

1부터 n까지의 자연수를 시계방향으로 둥글게 놓고 이와 같은 시행을 반복할 때, k번째 $(1 \le k < n)$에 지워지는 수를 ${}_nA_k$로 나타내자. 예를 들면 ${}_{10}A_6 = 2$이다. 이때, <보기>중 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보기>

ㄱ. n이 홀수일 때, ${}_nA_k = n$이면 $k = \dfrac{n+1}{2}$이다.

ㄴ. n이 짝수일 때, ${}_nA_k = n$이면 $k = \dfrac{n}{2} + 1$이다.

ㄷ. $n = 2^6$일 때, 시행 후 마지막에 남는 수는 2^6이다.

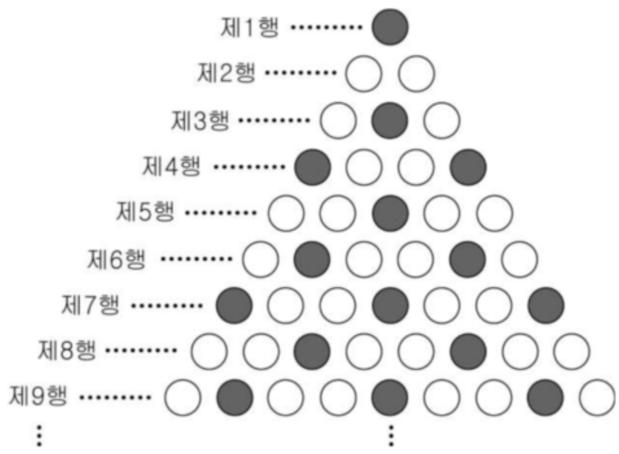
① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ,ㄴ　⑤ ㄱ,ㄷ

051012가 외 1회　# 7230

111번

그림은 다음과 같은 규칙으로 제 n행에 n개의 바둑돌을 놓은 것이다. $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(가) 제 1행에는 검은 돌, 제 2행에는 흰 돌을 놓는다.
(나) 각 행에 놓은 바둑돌은 좌우대칭이 되도록 한다.
(다) 각 행에서 두 검은 돌 사이에는 흰 돌을 두 개 놓는다.
(라) 각 행에서 흰 돌은 세 개 이상 연속되지 않게 놓는다.



제 n행에 놓인 검은 돌의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값은?

① 135　② 140　③ 145　④ 150　⑤ 155

100317가 외 1회　# 5782

112번

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{99}{100}$ 일 때, 자연수 n 의 값을 구하시오.

140422나 # 3275

113번

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 2n^2 + n$일 때, $a_3 + a_4 + a_5$의 값은?

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

191005나 # 8374

114번

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = 9, \sum_{n=1}^{10} b_n = 7$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10} (3a_n + b_n - 2)$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

180410나 # 2363

115번

수열 $\{a_n\}$이

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7 \\ a_{k+4} = 2a_k \ \ (k = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

으로 정의될 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오.

080424가 외 1회 # 6217

116번

자연수 n 에 대하여 다음과 같은 규칙으로 제 n 행에 n 개의 정수를 적는다.

(가) 제 1 행에는 100 을 적는다.
(나) 제 $(n+1)$ 행의 왼쪽 끝에 적힌 수는 제 n 행의 오른쪽 끝에 적힌 수보다 1 이 작다.
(다) 제 n 행의 수들은 왼쪽부터 순서대로 공차가 -1 인 등차수열을 이룬다. ($n \geq 2$)

제 n 행에 적힌 모든 수의 합을 a_n 이라 할 때, $a_{13}-a_{12}$ 의 값은?

$$\begin{array}{llllll} \text{제 } 1 \text{ 행} & 100 & & & & \\ \text{제 } 2 \text{ 행} & 99 & 98 & & & \\ \text{제 } 3 \text{ 행} & 97 & 96 & 95 & & \\ \text{제 } 4 \text{ 행} & 94 & 93 & 92 & 91 & \\ \text{제 } 5 \text{ 행} & 90 & 89 & 88 & 87 & 86 \\ \vdots & & \vdots & & & \ddots \end{array}$$

① -136 ② -134 ③ -132
④ -130 ⑤ -128

140316가 외 1회 # 3239

117번

수열 $\{a_n\}$은 다음과 같이 3으로 나누어 떨어지지 않는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열한 것이다.

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, \cdots$$

이때 $\sum_{k=1}^{30} a_k$의 값은 ?

① 675 ② 685 ③ 695
④ 705 ⑤ 715

090310나 # 5992

118번

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 30$일 때, $\sum_{k=1}^{10} (k+a_k)$의 값을 구하시오.

200425나 # 9105

119번

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$n = 2^p \times q \,(\, p \text{ 는 음이 아닌 정수}, q \text{ 는 홀수})$$

일 때, $a_n = p$ 이다. 예를 들어, $20 = 2^2 \times 5$ 이므로 $a_{20} = 2$ 이다. $a_m = 1$ 일 때,

$$a_m + a_{2m} + a_{3m} + a_{4m} + a_{5m} + a_{6m} + a_{7m} + a_{8m} + a_{9m} + a_{10m}$$

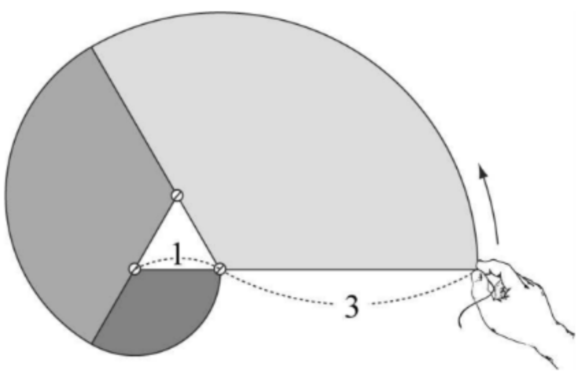
의 값은?

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

161018나 # 2941

120번

한 변의 길이가 1인 정 n각형의 꼭짓점에 못을 박아 놓는다. 실을 한 꼭짓점에 고정시켜 길이가 n이 되도록 잡고 한 변의 연장선 방향으로 팽팽하게 당긴 후 실의 끝의 이동거리가 최소가 되도록 정 n각형의 둘레로 한 바퀴 돌릴 때, 실이 움직인 영역의 넓이를 S_n이라 하자. 예를 들어 S_3은 그림과 같이 정삼각형의 한 꼭짓점에 고정시킨 길이가 3이 되도록 실을 잡고 정삼각형 둘레로 한 바퀴 돌릴 때 실이 움직인 영역의 넓이를 나타낸다. 이 때, S_{20}의 값은 ? (단, 실과 못의 굵기는 고려하지 않는다.)



① $\dfrac{287}{2}\pi$ ② $\dfrac{289}{2}\pi$ ③ $\dfrac{291}{2}\pi$ ④ $\dfrac{293}{2}\pi$ ⑤ $\dfrac{295}{2}\pi$

100714가 외 1회 # 5874

121번

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$은 첫째항이 모두 1 이고

$$a_{n+1} = 3a_n, b_{n+1} = (n+1)b_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킨다. 수열 $\{c_n\}$을

$$c_n = \begin{cases} a_n & (a_n < b_n) \\ b_n & (a_n \geq b_n) \end{cases}$$

이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{50} 2c_n$의 값은 ?

① $3^{50} - 20$ ② $3^{50} - 19$ ③ $3^{50} - 15$ ④ $3^{50} - 11$ ⑤ $3^{50} - 7$

120318나 # 5369

122번

$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \left(k^2 + 5\right)$ 의 값을 구하시오.

170423나 # 2616

123번

표는 어느 달 국내 원유 수입량의 70%를 차지하는 두바이(Dubai)유의 1배럴당 국제 가격을 일주일 간격으로 나타낸 것이다. 이 표에 있는 두바이유의 가격 a_n은 다음 관계식을 만족한다.

$a_n = 34.4 + 0.3 \times b_n$ (단, n은 자연수)

이러한 추세로 가격이 결정될 때, $\sum_{k=1}^{8} b_k$의 값을 구하시오.

(가격단위 : 달러)

n째주	두바이유 가격 a_n
1	34.7
2	35.0
3	35.6
4	36.8
5	39.2
⋮	⋮

051025나 # 7262

124번

수열 $\{a_n\}$에 대하여 셋째항부터 제n 항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 + 3n + 1$일 때, $a_1 + a_6$의 값은 ?

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

120407가 외 1회 # 5437

125번

수열 $\{a_n\}$에서 각각의 자연수 n에 대하여 세 항 $a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}$은 등차수열을 이루고 세 항 $a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}$는 등비수열을 이룬다. $a_1 = 1, a_2 = 2$일 때, a_{13}의 값을 구하시오.

050329나 # 7039

126번

자연수 n 에 대하여

$$\left|\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - m\right| < \frac{1}{2}$$

을 만족시키는 자연수 m 을 a_n 이라 하자. $\sum_{k=1}^{5} a_k$ 의 값은?

① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

170320나 # 2553

127번

$a_1 = 1, a_2 = 1,$

$$a_{n+1}a_n - 2a_{n+2}a_n + a_{n+1}a_{n+2} = 0(n = 1, 2, 3, \cdots)$$

으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k}$의 값을 구하시오.

060425나 # 7397

128번

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)\,a_k = n\,(n+1)\,(4n-1)$$

일 때, a_{20} 의 값을 구하시오.

180427나 # 2380

빠른 정답표

1번. 2	2번. 36	3번. ①	4번. 11	5번. 330
6번. ③	7번. ③	8번. 216	9번. ⑤	10번. 130
11번. ⑤	12번. ④	13번. 240	14번. 31	15번. 48
16번. 30	17번. ①	18번. 24	19번. ③	20번. 420
21번. ④	22번. ⑤	23번. ③	24번. ⑤	25번. 55
26번. ④	27번. ④	28번. 13	29번. ①	30번. ①
31번. ④	32번. ③	33번. ②	34번. ①	35번. ①
36번. 99	37번. ④	38번. 427	39번. 462	40번. ④
41번. ②	42번. 101	43번. 20	44번. ①	45번. 4
46번. 245	47번. 725	48번. 286	49번. ④	50번. 10
51번. 502	52번. ①	53번. 199	54번. 120	55번. ④
56번. 502	57번. ③	58번. ⑤	59번. 241	60번. 508
61번. 64	62번. 252	63번. ②	64번. 18	65번. 66
66번. ⑤	67번. ③	68번. ③	69번. ⑤	70번. ①
71번. 570	72번. ③	73번. 315	74번. 142	75번. 650
76번. 15	77번. ⑤	78번. 184	79번. ③	80번. ⑤
81번. ②	82번. ④	83번. ③	84번. 25	85번. ③
86번. 136	87번. 13	88번. ②	89번. 30	90번. ③
91번. 505	92번. ③	93번. 150	94번. 15	95번. ③
96번. 370	97번. 33	98번. ④	99번. 10	100번. 61
101번. ⑤	102번. ③	103번. ①	104번. ④	105번. ②
106번. 553	107번. 181	108번. 201	109번. 74	110번. ⑤
111번. ⑤	112번. 99	113번. ④	114번. ④	115번. 496
116번. ②	117번. ①	118번. 85	119번. ④	120번. ①
121번. ③	122번. 121	123번. 255	124번. ③	125번. 28
126번. ②	127번. 105	128번. 120		

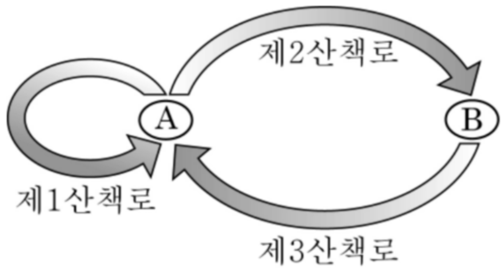
6.

