2020 EBS 수능특강 확률과 통계 7. 통계적 추정

p91 유제3 단순변형

1. 2이상의 자연수 n에 대하여 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 이 모집단의 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{E}(X)=4$, $\mathrm{E}(X^2)=50$일 때, $\mathrm{E}(\overline{X}^2)\geq 18$을 만족시키는 자연수 n의 합을 구하면?

① 150 ② 151 ③ 152
④ 153 ⑤ 154

p91 유제3 단순변형

2. 모집단의 확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같다.

X	-1	0	1	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	1

이 모집단에서 크기가 5인 표본을 복원추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$의 값을 구하면?

① $\frac{4}{45}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{2}{15}$
④ $\frac{7}{45}$ ⑤ $\frac{8}{45}$

p93 유제5 응용변형

3. 어느 회사의 TV 광고에 대한 소비자의 만족도를 100점 만점의 점수로 조사했더니 평균이 75점이고, 표준편차가 10점인 정규분포를 이루었다고 한다. 이 조사에 참여한 집단에서 임의추출된 400명의 만족도의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\overline{X}$가 74점 이상 76점 이하일 확률을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구하면?

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.7745 ② 0.8664 ③ 0.9332
④ 0.9544 ⑤ 0.9987

p95 유제6 응용변형

4. 어느 포도 농원에서 수확한 포도 한 송이에 달린 포도 알의 개수는 정규분포를 따른다고 한다. 이 포도 농원에서 수확한 포도 25송이를 임의 추출하여 한 송이 당 포도 알의 개수를 조사하였더니 평균이 64개 이었다. 이 농원에서 수확한 포도 전체의 한 송이 당 포도 알의 개수의 평균 m을 신뢰도 95%로 추정하면 $60.08 \le m \le 67.92$, 신뢰도 99%로 추정하면 $\alpha \le m \le \beta$이다. $\beta - \alpha$의 값은?
(단, Z가 표준 정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$이다.)

① 10.32 ② 9.03 ③ 7.84
④ 7.74 ⑤ 5.16

p95 유제7 단순변형

5. 모평균이 m, 모표준편차가 4인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 400인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 90이고, 이를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $89+\alpha \le m \le 89+\beta$일 때, $\alpha+3\beta$의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.)

① 4.748 ② 4.760 ③ 4.772
④ 4.784 ⑤ 4.796

p96 1번 단순변형

6. 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 아래 표와 같다. 이 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $P(\overline{X} > 7)$의 값은?

X	3	5	7	9	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

p96 2번 단순변형

7. 모평균이 m이고, 모표준편차가 6인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{E}(\overline{X})=4n$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{2}{3}$이다. m의 값은?

① 108 ② 135 ③ 162
④ 189 ⑤ 216

p96 3번 단순변형

8. 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $Z=2\overline{X}-100$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다. n의 값은?

① 36 ② 49 ③ 64
④ 81 ⑤ 100

p96 4번 단순변형

9. 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 3^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $P(\overline{X}\geq a)=0.9772$이다. 상수 a의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0\leq Z\leq 2)=0.4772$로 계산한다.)

① 88 ② 88.5 ③ 89
④ 89.5 ⑤ 90

p96 4번 응용변형

10. A 음료회사에서 생산되는 B 음료수의 용량은 평균 $200ml$, 표준편차 $5ml$ 인 정규분포를 이룬다고 한다. 음료수 자동판매기에서 판매되는 이 음료수 100개를 임의로 추출하여 그 용량의 평균을 $\overline{X}$ 라 하자. 이 때, 아래 표준정규분포표를 이용하여 $P(199 \leq \overline{X} \leq 201)$ 의 값을 구하면?

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8662 ② 0.9104 ③ 0.9544
④ 0.9710 ⑤ 0.9876

정답 및 해설

1	③	2	④	3	④	4	①	5	④
6	②	7	⑤	8	③	9	②	10	③

1) 정답 ③

[출제범위] 모평균과 표본평균

$\mathrm{E}(X)=4$, $\mathrm{E}(X^2)=50$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=50-4^2\\&=34\end{aligned}$$

이고

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=4$,

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n}=\dfrac{34}{n}$이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\overline{X}^2)&=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2\\&=\frac{34}{n}+16\end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{E}(\overline{X}^2)\geq 18$에서

$\dfrac{34}{n}+16\geq 18$, $n\leq 17$이다.

n은 2이상의 자연수이므로 $2\leq n\leq 17$에서 모든 자연수의 합을 구하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{17}k-1=\frac{17\times 18}{2}-1=152$이다.