수학적 귀납법

교육청 92문항

1번

어느 공원에서 아래 그림과 같이 A지점에서 출발하여 A지점으로 돌아오는 제 1산책로, A 지점에서 출발하여 B지점으로 이어지는 제 2 산책로, B 지점에서 출발하여 A 지점으로 이어지는 제 3 산책로가 있고, 각 산책로의 거리는 1km 이다.



이 산책로들을 따라 다음과 같은 규칙으로 산책한 거리가 $n$km일 때, A 지점에서 출발하여 A 지점에 도착하는 방법의 수를 a_n, A 지점에서 출발하여 B 지점에 도착하는 방법의 수를 b_n이라 하자.

(가) 각 산책로에서는 화살표 방향으로만 진행해야 한다.
(나) 같은 산책로를 반복할 수 있다.
(다) 지나지 않는 산책로가 있을 수 있다.

a_7+b_7의 값은 ? (단, n은 자연수이다.)

① 21 ② 29 ③ 34 ④ 42 ⑤ 55

120320나 # 5370

2번

수열 $\{a_n\}$은

$$a_1=5\times6^5+5\times6^4+5\times6^3+5\times6^2+5\times6+5,$$
$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{6}a_n & (a_n\text{이 }6\text{의 배수일 때})\\ a_n-1 & (a_n\text{이 }6\text{의 배수가 아닐 때})\end{cases}$$

이다. $a_k=1$일 때, k의 값은 ?

① 34 ② 35 ③ 36 ④ 37 ⑤ 38

100728나 # 5907

3번

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2, a_2=3$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}-a_{n+1}+2a_n=5$$

를 만족시킨다. a_6의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

190713나 # 7157

4번

$a_1 = 5, a_{n+1} = a_n^5 (n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\log_5 a_{10}$은 m자리 정수이다. 이 때, m의 값을 구하시오.
(단, $\log 2 = 0.3010$으로 계산한다.)

110422나 # 5661

5번

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{3a_n - 2}$$

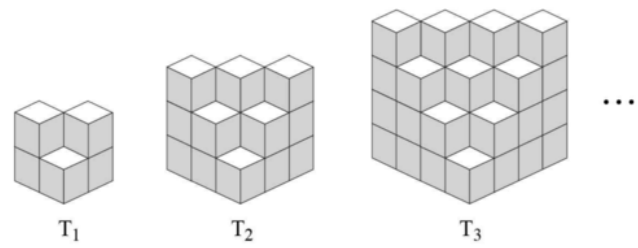
을 만족시킬 때, a_4의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

190411나 # 4410

6번

그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정육면체 모양의 블록 5 개를 사용하여 입체도형 T_1 을 만들고, T_1 의 겉넓이를 a_1 이라 하자. 입체도형 T_1 에 9 개의 블록을 더 쌓아서 입체도형 T_2 를 만들고, T_2 의 겉넓이를 a_2 라 하자. 입체도형 T_2 에 16 개의 블록을 더 쌓아서 입체도형 T_3 을 만들고, T_3 의 겉넓이를 a_3 이라 하자.
이와 같은 방법으로 n 번째 얻은 입체도형 T_n 에 $(n+2)^2$ 개의 블록을 더 쌓아서 도형 T_{n+1} 을 만들고, T_{n+1} 의 겉넓이를 a_{n+1} 이라 하자. 예를 들어 $a_1 = 22$, $a_2 = 48$ 이다. 이때 a_{10} 의 값을 구하시오.



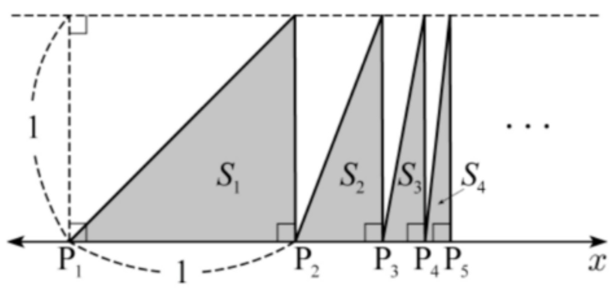
140727나 # 3310

7번

수직선 위에 점 $\mathrm{P}_n(n-1, 2, 3, \cdots)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $\mathrm{P}_1(0)$이다.
(나) $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = 1$이다.
(다) $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \dfrac{n-1}{n+1} \times \overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$

선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$을 밑변으로 하고 높이가 1인 직각삼각형의 넓이를 S_n이라 하자. $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_{50} = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



110330나 # 5619

8번

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

을 만족시킬 때, $100a_{10}$ 의 값을 구하시오.

130424가 외 1회 # 3517

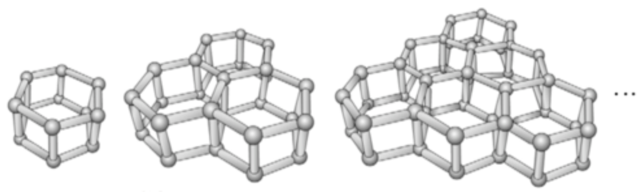
9번

양수 x에 대하여 $< x >$는 x보다 크거나 같은 최소의 정수를 나타내기로 한다. 예를 들면, $< 2 >= 2$, $< 2.5 >= 3$ 이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_1 = 10$, $a_n = a_{< \frac{n}{2} >} + 1 (n = 2, 3, 4, \cdots)$로 정의할 때, a_{50}의 값을 구하시오.

070322가 외 1회 # 6360

10번

그림과 같이 쇠구슬과 막대자석을 이용하여
육각기둥 모양을 1개 만드는 데 필요한 막대자석의 개수를 a_1,
육각기둥 모양을 3개 만드는 데 필요한 막대자석의 개수를 a_2,
육각기둥 모양을 6개 만드는 데 필요한 막대자석의 개수를 a_3,
$\vdots$
이와 같은 과정을 계속하였을 때, a_{10}의 값은?



① 530 ② 531 ③ 532 ④ 533 ⑤ 534

080415가 외 1회 # 6208

11번

수열 $\{a_n\}$이

$$a_{2n-1} = a_{2n} = n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{S_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 240항까지의 값 중에서 3의 배수를 값으로 하는 모든 항의 개수를 구하시오.

120427가 외 1회 # 5457

12번

다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdots\cdots (\bigstar)$$

이 성립함을 증명하는 과정이다.

<증명>

(i) $n=1$일 때

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{4}}$이므로 $(\bigstar)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 $(\bigstar)$이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2k+1}{2k} \times \frac{2k+1}{2k+2}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{1}{1+\boxed{(가)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1+\boxed{(가)}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{(가)}\right)+(3k+1)\cdot\left(\boxed{(가)}\right)^2}}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{(가)}\right)+\left(\boxed{(나)}\right)\cdot\left(\boxed{(가)}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 $(\bigstar)$이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(\bigstar)$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 할 때, $f(4) \times g(13)$ 의 값은?

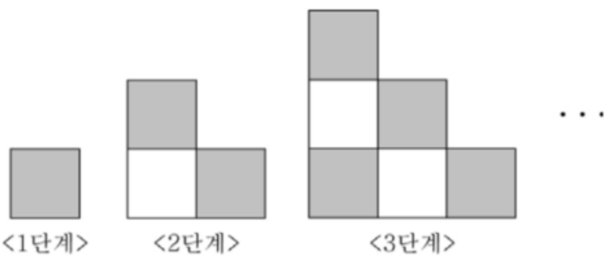
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

140715가 외 1회 # 3328

13번

한 면은 흰 색, 다른 면은 검은색인 같은 크기의 정사각형 모양의 카드를 다음 규칙에 의해 그림과 같이 놓는다.

[1 단계] 검은색 면이 보이도록 카드를 한 개 놓는다.
[2 단계] 1단계에서 놓여진 카드를 흰 색 면이 보이도록 뒤집고 그 카드
위쪽과 오른쪽에 검은색 면이 보이도록 두 개의 카드를 놓는다.
[3 단계] 2단계에서 놓여진 모든 카드의 색이 바뀌도록 뒤집고
2단계에서 새로 놓은 카드의 위쪽과 오른쪽에 검은색 면이 보이도록 세 개의 카드를 놓는다.
$\cdots$
[n 단계] $n-1$ 단계에서 놓여진 모든 카드의 색이 바뀌도록
$n-1$단계에서 새로 놓은 카드의 위쪽과 오른쪽에 검은색 면이 보이도록 n개의 카드를 놓는다.



n단계에서 보이는 면의 색이 검은색인 카드의 개수를 a_n이라 할 때, $a_{n+1}-a_n=15$가 되는 모든 n의 값의 합은?

① 29 ② 31 ③ 49 ④ 57 ⑤ 65

110728나 # 5716

14번

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$a_1 = 1,\ a_{2n} = a_n + 1,\ a_{2n+1} = a_n - 1\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $a_6 = 1$
ㄴ. $n = 2^k$ (k는 자연수)이면 $a_n = k + 1$ 이다.
ㄷ. $n = 2^k + 1$ (k는 자연수)이면 $a_n = k - 1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

090311가 외 1회 # 5968

15번

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 라 할 때,

$$2S_n = 3a_n - 4n + 3\ (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

$2S_n = 3a_n - 4n + 3 \cdots\cdots$ ㉠
에서 $n = 1$ 일 때, $2S_1 = 3a_1 - 1$ 이므로 $a_1 = 1$ 이다.
$2S_{n+1} = 3a_{n+1} - 4(n+1) + 3 \cdots\cdots$ ㉡
㉡ 에서 ㉠ 을 뺀 식으로부터
$a_{n+1} = 3a_n + \boxed{(가)}$ 이다.
수열 $\{a_n + 2\}$ 가 등비수열이므로
일반항 a_n 을 구하면
$a_n = \boxed{(나)}$ $(n \geq 1)$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 p 수를 , (나)에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 할 때, $p + f(5)$ 의 값은?

① 225 ② 230 ③ 235
④ 240 ⑤ 245

160416가 외 1회 # 3729

16번

수열 $\{a_n\}$을 a_n =(n^n 의 일의 자리의 수)로 정의할 때, 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $a_3 = 7$
ㄴ. $\sum_{k=1}^{5} a_{2k} = 22$
ㄷ. $a_{13} = a_{23}$

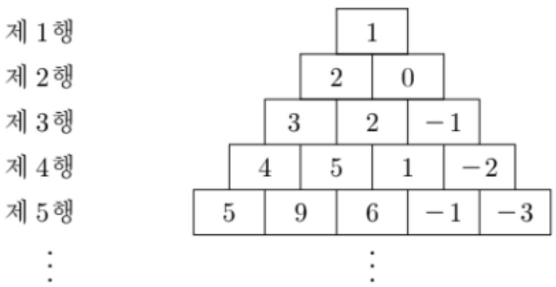
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ,ㄴ ⑤ ㄴ,ㄷ

071014나 # 6469

17번

그림과 같이 제 1행에는 1개, 제 2행에는 2개, $\cdots$, 제 n행에는 n개의 직사각형을 나열하고 그 안에 다음과 같은 규칙으로 수를 적었다.

(가) 제 1행의 직사각형에는 1을 적는다.
(나) 제 $n+1$행의 왼쪽 끝 직사각형에는 제 n행의 왼쪽 끝 직사각형에 적힌 수보다 1이 큰 수를 적는다.
(다) 제 $n+1$행의 오른쪽 끝 직사각형에는 제 n행의 오른쪽 끝 직시각형에 적힌 수보다 1이 작은 수를 적는다.
(라) 제 $n+1$ 행의 안쪽 직사각형에는 그 직사각형에 인접한 제 n행의 두 직사각형에 적힌 수의 합을 적는다.



제 n행의 맨 왼쪽으로부터 k 번째 직사각형에 적힌 수를 $< n, k >$로 나타내자. 예를 들어 $< 4, 2 >= 5$ 이다. 이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은 ?

<보기>

ㄱ. $< 10, 1 > + < 10, 10 >= 2$
ㄴ. $< 11, 2 > + < 11, 10 >= 20$
ㄷ. $< 12, 3 > + < 12, 4 > + \cdots + < 12, 10 >= 2024$

① ㄱ　② ㄱ,ㄴ　③ ㄱ,ㄷ　④ ㄴ,ㄷ　⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

101017가 외 1회　# 5926

18번

한 평면 위에 다음과 같은 규칙으로 직선들을 차례로 그려 나간다.

[1단계] : 직선을 1개 그린다.
[2단계] : [1단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 2개 그린다.
[3단계] : [2단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 3개 그린다.
⋮
[n단계] : [$(n-1)$단계]에서 그린 직선과 수직인 직선을 n개 그린다. $(n=2, 3, 4, \cdots)$

[1단계]부터 [n단계]까지 그린 직선들의 모든 교점의 개수를 a_n $(n=2, 3, 4, \cdots)$이라 하자. 예를 들어, $a_2=2, a_3=8$이다. $a_{15}-a_{14}$의 값을 구하시오. (단, 모든 직선은 서로 겹치지 않도록 그린다.)

100325가 외 1회　# 5790

19번

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1=1$ 이고,

$$(n+1)a_{n+1}-na_n=3(n \geq 1)$$

을 만족시킬 때, a_6 의 값은?

① $\dfrac{8}{3}$　② 3　③ $\dfrac{10}{3}$　④ $\dfrac{11}{3}$　⑤ 4

141005가　# 3378

20번

다음과 같이 정의되는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$이고
$a_{n-1} \cdot a_{n+1} = a_n \cdot a_{n+2} (n = 2, 3, 4, \cdots)$

이 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값은 ?

① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

060309나 # 7315

21번

함수 $y = x^2$의 그래프 위에 다음 조건을 만족시키도록 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \cdots$을 차례로 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(1, 1)$이다.
(나) 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기는 n이다. $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

점 P_{2009}의 x좌표는 ?

① 1001 ② 1002 ③ 1003 ④ 1004 ⑤ 1005

100310가 외 1회 # 5775

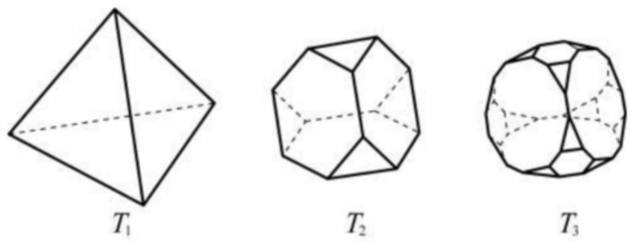
22번

자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n의 좌표를 $(n, an - a)$라 하자. 두 점 $\mathrm{Q}_n, \mathrm{Q}_{n+1}$에 대하여 점 P_n이 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+2}$의 무게중심이 되도록 점 Q_{n+2}를 정한다. 두 점 $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2$의 좌표가 각각 $(0, 0)$, $(1, -1)$이고 점 Q_{10}의 좌표가 $(9, 90)$이다. 점 Q_{13}의 좌표를 (p, q)라 할 때, $p + q$의 값을 구하시오. (단, $a > 1$)

181029나 # 2532

23번

정사면체 T_1의 모든 모서리의 삼등분점을 잡는다. T_1의 각 꼭짓점에서 가까운 삼등분점 3개와 그 꼭짓점을 모두 이어서 만든 사면체 4개를 잘라내어 팔면체 T_2를 만든다.
다시 팔면체 T_2의 모든 모서리의 삼등분점을 잡는다. T_2의 각 꼭짓점에서 가까운 삼등분점 3개와 그 꼭짓점을 모두 이어서 만든 사면체 12개를 잘라내어 이십면체 T_3을 만든다.



이와 같은 방법으로 다면체 T_4, T_5, T_6을 만들 때, 다면체 T_6의 면의 개수는 ?

① 480 ② 482 ③ 484 ④ 486 ⑤ 488

111017가 외 1회 # 5734

24번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 2$ 이고

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{2a_n - 1} + 1 \ (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

> 주어진 식에 의하여
>
> $$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n - 1}{2a_n - 1}$$
>
> 이므로
>
> $$\frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{1}{a_n - 1} + \boxed{(가)}$$
>
> 이다. $b_n = \dfrac{1}{a_n - 1}$ 이라 하면
>
> $$b_{n+1} = b_n + \boxed{(가)}$$
>
> 이고, $b_1 = 1$ 이므로
>
> $$b_n = \boxed{(나)}\,(n \geq 1)$$
>
> 이다. 따라서 $a_n = \dfrac{1}{\boxed{(나)}} + 1 \ (n \geq 1)$이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 k , (나)에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 할 때, $f(k)$ 의 값은?

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

151013나 # 3146

25번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2$ 이고,

$$a_{n+3} - a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 1 \ (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

> $b_n = a_{n+1} - a_n$ 이라 하면
>
> $$b_1 = b_2 = 1,\ b_{n+2} = b_n + 1 \ (n \geq 1)$$
>
> 이므로 두 수열 $\{b_{2n-1}\}$, $\{b_{2n}\}$ 은 모두 첫째항이 1 이고,
> 공차가 1 인 등차수열이다. 즉,
>
> $$b_{2n-1} = b_{2n} = \boxed{(가)}\,(n \geq 1)$$
>
> 이다.
> 그러므로 $n \geq 2$ 일 때, a_n 은 다음과 같다.
> (i) n 이 홀수일 때, $n = 2m - 1$ 이라 하면
>
> $$\begin{aligned} a_{2m-1} &= a_1 + \sum_{k=1}^{2(m-1)} b_k \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (b_{2k-1} + b_{2k}) \\ &= m^2 - m \end{aligned}$$
>
> (ii) n 이 짝수일 때, $n = 2m$ 이라 하면
>
> $$\begin{aligned} a_{2m} &= a_1 + \sum_{k=1}^{2m-1} b_k \\ &= \boxed{(나)} \end{aligned}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(m)$ 이라 할 때, $f(10) + g(10)$ 의 값은?

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

140311가 외 1회 # 3234

26번

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = 2^{n-5} + n$$

을 만족시킬 때, $a_{10} - a_7$ 의 값은?

① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

130309나 # 3412

27번

자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1 의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.
(나) n 이 짝수이면 점 A_n 은 점 A_{n-1} 을 y 축의 방향으로 $(-1)^{\frac{n}{2}} \times (n+1)$ 만큼 평행이동한 점이다.
(다) n 이 3이상의 홀수이면 점 A_n 은 점 A_{n-1} 을 x 축의 방향으로 $(-1)^{\frac{n-1}{2}} \times n$ 만큼 평행이동한 점이다.

위의 규칙에 따라 정해진 점 A_{30} 의 좌표를 (p, q) 라 할 때, $p+q$ 의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

150418가 # 3031

28번

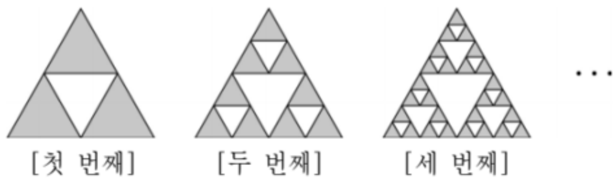
$a_1 = 2, a_{n+1} = 10a_n + 81(n = 1, 2, 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다. 이때 a_{10}의 각 자리의 수의 합은 ?

① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

080309나 # 6182

29번

한 개의 정삼각형에서 각 변의 중점을 선분으로 이으면 4개의 작은 정삼각형이 생긴다. 이때, 가운데 정삼각형 하나를 잘라내면 3개의 정삼각형이 남는다. 남은 3개의 각 정삼각형에서 같은 과정을 반복하면 모두 9개의 정삼각형이 남고, 다시 9개의 각 정삼각형에서 같은 과정을 반복하면 모두 27개의 정삼각형이 남는다. 그림은 이와 같은 과정을 계속하여 만들어지는 도형을 나타낸 것이다.



두 정삼각형이 공유하는 꼭짓점은 한 개의 꼭짓점으로 셀 때, n번째 도형에서 남은 정삼각형들의 꼭짓점의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1 = 6, a_2 = 15$이다. a_5의 값은 ?

① 366 ② 376 ③ 386 ④ 396 ⑤ 406

110309가 외 1회 # 5583

30번

모든 항이 양의 실수인 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = k, a_n a_{n+1} + a_{n+1} = k a_n^2 + k a_n \ (n \geq 1)$$

을 만족시키고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$ 일 때, 실수 k 의 값은? (단, $0 < k < 1$)

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

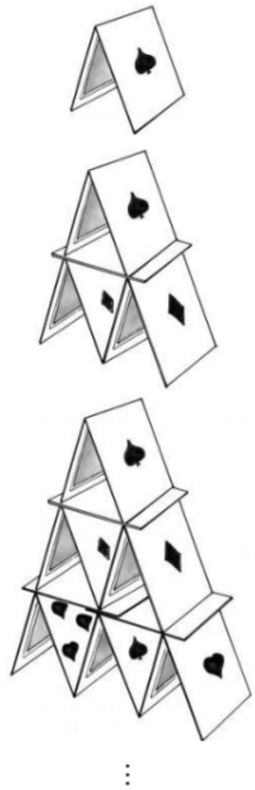
160312나 # 2785

31번

다음은 n 층 카드탑에 대한 설명이다.