필수 개념

▸ 표본평균의 평균과 분산

모평균 $\mathrm{E}(X)=m$, 모분산 $\mathrm{V}(X)=\sigma^2$ 인 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하는 경우

(1) $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n}{n}$

(2) 표본의 평균 $\Rightarrow$ $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=m$

(3) 표본의 분산 $\Rightarrow$ $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n}=\dfrac{\sigma^2}{n}$

(4) 표본의 표준편차 $\Rightarrow$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

2) 정답 ④

[출제범위] 모평균과 표본평균

모집단의 확률변수 X의 확률분포가 아래와 같으므로

X	-1	0	1	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	1

$\mathrm{E}(X)=(-1)\times\dfrac{1}{4}+0\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{5}{12}=\dfrac{1}{6}$

$\mathrm{V}(X)=(-1)^2\times\dfrac{1}{4}+0\times\dfrac{1}{3}+1^2\times\dfrac{5}{12}-\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{23}{36}$

이다.

표본의 크기가 $n=5$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{6}$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n}=\dfrac{\frac{23}{36}}{5}=\dfrac{23}{180}$이다.

따라서 $\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$$=\frac{23}{180}+\frac{1}{36}=\frac{7}{45}$$

이다.

필수 개념

▸ 표본평균의 평균과 분산

모평균 $\mathrm{E}(X)=m$, 모분산 $\mathrm{V}(X)=\sigma^2$ 인 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하는 경우

(1) $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n}{n}$

(2) 표본의 평균 $\Rightarrow$ $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=m$

(3) 표본의 분산 $\Rightarrow$ $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n}=\dfrac{\sigma^2}{n}$

(4) 표본의 표준편차 $\Rightarrow$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

3) 정답 ④

[출제범위] 표본평균의 분포

참여 집단의 평균이 75 점이고, 표준편차가 10 점인 정규분포를 따르므로 $\mathrm{N}(75,\ 10^2)$이다.

이 조사에 참여한 집단에서 임의추출된 400 명의

만족도의 표본평균을 $\overline{X}$ 라 할 때,

$\mathrm{E}(\overline{X})=75,\ \sigma(\overline{X})=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$ 이다.

따라서, 표본평균 $\overline{X}$ 는 $\mathrm{N}\left(75,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따르고,

$Z=\frac{\overline{X}-75}{\frac{1}{2}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

$$\begin{aligned}P(74\le\overline{X}\le 76)&=P\left(\frac{74-75}{\frac{1}{2}}\le Z\le\frac{76-75}{\frac{1}{2}}\right)\\&=P(-2\le Z\le 2)\\&=2P(0\le Z\le 2)\\&=0.9544\end{aligned}$$

이다.

필수 개념

▸ 표본평균의 분포

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출할 때,

표본평균 $\overline{\mathrm{X}}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

4) 정답 ①

[출제범위] 통계적 추정

모평균을 m, 모표준편차를 σ라 할 때, $n=25$이므로 신뢰도 95%인 신뢰구간은

$64-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}\le m\le 64+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}$ 이다.

$60.08\le m\le 67.92$에서

$1.96\times\frac{\sigma}{5}=3.92$이므로 $\sigma=10$이다.

따라서 구하는 신뢰도 99%의 신뢰구간에서

$\beta-\alpha=2\times 2.58\times\frac{10}{5}=10.32$이다.

필수 개념

▸ 모평균의 추정

모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 임의추출한 크기 n인 표본의 표본평균 $\overline{\mathrm{X}}$에 대한 모평균 m의 신뢰구간은

(1) $95\ \%$ 의 신뢰도

$$\overline{\mathrm{X}}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{\mathrm{X}}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(2) $99\ \%$ 의 신뢰도

$$\overline{\mathrm{X}}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{\mathrm{X}}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

5) 정답 ④

[출제범위] 통계적 추정

표본평균이 $\overline{X}=90$, 모표준편차가 $\sigma=4$, 표본의 크기가 $n=400$이므로

모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$90-1.96\times\frac{4}{\sqrt{400}}\le m\le 90+1.96\times\frac{4}{\sqrt{400}}$

$90-0.392\le m\le 90+0.392$

$89.608\le m\le 90.392$

이다.

따라서 $89+\alpha\le m\le 89+\beta$으로 고치면

$89+0.608\le m\le 89+1.392$에서

$\alpha=0.608,\ \beta=1.392$이므로

$\alpha+3\beta=0.608+4.176=4.784$이다.

필수 개념

▸ 모평균의 추정

모집단의 분포가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 임의추출한 크기 n인 표본의 표본평균 $\overline{\mathrm{X}}$에 대한 모평균 m의 신뢰구간은

(1) $95\ \%$ 의 신뢰도

$$\overline{\mathrm{X}}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{\mathrm{X}}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(2) $99\ \%$ 의 신뢰도

$$\overline{\mathrm{X}}-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{\mathrm{X}}+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

6) 정답 ②

[출제범위] 모평균과 표본평균

확률변수 $\overline{X}$가 갖는 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이므로 $P(\overline{X}>7)=P(\overline{X}=8)+P(\overline{X}=9)$이다.

모집단에서 임의 추출한 크기가 2인 표본을 $(X_1,\ X_2)$이라 할 때,

$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}=8$에서

$X_1+X_2=16$이므로

$(X_1,\ X_2)$은 $(7,\ 9)$, $(9,\ 7)$의 2가지 경우이다.