I. 1층 카드탑 : 두 장의 카드를 맞대어 세운 것.
II. 2층 카드탑 : 1층 카드탑 두 개를 나란히 세우고 그 위에 가로로 한 장의 카드를 올려놓은 후 그 위에 1층 카드탑을 쌓은 것.
III. 3층 카드탑 : 1층 카드탑 세 개를 나란히 세우고 그 위에 가로로 두 장의 카드를 올려놓은 후 그 위에 2층 카드탑을 쌓은 것.
IV. n층 카드탑 : 1층 카드탑 n 개를 나란히 세우고 그 위에 가로로 $(n-1)$ 장의 카드를 올려놓은 후 그 위에 $(n-1)$층 카드탑을 쌓은 것.

1층 카드탑
2층 카드탑
3층 카드탑
⋮



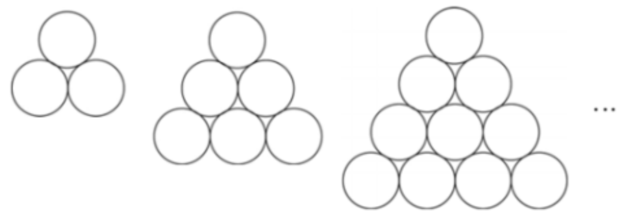
n 층 카드탑을 만드는데 필요한 카드의 개수를 이라 a_n 할 때, a_{20}의 값을 구하시오.

130729가 외 1회 # 3582

32번

다음 [단계] 에 따라 반지름의 길이가 같은 원들을 외접하도록 그린다.

[단계 1] 3개의 원을 외접하게 그려서 < 그림1 >을 얻는다.
[단계 2] < 그림1 >의 아래에 3개의 원을 외접하게 그려서 < 그림 2 > 를 얻는다.
[단계 3] < 그림2 > 의 아래에 4개의 원을 외접하게 그려서 < 그림 3 > 을 얻는다.
$\vdots$
[단계 m] < 그림 $m-1$ > 의 아래에 $(m+1)$ 개의 원을 외접하게 그려서 < 그림 m > 을 얻는다. ($m \geq 2$)



<그림 1> <그림 2> <그림 3> ⋯

< 그림 n > 에 그려진 원의 모든 접점의 개수를 a_n ($n=1,2,3,\cdots$) 이라 하자. 예를 들어, $a_1=3$, $a_2=9$ 이다. a_{10} 의 값을 구하시오.

160727나 # 2890

33번

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10$ 이고,

$$a_{n+1}=a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n}a_n\,(n=1,2,3,\cdots)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

$n\geq 2$인 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=\left(a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n}a_n\right)$$
$$-\left(a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n-1}a_{n-1}\right)$$

이므로

$a_{n+1}=\boxed{(가)}\times a_n$ 이다.

$n=2,3,4,\cdots,n-1$을 차례로 대입하면

$$a_3=\frac{3}{2}a_2$$
$$a_4=\frac{4}{3}a_3$$
$$\vdots$$
$$a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1}$$ 이므로

$a_n=\boxed{(나)}(n\geq 2)$

따라서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_1=10$이고. $a_n=\boxed{(나)}(n\geq 2)$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$이라 할 때, $f(5)\times g(10)$의 값은 ?

① 60 ② 75 ③ 90
④ 105 ⑤ 120

120417가 외 1회 # 5447

34번

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{6S_k}{a_k+3}=S_n(n\geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

주어진 식에 $n=1$ 을 대입하면

$S_1>0$ 이므로 $a_1=\boxed{(가)}$이다.

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{6S_k}{a_k+3}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{6S_k}{a_k+3}=\frac{6S_n}{a_n+3}(n\geq 2)$이고

$a_1=\frac{6S_1}{a_1+3}$이므로

$\boxed{(나)}\cdot S_n={a_n}^2+\boxed{(가)}\cdot a_n(n\geq 1)$이다. 한편,

$6(S_{n+1}-S_n)={a_{n+1}}^2+3a_{n+1}-({a_n}^2+3a_n)$이므로

$6a_{n+1}={a_{n+1}}^2-{a_n}^2+3a_{n+1}-3a_n$

$\vdots$

따라서 $a_n=\boxed{(다)}$

위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (다)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+q+f(10)$의 값은?

① 36 ② 39 ③ 42 ④ 45 ⑤ 48

130415가 외 1회 # 3508

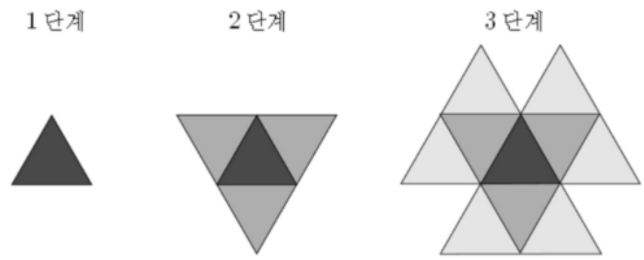
35번

그림과 같이 넓이가 1인 정삼각형 모양의 타일을 다음과 같이 규칙으로 붙인다.

[1 단계] : 정삼각형 모양의 타일을 한 개 붙인다.

[n 단계] : $n-1$단계에서 붙여진 타일의 바깥쪽 테두리의 각 변에 정삼각형 모양의 타일을 붙인다.

이와 같이 10단계를 시행했을 때, 타일로 덮인 부분의 전체의 넓이를 구하시오.



090720나 # 6094

36번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ 이고,

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - n^2 a_n = 0 \ (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정의 일부이다.

> $n = 2m-1$ (m 은 자연수)일 때,
> 주어진 식을 정리하면
> $$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}$$
> 이므로
> $$\frac{a_3}{a_1} = \frac{1^2}{2 \times 3}$$
> $$\frac{a_5}{a_3} = \frac{3^2}{4 \times 5}$$
> $$\vdots$$
> $$\frac{a_{2m+1}}{a_{2m-1}} = \boxed{(가)}$$
> 이다. 좌변과 우변을 각각 곱하여 정리하면
> $$a_{2m+1} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2m-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2m} \times \boxed{(나)}$$
> $$= \frac{{}_{2m}\mathrm{C}_m}{4^m} \times \boxed{(나)}$$
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $f(5) \times g(4)$ 의 값은?

① $\frac{7}{110}$ ② $\frac{4}{55}$ ③ $\frac{9}{110}$ ④ $\frac{1}{11}$ ⑤ $\frac{1}{10}$

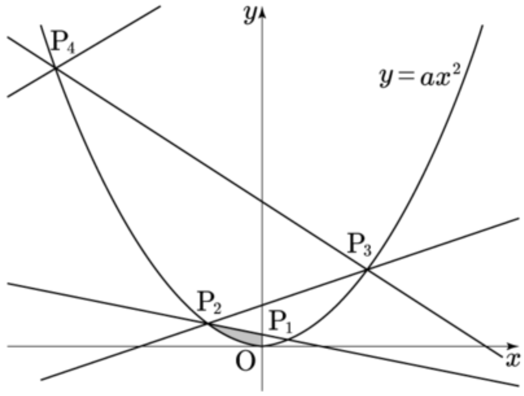
161015가 외 1회 # 2968

37번

$[15 \sim 16]$ 자연수 n에 대하여 곡선 $y = ax^2(a > 0)$ 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 P_1의 좌표는 $(x_1, a{x_1}^2)$이다.
> (나) 점 P_{n+1}은 점 $\mathrm{P}_n(x_n, a{x_n}^2)$을 지나는 직선 $y = -ax_n x + 2a{x_n}^2$과 곡선 $y = ax^2$이 만나는 점 중에서 점 P_n이 아닌 점이다.

15번과 16번의 두 물음에 답하시오.



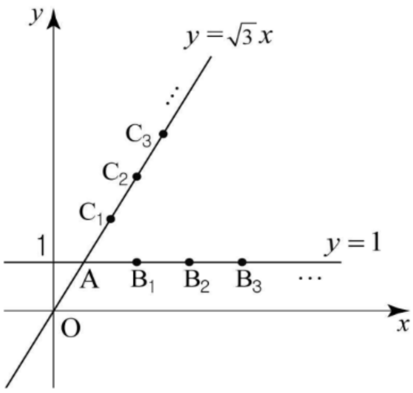
점 P_n 의 x 좌표로 이루어진 수열 $\{x_n\}$ 에서 $x_1 = \frac{1}{2}$ 일 때, x_{10} 의 값은?

① -1024 ② -512 ③ -256 ④ 512 ⑤ 1024

151015나 # 3148

38번

그림과 같이 점 A는 두 직선 $y=1$과 $y=\sqrt{3}x$의 교점이다. 자연수 n에 대하여 $y=1$ 위에 $\overline{\mathrm{AB}_n}=n$인 점을 B_n, $y=\sqrt{3}x$ 위에 $\overline{\mathrm{AC}_n}=n$인 점을 C_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n$의 무게중심의 y좌표를 a_n이라 할 때, $a_n>6$를 만족하는 n의 최솟값을 구하시오. (단, B_n, C_n은 제 1사분면의 점이다.)



120728나 # 5522

39번

수열 $\{a_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=1$, $a_2=2$
(나) a_n 은 a_{n-2} 와 a_{n-1} 의 합을 4 로 나눈 나머지 ($n\geq 3$)

$\sum_{k=1}^{m} a_k=166$ 일 때, m 의 값을 구하시오.

160428나 # 2861

40번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=12$ 이고,

$$\frac{a_{n+1}}{n}=\frac{2a_n}{n+1}+\frac{2^{n+1}}{n+1}\ (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$(n+1)\,a_{n+1}=2na_n+n\cdot 2^{n+1}$$

이다. $b_n=\dfrac{n}{2^n}a_n$ 이라 하면

$$b_{n+1}=b_n+\boxed{(가)}\quad(n\geq 1)$$

이고 $b_1=\boxed{(나)}$ 이므로

$$b_n=\boxed{(다)}\quad(n\geq 1)$$

이다. 그러므로

$$a_n=\frac{2^n}{n}\times\boxed{(다)}\quad(n\geq 1)$$

이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 하고,(나)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $f(p)+g(p)$ 의 값은?

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

150715가 외 1회 # 3118

41번

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{k}{a_n + 2}$$

를 만족시킬 때, $a_3 = \frac{3}{2}$ 이 되도록 하는 상수 k 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

180309나 # 2302

42번

3으로도 5로도 나누어 떨어지지 않는 자연수를 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 한다. 예를 들어, $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$이다. 이때, a_{100}의 값은 ?

① 172 ② 187 ③ 195 ④ 202 ⑤ 210

060707가 외 1회 # 7412

43번

수열 $\{a_n\}$ 을

$$a_1 = 1, a_2 = 2\,, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+1}$$

으로 정의할 때, 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정이다.

$b_n = \frac{a_n}{n+1}$ 이라 놓으면 $a_n = (n+1)b_n$ 이므로

$$(n+3)b_{n+2} = (\boxed{(가)})b_{n+1} + b_n$$

$$(n+3)\left(b_{n+2} - b_{n+1}\right) = -\left(b_{n+1} - b_n\right) \cdots\cdots (\bigstar)$$

식 $(\bigstar)$에 $n = 1, 2, \cdots, m-1\ (m \geq 2)$ 를 대입하면

$$4\left(b_3 - b_2\right) = -\left(b_2 - b_1\right)$$

$$5\left(b_4 - b_3\right) = -\left(b_3 - b_2\right)$$

$$\vdots$$

$$(m+2)\left(b_{m+1} - b_m\right) = -\left(b_m - b_{m-1}\right)$$

좌변과 우변을 각각 곱하여 정리하면,

$$b_{m+1} - b_m = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+2}\right)\left(b_2 - b_1\right)$$

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(b_{k+1} - b_k\right)\ (n \geq 2)$$

따라서 $a_1 = 1,\ a_n = (n+1)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\boxed{(나)}\right)\ (n \geq 2)$ 이다.

위의 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(n), g(k)$ 라 할 때, $f(1)g(3)$ 의 값은?

① $\frac{1}{240}$ ② $\frac{1}{180}$ ③ $\frac{1}{40}$ ④ $\frac{1}{30}$ ⑤ $\frac{1}{24}$

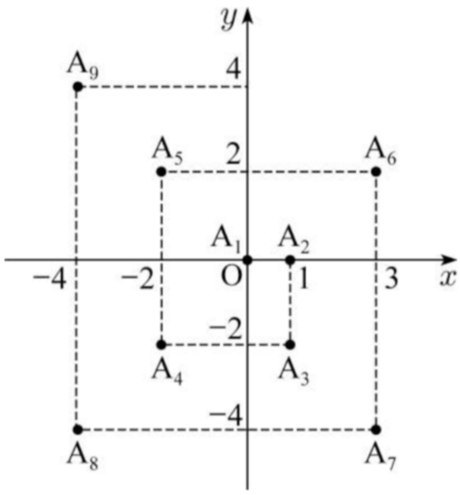
130717가 외 1회 # 3570

44번

좌표평면에서 점 A_n $(n=1,2,3,\cdots)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $(0,0)$ 이다.
(나) 점 A_{4n-3}을 x축의 양의 방향으로 $(4n-3)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n-2} 이다.
(다) 점 A_{4n-2}를 y축의 음의 방향으로 $(4n-2)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n-1}이다.
(라) 점 A_{4n-1}을 x축의 음의 방향으로 $(4n-1)$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n}이다.
(마) 점 A_{4n}을 y축의 양의 방향으로 $4n$만큼 평행이동시킨 점은 A_{4n+1}이다.

그림은 위의 규칙대로 정함 점 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \cdots$의 일부를 나타낸 것이다.



점 A_{50}의 좌표를 (p,q)라 할 때, $p+q$의 값은?

① 41 ② 43 ③ 45 ④ 47 ⑤ 49

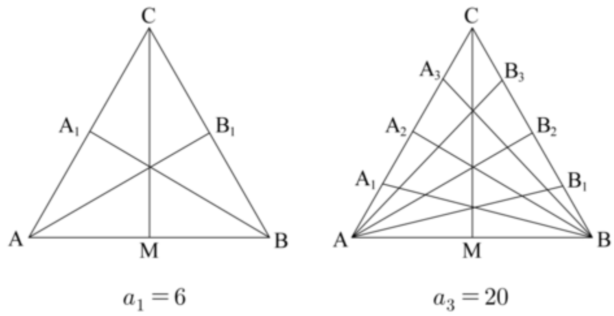
110312가 외 1회 # 5586

45번

정삼각형 ABC에서 변 AC를 $(n+1)$등분한 점을 각각 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \cdots \mathrm{A}_n$이라 하고, 변 BC를 $(n+1)$등분한 점을 각각 $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \cdots, \mathrm{B}_n$이라 하자. 다음 [단계]와 같은 순서로 선분을 긋는다.

[단계 1] 꼭짓점 C와 선분 AB의 중점 M을 연결한 선분 CM을 긋는다.
[단계 2] 꼭짓점 A와 점 $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \cdots, \mathrm{B}_n$을 각각 연결한 선분 $\mathrm{AB}_1, \mathrm{AB}_2, \mathrm{AB}_3, \cdots, \mathrm{AB}_n$을 긋는다.
[단계 3] 꼭짓점 B와 점 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \cdots, \mathrm{A}_n$을 각각 연결한 선분 $\mathrm{BA}_1, \mathrm{BA}_2, \mathrm{BA}_3, \cdots, \mathrm{BA}_n$을 긋는다.

이때, 나누어진 정삼각형 ABC의 내부 영역의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_1=6, a_3=20$이다. a_{10}의 값은?



① 132 ② 136 ③ 140
④ 144 ⑤ 148

091011나 # 6140

46번

첫째항이 2이고 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 있다. x에 대한 이차 방정식

$$a_n x^2 - a_{n+1} x + a_n = 0$$

이 모든 자연수 n에 대하여 중근을 가질 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값을 구하시오.

200726나 # 9779

47번

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 3, a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

가 성립할 때, a_6의 값을 구하시오.

081030나 # 6338

48번

흰 바둑돌과 검은 바둑돌이 있다. 이 바둑돌 n개를 일렬로 나열하되, 흰 바둑돌끼리는 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수를 a_n이라 하자. 예를 들면 $a_1 = 2, a_2 = 3$이다.

○, ● $a_1 = 2$

○●, ●○, ●● $a_2 = 3$

이때 a_{10}의 값을 구하시오.

050328가(미적) 외 1회 # 7012

49번

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = a_n + 3n$$

을 만족시킨다. $2a_1 = a_2 + 3$ 일 때, a_{10} 의 값은?

① 135 ② 138 ③ 141 ④ 144 ⑤ 147

150409나 # 3052

50번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고

$$a_{n+1} = \frac{na_n + 6}{n+2} \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$(n+2)a_{n+1} = na_n + 6$$

이다. $b_n = n(n+1)a_n$ 이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \boxed{\text{(가)}}$$

이고, $b_1 = 2$ 이므로

$$b_n = \boxed{\text{(나)}} \ (n \geq 1)$$

이다. 따라서

$$a_n = \frac{\boxed{\text{(나)}}}{n(n+1)} (n \geq 1)$$

이다

위의 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때, $f(4) + g(10)$ 의 값은?

① 356 ② 357 ③ 358 ④ 359 ⑤ 360

141012가 외 1회 # 3385

51번

수열 $\{a_n\}$이

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7 \\ a_{k+4} = 2a_k \ (k = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

으로 정의될 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오.

080424가 외 1회 # 6217

52번

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = 2(a_n + 2)$$

를 만족시킨다. a_5 의 값을 구하시오.

180425나 # 2378

53번

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n - 3 \ \ (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

이 성립할 때, $a_6 - a_5$의 값은 ?

① 27 ② 81 ③ 243
④ 729 ⑤ 2187

111007나 # 5752

54번

첫째항이 6인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

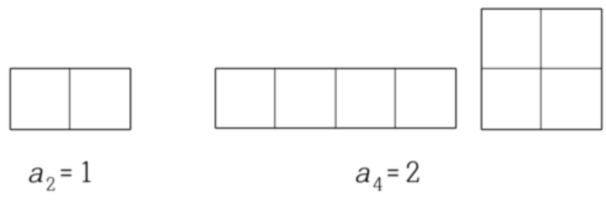
$$a_{n+1} = \begin{cases} 2 - a_n & (a_n \geq 0) \\ a_n + p & (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4 = 0$이 되도록 하는 모든 실수 p의 값의 합을 구하시오.

190326나 # 4188

55번

평면 위에서 같은 크기의 정사각형 n개를 붙여서 만들 수 있는 서로 다른 모양의 직사각형의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들면 $a_2 = 1, a_4 = 2$이다.



이때 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 ?

<보기>

ㄱ. $a_6 = 2$
ㄴ. n이 소수이면 $a_n = 1$이다.
ㄷ. $a_n = 2$인 한 자리 자연수 n은 3개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ,ㄴ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

050313가 외 1회 # 6987

56번

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 다음과 같이 정의되어 있다.

$$a_n = 2n + 1, b_n = 3n + 3 (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에서 공통인 항을 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{c_n\}$이라 한다. 이때 c_{30}의 값을 구하시오.

060723나 # 7455

57번

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1, a_{n+1}=a_n+n+1 \ \ (n=1,2,3\cdots)$$

을 만족시킬 때, a_{15}의 값은 ?

① 66 ② 78 ③ 91 ④ 105 ⑤ 120

120406가 외 1회 # 5436

58번

첫째항이 짝수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5=5$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하시오.

201029나 # 10958

59번

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=\dfrac{1}{4}$ 이고

$$(n+1)\,a_n=a_{n+1}\,(3n-2a_n)\ (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식의 양변을 a_na_{n+1} 로 나누면

$$\frac{n+1}{a_{n+1}}=\frac{3n-2a_n}{a_n}$$

이다. $b_n=\dfrac{n}{a_n}$ 이라 하면

$$b_{n+1}=3b_n+\boxed{(\text{가})}$$

이고, $b_{n+1}-1=3\,(b_n-1)$ 이다.

$b_1=4$ 이므로 $b_n-1=\boxed{(\text{나})}$

$$b_n=\boxed{(\text{나})}+1$$

이다. 그러므로

$$a_n=\frac{n}{\boxed{(\text{나})}+1}\ (n\geq 1)$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 값을 p, (나)에 알맞은 식을 $f\,(n)$ 이라 할 때, $p+f(3)$ 의 값은?

① 24 ② 25 ③ 26 ④ 27 ⑤ 28

160716가 외 1회 # 2909

60번

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$a_1 = 1,\ \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

a_{20}의 값은?

① $\frac{2}{21}$ ② $\frac{4}{21}$ ③ $\frac{5}{21}$ ④ $\frac{2}{7}$ ⑤ $\frac{3}{7}$

110326나 # 5615

61번

$[13 \sim 14]$ 좌표평면의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 동전을 1번 던질 때마다 다음 규칙에 따라 점 P를 이동시키는 시행을 한다.

> (가) 앞면이 나오는 x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨다.
> (나) 뒷면이 나오는 y축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨다.

13번과 14번의 두 물음에 답하시오.

시행을 1 번 한 후 점 P 가 위치할 수 있는 점들을 x 좌표가 작은 것부터 차례로 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$ 라 하고, 시행을 2 번 한 후 점 P 가 위치할 수 있는 점들을 x 좌표가 작은 것부터 차례로 $\mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4,\ \mathrm{P}_5$ 라 하자. 예를 들어, 점 P_5 의 좌표는 $(2, 0)$ 이고 점 P_6 의 좌표는 $(0, 3)$ 이다. 이와 같은 방법으로 정해진 점 P_{100} 의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a - b$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

150714나 # 3087

62번

수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 3$ 이고,

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{은 짝수}) \\ \dfrac{a_n + 93}{2} & (a_n\text{은 홀수}) \end{cases}$$

가 성립한다. $a_k = 3$ 을 만족시키는 50 이하의 모든 자연수 k 의 값의 합을 구하시오.

160426가 # 3739

63번

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ 4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 10a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

이 성립한다.

다음은 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - 5\sum_{k=1}^{n} a_k$ 를 구하는 과정이다.