$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}=9$에서

$X_1+X_2=18$이므로

$(X_1,\ X_2)$은 $(9,\ 9)$이다.

따라서

$$\begin{aligned} P(\overline{X}>7) &= P(\overline{X}=8)+P(\overline{X}=9) \\ &= \frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

필수 개념

▸ 표본평균의 평균과 분산

모평균 $\mathrm{E}(X)=m$, 모분산 $\mathrm{V}(X)=\sigma^2$ 인 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하는 경우

(1) $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n}{n}$

(2) 표본의 평균 $\Rightarrow$ $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=m$

(3) 표본의 분산 $\Rightarrow$ $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n}=\dfrac{\sigma^2}{n}$

(4) 표본의 표준편차 $\Rightarrow$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

7) 정답 ⑤

[출제범위] 모평균과 표본평균

$\mathrm{E}(\overline{X})=4n$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{2}{3}$이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{6^2}{n}=\dfrac{2}{3}$에서 $n=54$이다.

따라서 $\mathrm{E}(\overline{X})=m=4n$에서

$m=4\times54=216$이다.

필수 개념

▸ 표본평균의 평균과 분산

모평균 $\mathrm{E}(X)=m$, 모분산 $\mathrm{V}(X)=\sigma^2$ 인 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하는 경우

(1) $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n}{n}$

(2) 표본의 평균 $\Rightarrow$ $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=m$

(3) 표본의 분산 $\Rightarrow$ $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n}=\dfrac{\sigma^2}{n}$

(4) 표본의 표준편차 $\Rightarrow$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

8) 정답 ③

[출제범위] 모평균과 표본평균

정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\mathrm{E}(\overline{X})=50$, $V(\overline{X})=\dfrac{16}{n}$이다.

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따르므로 $\mathrm{E}(Z)=0$, $\mathrm{V}(Z)=1$이다.

$Z=2\overline{X}-100$에서

$\mathrm{E}(Z)=\mathrm{E}(2\overline{X}-100)$

$=2\mathrm{E}(\overline{X})-100$

$=2\times50-100=0$이다.

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(Z) &= \mathrm{V}(2\overline{X}-100) \\ &= 4\mathrm{V}(\overline{X}) \\ &= 4\times\frac{16}{n} \end{aligned}$$

$\mathrm{V}(Z)=1$이므로 $4\times\dfrac{16}{n}=1$에서

$n=64$이다.

필수 개념

▸ 표본평균의 평균과 분산

모평균 $\mathrm{E}(X)=m$, 모분산 $\mathrm{V}(X)=\sigma^2$ 인 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하는 경우

(1) $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n}{n}$

(2) 표본의 평균 $\Rightarrow$ $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=m$

(3) 표본의 분산 $\Rightarrow$ $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{n}=\dfrac{\sigma^2}{n}$

(4) 표본의 표준편차 $\Rightarrow$ $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

9) 정답 ②

[출제범위] 표본평균의 분포

정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 3^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\mathrm{E}(\overline{X})=90$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{3}{\sqrt{16}}=\dfrac{3}{4}$이므로

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(90,\ \left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-90}{\frac{3}{4}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

이때 $P(\overline{X}\geq a)=P\left(Z\geq\dfrac{a-90}{\frac{3}{4}}\right)$

$=P\left(Z\geq\dfrac{4}{3}a-120\right)$

$=P\left(Z\leq 120-\dfrac{4}{3}a\right)$

$=0.5+P\left(0\leq Z\leq 120-\dfrac{4}{3}a\right)$

$=0.9772$

이므로

$P\left(0\leq Z\leq 120-\dfrac{4}{3}a\right)=0.4772$이다.

따라서 $P(0\leq Z\leq 2)=0.4772$에서

$120-\dfrac{4}{3}a=2$

$a=88.5$

이다.

필수 개념

▸ 표본평균의 분포

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출할 때,

표본평균 $\overline{\mathrm{X}}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.

10) 정답 ③

[출제범위] 표본평균의 분포

A 음료회사에서 생산되는 B 음료수의 용량은 평균 $200ml$, 표준편차 $5ml$ 인 정규분포를 따르므로 $\mathrm{N}(200,\ 5^2)$이다.

모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\mathrm{E}(\overline{X})=200$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{5}{\sqrt{100}}=\dfrac{1}{2}$이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(200,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-200}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

이때 $P(199\leq\overline{X}\leq 201)$

$=P\left(\dfrac{199-200}{\frac{1}{2}}\leq Z\leq\dfrac{201-200}{\frac{1}{2}}\right)$

$=P(-2\leq Z\leq 2)$

$=2\times P(0\leq Z\leq 2)$

$=0.9544$

필수 개념

▸ 표본평균의 분포

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출할 때,

표본평균 $\overline{\mathrm{X}}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.