> $4S_{n+2} = 3a_{n+2} + 10a_{n+1}$ 에서
> $a_{n+2} = 7a_{n+1} + \boxed{(가)} \times a_n$ 이다.
> $a_{n+1} - 5a_n = b_n$ 이라 하면,
> 수열 $\{b_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.
> $\therefore b_n = \boxed{(나)}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$
> 따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} - 5\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{(다)}$

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $\dfrac{2 \times p \times g(10)}{5 \times f(3)}$ 의 값은?

① -1027 ② -1025 ③ -1023
④ -1021 ⑤ -1019

140412가 외 1회 # 3665

64번

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+2} - a_{2n} = 1$
(나) $a_{2n+1} - a_{2n-1} = 0$

$a_{100} + a_{101}$ 의 값을 구하시오.

130326가 외 1회 # 3459

65번

1부터 연속된 자연수를 나열하여 각 자릿수로 다음과 같은 수열을 만들었다.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, \cdots$$

이 수열의 제 n항부터 연속된 네 개의 항이 차례로 $2, 0, 1, 0$일 때, 자연수 n의 최솟값은 ?

① 2960 ② 2964 ③ 2968 ④ 2972 ⑤ 2976

110327나 # 5616

66번

수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1 = 1 , a_{n+1} = 2a_n + n + 1$$

을 만족시킬 때, 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정이다.

$n \geq 1$ 일 때,

$$a_{n+1} = 2a_n + n + 1 \cdots ㉠$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + \boxed{(가)} \cdots ㉡$$

이고, ㉡에서 ㉠을 뺀 식으로부터

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 1$$

을 얻는다. $b_n = a_{n+1} - a_n$ 이라 하면

$$b_{n+1} = 2b_n + 1$$

이므로

$$b_n = 2^{n+1} - 1$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(2^{k+1} - 1\right) \ (n \geq 2)$$

$$= 2^{n+1} + \boxed{(나)}$$

이다.

위의 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 할 때, $f(5) - g(5)$ 의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

131014가 외 1회 # 3627

67번

2 이상의 자연수 n에 대하여 부등식 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$가 성립함을 알려져 있다. 다음은 이 사실을 이용하여 n이 6이상의 자연수일 때, 부등식 $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n!$이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다. (단, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$)

<증명>

(i) $n=6$ 일 때, $3^6 = 729, 6! = 720$ 이므로 성립한다.

(ii) $n = k(k \geq 6)$일 때 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} &= \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{(k+1)^k}{k^k} \cdot \boxed{} \\ &= \frac{k+1}{2} \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \cdot \boxed{(가)} \\ &> \frac{k+1}{2} \cdot \boxed{(나)} \\ &= \boxed{}\end{aligned}$$

이므로 $n = k+1$일 때도 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 주어진 부등식은 6이상의 모든 자연수에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : k^k (나) : $(k+1)!$

② (가) : k^k (나) : $2k!$

③ (가) : k^k (나) : $k!$

④ (가) : $\left(\frac{k}{2}\right)^k$ (나) : $(k+1)!$

⑤ (가) : $\left(\frac{k}{2}\right)^k$ (나) : $2k!$

060712가 외 1회 # 7418

68번

첫째항이 4인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

을 만족시킨다. $a_4 = 34$일 때, a_2의 값을 구하시오.

200325나 # 8871

69번

다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

<증명>

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1\geq 2\times\frac{1}{1\cdot 2}=$(우변)이므로
주어진 부등식은 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 1)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}$$

이 식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$$

$$\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{1}{k+1}$$

$$\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{1}{k+2}$$

$$=2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{1}{k+1}\cdot\boxed{(가)}$$

$$\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right\}+\frac{\boxed{(나)}}{(k+1)(k+2)}$$

$$=2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$\therefore 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k+1}$$

$$\geq 2\left\{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right\}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 주어진 부등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 내용을 바르게 짝이은 것이다.

① (가) : $\frac{1}{k+1}$ (나) : 1

② (가) : $\frac{1}{k+1}$ (나) : 2

③ (가) : $\frac{1}{k+2}$ (나) : 1

④ (가) : $\frac{k+1}{k+2}$ (나) : 1

⑤ (가) : $\frac{k+1}{k+2}$ (나) : 2

060415가 외 1회 # 7361

70번

다음은 2이상의 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

이 성립함을 증명하는 과정이다.

<증명>

(i) $n=2$ 일 때

$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$에서

$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>\boxed{(가)}$

(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때, 주어진 부등식이 성립함을 가정하면

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$$

$$\sqrt{k+1}-\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\sqrt{k+1}-\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$<\sqrt{k+1}-\boxed{(나)}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{\boxed{(다)}}{\sqrt{k+1}}<0$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

(i),(ii)에서 2이상의 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) $\sqrt{2}$ (나) $\sqrt{k+1}$ (다) $\sqrt{k}-\sqrt{k+1}$

② (가) $\sqrt{2}$ (나) $\sqrt{k}$ (다) $\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}$

③ (가) $\sqrt{2}$ (나) $\sqrt{k}$ (다) $k-\sqrt{k(k+1)}$

④ (가) 2 (나) $\sqrt{k}$ (다) $k-\sqrt{k(k+1)}$

⑤ (가) 2 (나) $\sqrt{k+1}$ (다) $\sqrt{k+1}-\sqrt{k(k+2)}$

060312가 외 1회 # 7287

71번

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

으로 정의될 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여 a_{4n}은 12의 배수임을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(i) $n = 1$일 때, $a_4 = \boxed{(가)}$이므로 성립한다.

(ii) $n = k$일 때, a_{4k}가 12의 배수라고 가정하면

$$\begin{aligned} a_{4(k+1)} &= 2a_{4k+3} + a_{4k+2} \\ &= \boxed{(나)}\, a_{4k+2} + 2a_{4k+1} \\ &= \boxed{(다)}\, a_{4k+1} + \boxed{(라)}\, a_{4k} \end{aligned}$$

따라서 a_{4k+1}은 12의 배수이다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 a_{4n}은 12의 배수이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 수를 각각 a, b, c, d라 할 때, $a + b + c + d$의 값은?

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

080312가 외 1회 # 6161

72번

다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$(n!)^2 \cdot 4^n > (2n)! \cdots ㉠$$

이 성립함을 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n = 1$일 때, (좌변)$= 4$, (우변)$= \boxed{(가)}$

이므로 ㉠이 성립한다.

(2) $n = k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$(k!)^2 \cdot 4^k > (2k)! \quad \cdots\cdots ㉡$$

이다. $n = k + 1$일 때 ㉠이 성립함을 보이자.

㉡의 양변에 $\boxed{(나)}$를 곱하면

$$\begin{aligned} \{(k+1)!\}^2 \cdot 4^{k+1} &> (\boxed{(나)})(2k)! \\ &> (2k+2)(\boxed{(다)})(2k)! \\ &= (2k+2)! \end{aligned}$$

따라서 $n = k + 1$일 때에도 ㉠은 성립한다.

그러므로 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : 1 (나) : $4(k+1)^2$ (다) : $2k$

② (가) : 1 (나) : $2(k+1)^2$ (다) : $2k$

③ (가) : 2 (나) : $4(k+1)^2$ (다) : $2k+1$

④ (가) : 2 (나) : $2(k+1)^2$ (다) : $2k+1$

⑤ (가) : 2 (나) : $4(k+1)^2$ (다) : $2k$

111013가 외 1회 # 5731

73번

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\\&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

i) $n=1$일 때,

(좌변)=(우변)= $\boxed{(가)}$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.

ii) $n=k(k\geq 1)$일 때, 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned}&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\\&=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\end{aligned}$$ 이다.

$n=k+1$ 일 때,

$$\begin{aligned}&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\boxed{(나)}\\&=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\boxed{(나)}\\&=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\boxed{(다)}\\&=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\end{aligned}$$

이다. 그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 i), ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

이 증명에서 (가)~(다) 에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은 ?

① (가) : 1 (나) : $\frac{1}{2k+2}$ (다) : $\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$

② (가) : 1 (나) : $\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k+2}$ (다) : $\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}$

③ (가) : $\frac{1}{2}$ (나) : $\frac{1}{2k+2}$ (다) : $\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$

④ (가) : $\frac{1}{2}$ (나) : $\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k+2}$ (다) : $\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+2}$

⑤ (가) : $\frac{1}{2}$ (나) : $\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k+2}$ (다) : $\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}$

100409가 외 1회 # 5819

74번

다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2n+1-2k)^2=\frac{n^2(2n^2+1)}{3}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, 등식

$$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2=\frac{m^2(2m^2+1)}{3}$$

이 성립한다고 가정하자. $n=m+1$ 일 때,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1)(2m+3-2k)^2\\&=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+3-2k)^2+\boxed{(가)}\\&=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2\\&+\boxed{(나)}\times\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(m+1-k)+\boxed{(가)}\\&=\frac{(m+1)^2\left\{2(m+1)^2+1\right\}}{3}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(m)$, (나)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $f(3)+p$ 의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

170719나 # 2702

75번

자연수 n에 대하여 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$로 정의한다. 다음은 2이상인 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = n(a_n - 1)$$

이 성립함을 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n = 2$일 때, (좌변)=(우변)= $\boxed{(\text{가})}$이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n = k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} = k(a_k - 1)$$

양변에 a_k를 더하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = \boxed{(\text{나})}$$

그런데 $a_k = a_{k+1} - \boxed{(\text{다})}$이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k = (k+1)(a_{k+1} - 1)$$

그러므로 $n = k+1$일 때도 성립한다.

따라서 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 ?

① (가) : 1 (나) : $ka_{k+1} - k$ (다) : $\frac{1}{k}$

② (가) : 1 (나) : $(k+1)a_k - k$ (다) : $\frac{1}{k+1}$

③ (가) : 1 (나) : $(k+1)a_k - k$ (다) : $\frac{1}{k}$

④ (가) : $\frac{3}{2}$ (나) : $ka_{k+1} - k$ (다) : $\frac{1}{k+1}$

⑤ (가) : $\frac{3}{2}$ (나) : $(k+1)a_k - k$ (다) : $\frac{1}{k+1}$

090313가 외 1회 # 5970

76번

다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1) + 1$이 성립함을 증명한 것이다.

<증명>

(i) $n = 1$일 때, $4 > 2 + 1$

$n = 2$일 때, $8 > 6 + 1$이므로 성립한다.

(ii) $n = k (k \geq 2)$일 때, $2^{k+1} > \boxed{(\text{가})} + 1 \cdots$ ㉠

이 성립한다고 가정하자.

㉠의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1)$$

이때, $2(k^2 + k + 1) - \boxed{(\text{나})} = k^2 - k - 1$

$k \geq 2$일 때, $k^2 - k - 1 \boxed{(\text{다})} 0$이므로

$$2^{k+1} > 2(k^2 + k + 1) > \boxed{\text{나})}$$

$$\therefore 2^{k+2} > \boxed{(\text{나})}$$

따라서 $n = k + 1$일 때도 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$2^{k+1} > n(n+1) + 1$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : $k(k-1)$ (나) : $(k+1)(k+2)$ (다) : $<$

② (가) : $k(k+1)$ (나) : $(k+1)(k+2)$ (다) : $>$

③ (가) : $k(k-1)$ (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$ (다) : $>$

④ (가) : $k(k-1)$ (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$ (다) : $<$

⑤ (가) : $k(k+1)$ (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$ (다) : $>$

071015나 # 6470

77번

다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(n+1-k)^2=\sum_{k=1}^{n}k \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$일 때, (좌편)$=1$, (우변)$=1$이므로 ㉠이 성립한다.

(2) $n=m$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}(m+1-k)^2=\sum_{k=1}^{m}k$$

이다. $n=m+1$일 때 ㉠이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k-1}(m+2-k)^2\\&=(-1)^0(m+1)^2+(-1)^1m^2+\cdots+(-1)^m\cdot 1^2\\&=(m+1)^2+\boxed{\text{(가)}}\cdot\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}(m+1-k)^2\\&=(m+1)^2+\boxed{\text{(나)}}\\&=\sum_{k=1}^{m+1}k\end{aligned}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명에서 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 할 때, $a+f(9)$의 값은?

① -46 ② -44 ③ -42 ④ -40 ⑤ -38

121012가 외 1회 # 5535

78번

다음은 4이상의 자연수 n에 대하여 부등식

$$\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}<1+\frac{2n-3}{n(n-1)}$$

이 성립함을 증명하는 과정이다.

(단, $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$)

<증명>

$a_n=\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}$이라 하자.

(i) $n=4$일 때,

(좌변)$=\dfrac{1!+2!+3!+4!}{4!}=\dfrac{33}{24}$,

(우변)$=1+\dfrac{5}{12}=\dfrac{17}{12}$이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 4)$일 때, 성립한다고 가정하면

$a_k<1+\dfrac{2k-3}{k(k-1)}$이다.

$n=k+1$ 일 때,

$$a_{k+1}=\frac{1!+2!+3!+\cdots+(k+1)!}{(k+1)!}=1+\boxed{\text{(가)}}a_k$$

한편, $(k-1)^2\boxed{\text{(나)}}2k-3$ 이므로

$\dfrac{2k-3}{k(k-1)}<\dfrac{k-1}{k}$이다.

그런데, $1+\dfrac{2k-3}{k(k-1)}<\dfrac{\boxed{\text{(다)}}}{k}$이므로

$$\begin{aligned}a_{k+1}&<1+\boxed{\text{(가)}}\left\{1+\frac{2k-3}{k(k-1)}\right\}\\&<1+\boxed{\text{(가)}}\frac{\boxed{\text{(다)}}}{k}\\&=1+\frac{2(k+1)-3}{(k+1)\{(k+1)-1\}}\end{aligned}$$

이다.

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 (i),(ii)에 의하여 4이상의 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

이 과정에서 (가)~(다)에 알맞은 것을 바르게 짝지은 것은?

① (가) : $\dfrac{1}{k}$ (나) : $>$ (다) : $2k-1$

② (가) : $\dfrac{1}{k}$ (나) : $<$ (다) : $2k+1$

③ (가) : $\dfrac{1}{k+1}$ (나) : $>$ (다) : $2k-1$

④ (가) : $\dfrac{1}{k+1}$ (나) : $>$ (다) : $2k+1$

⑤ (가) : $\dfrac{1}{k+1}$ (나) : $<$ (다) : $2k+1$

090416가 외 1회 # 6018

79번

자연수 i에 대하여 $H_i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i}$이라 할 때, 다음은 부등식

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}(n = 0, 1, 2, \cdots) \cdots\cdots ㉠$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(i) $n = 0$일 때,

(좌변)$= H_{2^0} = H_1 = \boxed{(가)}$

(우변)$= 1 + \frac{0}{2} = 1$

그러므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n = k$일 때,

$H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$가 성립한다고 가정하면

$$H_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \boxed{(나)}$$
$$= H_{2^k} + \boxed{(나)}$$
$$\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \boxed{(나)}$$
$$\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \boxed{(다)} \cdot \frac{1}{2^{k+1}}$$
$$= 1 + \frac{k+1}{2}$$

그러므로 $n = k + 1$일 때도 ㉠이 성립한다.

따라서 0과 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : 1, (나) : $\sum_{l=1}^{2^k} \frac{1}{2^k + l}$, (다) : 2^{k-1}

② (가) : 1, (나) : $\sum_{l=1}^{2^k} \frac{1}{2^k + l}$, (다) : 2^k

③ (가) : 1, (나) : $\frac{1}{2^{k+1}}$, (다) : 2^k

④ (가) : $\frac{3}{2}$, (나) : $\frac{1}{2^{k+1}}$, (다) : 2^{k-1}

⑤ (가) : $\frac{3}{2}$, (나) : $\frac{1}{2^{k+1}}$, (다) : 2^k

070312가 외 1회 # 6350

80번

다음은 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{i=1}^{2n-1} \{i + (n-1)^2\} = (n-1)^3 + n^3 \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n = 1$일 때, $1 + 0^2 = 0^3 + 1^3$ 이므로 $(*)$ 이 성립한다.

(2) $n = k$일 때, $(*)$ 이 성립한다고 가정하고,

$n = k + 1$일 때, $(*)$ 이 성립함을 보이자.

$$\sum_{i=1}^{2k+1} (i + k^2) = \sum_{i=1}^{2k-1} \{i + (k-1)^2\} + \sum_{i=1}^{2k-1} (2k-1) + \boxed{(가)}$$
$$= \boxed{(나)}$$

그러므로 $n = k + 1$일 때도 $(*)$이 성립한다

따라서 (1), (2)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$ 이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 식을 $g(k)$라 할 때, $\frac{g(4)}{f(4)}$ 의 값은?

① $\frac{23}{7}$ ② $\frac{24}{7}$ ③ $\frac{25}{7}$ ④ $\frac{26}{7}$ ⑤ $\frac{27}{7}$

120317가 외 1회 # 5347

81번

다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4n}{3^n}=3-\frac{2n+3}{3^n}\cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n=1$ 일 때, (좌변) $=\frac{4}{3}$, (우변) $=3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$ 이므로 $(*)$이 성립한다.

(2) $n=k$ 일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4k}{3^k}=3-\frac{2k+3}{3^k}$ 이다.

위 등식의 양변에 $\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$ 을 더하여 정리하면

$$\frac{4}{3}+\frac{8}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\cdots+\frac{4k}{3^k}+\frac{4(k+1)}{3^{k+1}}$$

$$=3-\frac{1}{3^k}\left\{(2k+3)-\left(\boxed{\text{(가)}}\right)\right\}$$

$$=3-\frac{\boxed{\text{(나)}}}{3^{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $(*)$이 성립한다.

(1), (2)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 할 때, $f(3)\times g(2)$ 의 값은?

① 36 ② 39 ③ 42 ④ 45 ⑤ 48

170418나 # 2611

82번

다음은 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^3}\right)<3-\frac{1}{n}\quad\cdots ㉠$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명하는 과정이다.

<증명>

(i) $n=2$일 때

(좌변)$=\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)=\frac{9}{4}$,

(우변)$=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^3}\right)<3-\frac{1}{k}\quad\cdots ㉡$$

㉡의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$를 곱하면

$$\left(1+\frac{1}{1^3}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\left(1+\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^3}\right)\left(\boxed{\text{(가)}}\right)$$

$$<\left(3-\frac{1}{k}\right)\left(\boxed{\text{(가)}}\right)\cdots ㉢$$

㉢의 우변을 정리하면

(우변)$=3-\frac{\boxed{\text{(나)}}}{k(k+1)^3}$

이 때, $\frac{\boxed{\text{(나)}}}{k(k+1)^3}-\frac{1}{k+1}\boxed{\text{(다)}}0$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식은 성립한다.

위의 증명 과정에서 (가),(나),(다)에 알맞은 것은 ?

① (가) : $1+\frac{1}{(k+3)^3}$ (나) : k^3+3k^2+2 (다) : $<$

② (가) : $1+\frac{1}{(k+3)^3}$ (나) : k^3+3k^2+2 (다) : $>$

③ (가) : $1+\frac{1}{(k+3)^3}$ (나) : k^3-3k^2+2 (다) : $<$

④ (가) : $\frac{1}{(k+3)^3}$ (나) : k^3-3k^2+2 (다) : $>$

⑤ (가) : $\frac{1}{(k+3)^3}$ (나) : k^3-3k^2+2 (다) : $<$

090714가 외 1회 # 6066

83번

다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\quad \cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

$S_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}, T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$이라 하자.

(1) $n=1$일 때, $S_1=\boxed{(가)}=T_1$이므로 $(*)$이 성립한다.

(2) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$S_{m+1}=S_m+\boxed{(나)}$$

$$\begin{aligned}T_{m+1}&=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\frac{1}{m+4}+\cdots+\frac{1}{2m+2}\\&=T_m-\boxed{(다)}+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m+2}\\&=T_m+\boxed{(나)}\end{aligned}$$

이므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다)에 들어갈 것으로 알맞은 것은?

① (가) : 1 (나) : $\frac{1}{2m+1}$ (다) : $\frac{1}{m}$

② (가) : 1 (나) : $\frac{1}{2m+1}$ (다) : $\frac{1}{m+1}$

③ (가) : $\frac{1}{2}$ (나) : $\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$ (다) : $\frac{1}{m+1}$

④ (가) : $\frac{1}{2}$ (나) : $\frac{1}{2m+1}-\frac{1}{2m+2}$ (다) : $\frac{1}{m}$

⑤ (가) : $\frac{1}{2}$ (나) : $\frac{1}{2m+1}$ (다) : $\frac{1}{m+1}$

100313가 외 1회 # 5778

84번

수열 $\{a_n\}$이

$$T_n=2a_1+3a_2+\cdots+(n+1)a_n=\frac{n}{2n+4}$$
(단, $n=1,2,3,\cdots$)

을 만족할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}-T_n\quad\cdots\cdots(\bigstar)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변)$=a_1=\boxed{(가)}$

(우변)$=\frac{1}{(1+1)^2}-T_1=\boxed{(가)}$

이므로 $(\bigstar)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(\bigstar)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+1)^2}-T_m$$

이다. $n=m+1$일 때, $(\bigstar)$이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}a_k&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+1)^2}-T_m+a_{m+1}\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+1)^2}-T_m+\boxed{(나)}(T_{m+1}-T_m)\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+1)^2}-T_{m+1}+\frac{m+3}{m+2}(T_{m+1}-T_m)\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+1)^2}-T_{m+1}+\frac{1}{(m+2)^2}\\&=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{(k+1)^2}-T_{m+1}\end{aligned}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 $(\bigstar)$이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(\bigstar)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 α, (나)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 할 때, $\frac{\alpha}{f(2)}$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

120719가 외 1회 # 5494

85번

$n \geq 2$인 자연수일 때, 부등식

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{n}\right)\cdots ㉠$$

을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

(i) $n=2$일 때,

좌변은 $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{12}$이고

우변은 $\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$이므로 성립한다.

(ii) $n=k\ (k \geq 2)$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)\cdots ㉡$$

㉡식의 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면

$$\sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(가)}$$

한편

$\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(가)}$에서 $2(2k+1)>4k$

임을 이용하여

$$\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(가)}<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(나)}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4(k+1)}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 부등식 ㉠은 $n \geq 2$인 모든 자연수에 대하여 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$ (나) : $\frac{1}{2k(k+1)}$

② (가) : $\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$ (나) : $\frac{1}{4k(k+1)}$

③ (가) : $\frac{1}{2k(2k-1)}$ (나) : $\frac{1}{2k(k+1)}$

④ (가) : $\frac{1}{2k(2k-1)}$ (나) : $\frac{1}{4k(k+1)}$

⑤ (가) : $\frac{1}{2k(2k-1)}$ (나) : $\frac{1}{k(k+1)}$

080713나 # 6278

86번

다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변) $=(-1)^2\times 1^2=1$

(우변) $=(-1)^2\times\frac{1\times 2}{2}=1$

따라서 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2&=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2+\boxed{(가)}\\&=\boxed{(나)}+\boxed{(가)}\\&=(-1)^{m+2}\cdot\frac{(m+1)(m+2)}{2}\end{aligned}$$

이다.

따라서 $n=m+1$ 일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라 할 때, $\frac{f(5)}{g(2)}$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

170316나 # 2549

87번

다음은 무한수열 $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \cdots, \frac{n}{2^n}, \cdots$이 수렴함을 증명하는 과정이다.

<증명>

먼저 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여, $2^n > n^2 \cdots\cdots$ ㉠

이 성립함을 증명하자.

(i) $n=5$일 때,

(좌변)$=2^5=32$, (우변)$=5^2=25$ 이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 5)$일 때, $2^k > k^2$이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} 2^{k+1}-(k+1)^2 &= 2 \cdot 2^k-(k+1)^2 \\ &> 2 \cdot \boxed{(가)} - (k^2+2k+1) \\ &= k^2-2k-1>0 \end{aligned}$$

$\therefore 2^{k+1} > (k+1)^2$

그러므로 ㉠은 $n=k+1$일 때도 성립한다.

(i),(ii) 에 의하여 $n \geq 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $2^n > n^2$이 성립한다.

위에서 $2^n > n^2$ 이므로 $0 < \frac{n}{2^n} < \boxed{(나)}$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = \boxed{(다)}$이다.

따라서 무한수열 $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \cdots, \frac{n}{2^n}, \cdots$은 수렴한다.

위의 빈칸 (가), (나), (다)에 들어가기에 알맞은 것은?

① (가) k (나) $\frac{1}{n}$ (다) 0

② (가) k (나) $\frac{1}{n^2}$ (다) 1

③ (가) k^2 (나) $\frac{1}{n}$ (다) 0

④ (가) k^2 (나) $\frac{1}{n}$ (다) 1

⑤ (가) k^2 (나) $\frac{1}{n^2}$ (다) 0

050411가 외 1회 # 7053

88번

다음은 자연수 n에 대하여

$$1=1^3$$
$$3+5=2^3$$
$$7+9+11=3^3$$
$$13+15+17+19=4^3$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i=1}^{n}(2i+n^2-n-1)=n^3$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

[증명]

i) $n=1$일 때, $2 \cdot 1+1^2-1-1=1^3$이므로 성립한다.

ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면

$\sum_{i=1}^{k}(2i+k^2-k-1)=k^3$이다.

$n=k+1$일 때 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k+1} \boxed{(가)} \\ &= \sum_{i=1}^{k}(2i+k^2-k-1)+\sum_{i=1}^{k}2k+\boxed{(나)} \\ &= k^3+3k^2+3k+1 \\ &= (k+1)^3 \end{aligned}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.

i), ii)에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

이 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

① (가) : $2i+k^2+k-1$ (나) : k^2+3k+1

② (가) : $2i+k^2+k-1$ (나) : k^2-3k+1

③ (가) : $2i+k^2+k+1$ (나) : k^2+3k+1

④ (가) : $2i+k^2-k+1$ (나) : k^2-3k+1

⑤ (가) : $2i+k^2-k+1$ (나) : k^2+3k+1

070415가 외 1회 # 6398

89번

자연수 N에 대하여 수열 $\{a_n\}$을
$a_n = n(n+1)(n+2)\cdots(n+N-1)$이라 하자.
모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{N+n}{N+1}a_n \cdots\cdots (\star)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>
(1) $n=1$일 때,
(좌변)$= \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = \boxed{(가)}$
(우변)$= \frac{N+1}{N+1}a_1 = a_1 = \boxed{(가)}$
이므로 $(\star)$이 성립한다.
(2) $n=m$일 때, $(\star)$이 성립한다고 가정하면
$\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{N+m}{N+1}a_m$이다.
$n=m+1$일 때, $(\star)$이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} a_k &= \frac{N+m}{N+1}a_m + \boxed{(나)} \\ &= \frac{1}{N+1} \times \frac{(m+N)!}{(m-1)!} + \boxed{(나)} \\ &= \frac{1}{N+1}\left\{\boxed{(다)}\right\} \\ &= \frac{N+m+1}{N+1}a_{m+1}\end{aligned}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 $(\star)$이 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(\star)$이 성립한다.

위 증명에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① (가) : $N!$ (나) : $\frac{(m+N)!}{m!}$ (다) : $\frac{(m+N-1)!}{m!}$

② (가) : $(N+1)!$ (나) : $\frac{(m+N-1)!}{m!}$ (다) : $\frac{(m+N)!}{m!}$

③ (가) : $N!$ (나) : $\frac{(m+N)!}{m!}$ (다) : $\frac{(m+N+1)!}{m!}$

④ (가) : $(N+1)!$ (나) : $\frac{(m+N)!}{m!}$ (다) : $\frac{(m+N+1)!}{m!}$

⑤ (가) : $N!$ (나) : $\frac{(m+N-1)!}{m!}$ (다) : $\frac{(m+N)!}{m!}$

100711가 외 1회 # 5871

90번

다음은 양수 a, b에 대하여 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $(a+b)^n - a^n - b^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}$이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>
(i) $n=1$일 때,
$(a+b)-a-b \geq 2^2 - 2^2$이므로 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 성립한다고 가정하면
$(a+b)^k - a^k - b^k \geq 2^{2k} - 2^{k+1}$이다.
$n=k+1$일 때 성립함을 보이자.
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$이면 $ab=a+b$이므로 ab의 최솟값은 $\boxed{(가)}$이다.

$$\begin{aligned}&(a+b)^{k+1} - a^{k+1} - b^{k+1} \\ &= \boxed{(나)}\{(a+b)^k - a^k - b^k\} + a^k b + ab^k \\ &\geq \boxed{(가)}(2^{2k} - 2^{k+1}) + \boxed{(다)} \\ &= 2^{2(k+1)} - 2^{(k+1)+1}\end{aligned}$$

그러므로 $n=k+1$일 때도 성립한다.
따라서 (i),(ii)에 의해서
모든 자연수 n에 대하여 $(a+b)^n - a^n - b^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}$이다.

이 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은 ?

① (가) : 2 (나) : $(a-b)$ (다) : 2^{k+1}

② (가) : 2 (나) : $(a-b)$ (다) : 2^{k+2}

③ (가) : 2 (나) : $(a+b)$ (다) : 2^{k+2}

④ (가) : 4 (나) : $(a+b)$ (다) : 2^{k+1}

⑤ (가) : 4 (나) : $(a+b)$ (다) : 2^{k+2}

080409가 외 1회 # 6202

91번

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 다음은 등식

$$nS_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \sum_{k=1}^{n} ka_k \quad (n \geq 2) \cdots\cdots (\star)$$

이 성립함을 증명한 것이다.

<증명>

(1) $n = 2$일 때,

(좌변)=(우변)= $\boxed{(가)}$ 이므로 $(\star)$이 성립한다.

(2) $n = i\ (i \geq 2)$일 때, $(\star)$이 성립한다고 가정하면,

$$(i+1)S_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} S_k = (i+1)S_{i+1} - \left(\sum_{k=1}^{i-1} S_k + S_i\right)$$

$$= (i+1)S_{i+1} - (\boxed{(나)})$$

$$= \sum_{k=1}^{i} ka_k + \boxed{(다)}$$

$$= \sum_{k=1}^{i+1} ka_k$$

따라서, $n = i+1$ 일 때,

$$(i+1)S_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} S_k = \sum_{k=1}^{i+1} ka_k$$가 성립힌다.

(1)과 (2)에 의하여 등식 $(\star)$은 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) : $a_1 + a_2$ (나) : $(i-1)S_i - \sum_{k=1}^{i} ka_k$ (다) : $i(S_i - S_{i-1})$

② (가) : $a_1 + a_2$ (나) : $(i+1)S_i - \sum_{k=1}^{i} ka_k$ (다) : $i(S_{i+1} - S_i)$

③ (가) : $a_1 + 2a_2$ (나) : $(i+1)S_i - \sum_{k=1}^{i} ka_k$ (다) : $i(S_{i+1} - S_i)$

④ (가) : $a_1 + 2a_2$ (나) : $(i+1)S_i - \sum_{k=1}^{i} ka_k$ (다) : $(i+1)(S_{i+1} - S_i)$

⑤ (가) : $a_1 + 2a_2$ (나) : $(i-1)S_i - \sum_{k=1}^{i} ka_k$ (다) : $(i+1)(S_{i+1} - S_i)$

110714가 외 1회 # 5681

92번

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} (a_n)^2 + 1 & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \\ 3a_n - 1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. a_4의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

200410나 # 9090

빠른 정답표

1번. ③	2번. ②	3번. ①	4번. 7	5번. ④
6번. 616	7번. 101	8번. 55	9번. 16	10번. ②
11번. 120	12번. ③	13번. ④	14번. ⑤	15번. ⑤
16번. ④	17번. ⑤	18번. 840	19번. ①	20번. ①
21번. ⑤	22번. 132	23번. ⑤	24번. ①	25번. ②
26번. ④	27번. ②	28번. ④	29번. ①	30번. ①
31번. 610	32번. 165	33번. ①	34번. ②	35번. 136
36번. ③	37번. ③	38번. 18	39번. 123	40번. ⑤
41번. ③	42번. ②	43번. ③	44번. ⑤	45번. ①
46번. 510	47번. 96	48번. 144	49번. ③	50번. ①
51번. 496	52번. 92	53번. ②	54번. 8	55번. ④
56번. 183	57번. ⑤	58번. 142	59번. ②	60번. ①
61번. ③	62번. 235	63번. ③	64번. 51	65번. ④
66번. ①	67번. ④	68번. 15	69번. ⑤	70번. ③
71번. ④	72번. ③	73번. ④	74번. ③	75번. ②
76번. ⑤	77번. ①	78번. ③	79번. ②	80번. ⑤
81번. ⑤	82번. ②	83번. ③	84번. ④	85번. ②
86번. ③	87번. ③	88번. ①	89번. ③	90번. ⑤
91번. ④	92번. ⑤			