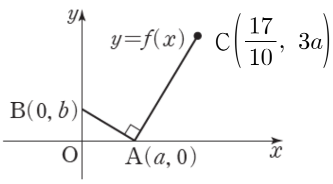
2020 EBS 수능특강 확률과 통계 6. 연속확률변수의 확률분포

p75 유제1 단순변형

1. 그림과 같이 좌표평면에 세 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$, $\mathrm{C}\left(\frac{17}{10},\ 3a\right)$가 있다. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \le X \le 2$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 선분 AB, AC로 이루어진다. $\angle\mathrm{BAC}=90°$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $50(a+b)$의 값을 구하면?
(단, $0<b<a<1$)



① 35 ② 40 ③ 45
④ 50 ⑤ 55

p75 유제2 단순변형

2. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \le x \le 2$이고,
확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} k & \left(0 \le x < \frac{4}{3}\right) \\ 2k\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}k & \left(\frac{4}{3} \le x \le 2\right) \end{cases}$$

일 때, $P\left(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}\right)$의 값은?
(단, k는 상수이다.)

① $\frac{37}{88}$ ② $\frac{19}{44}$ ③ $\frac{39}{88}$
④ $\frac{5}{11}$ ⑤ $\frac{41}{88}$

p77 유제4 단순변형

3. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ \sigma^2)$을 따르고, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다. 두 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이고, $f(a)=f(30)=g(30)$이다. $P(a \le X \le 30)=0.81$, $P(Y \ge b)=0.095$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?
(단, $m \neq 24$)

① 52 ② 54 ③ 56
④ 58 ⑤ 60

p77 유제4 단순변형

4. 이차방정식 $x^2+2kx+9=0$에서 k의 값이 정규분포 $\mathrm{N}(1,\ 2^2)$을 따를 때, 이 방정식이 실근을 가질 확률은? (단, X가 $N(m,\ \sigma^2)$을 따를 때 $P(|X-m| \le \sigma)=0.682$,
$P(|X-m| \le 2\sigma)=0.954$)

① 0.023 ② 0.046 ③ 0.159
④ 0.182 ⑤ 0.318

p79 유제6 단순변형

5. 어느 공장에서 생산하는 전구 한 개의 수명은 평균이 2000시간, 표준편차가 40시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 전구 중에서 임의로 선택한 전구 한 개의 수명이 a시간 이상일 확률이 0.9641일 때, 실수 a의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.4	0.4192
1.8	0.4641
2.2	0.4861
2.6	0.4953

① 1908 ② 1918 ③ 1928
④ 1938 ⑤ 1948

p79 유제6 단순변형

6. 집에서 학교까지의 통학 시간을 X분 이라하면 X는 정규분포 $N(50,\ 5^2)$을 따른다.
수업 시작 1시간 전에 집에서 출발할 때, 지각할 확률을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.3413 ⑤ 0.4332

p81 유제7 단순변형

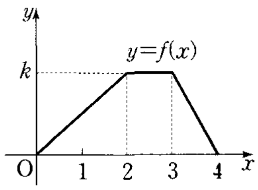
7. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던지는 시행을 288회 반복할 때, 두 주사위의 눈의 합이 3의 배수가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자.
$P(88 \le X \le 112)$의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.6826 ② 0.8185 ③ 0.8664
④ 0.9104 ⑤ 0.9710

p82 1번 단순변형

8. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \le x \le 4$이고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 상수 k의 값은?



① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

p82 2번 단순변형

9. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다.
$P(X \ge 6)=0.65$, $P(X \ge 14)=0.35$일 때,
$P(|X-m| \le 4)$의 값은?

① 0.20 ② 0.25 ③ 0.30
④ 0.35 ⑤ 0.40

p82 3번 단순변형

10. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(4m,\ m^2)$을 따르고, 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.
$P(m \le X \le 30)=P(-2 \le Z \le 3)$일 때, 양수 m의 값은?

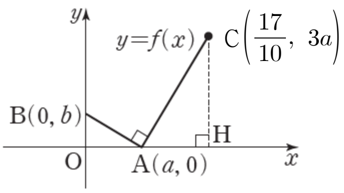
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

정답 및 해설

1	③	2	①	3	⑤	4	④	5	③
6	①	7	②	8	④	9	③	10	⑤

1) 정답 ③

[출제범위] 확률밀도함수



점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 원점 O에 대하여 $\angle \mathrm{OAB} = \angle \mathrm{HCA}$이므로 두 직각삼각형 OAB, HCA는 서로 닮음이다.

또 $\overline{\mathrm{OA}} = a$, $\overline{\mathrm{HC}} = 3a$이므로

두 삼각형 OAB, HCA의 닮음비는 $1 : 3$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AH}} = 3\overline{\mathrm{OB}} = 3b$이므로

$\overline{\mathrm{OA}} + \overline{\mathrm{AH}} = \frac{17}{10}$에서

$a + 3b = \frac{17}{10}$ …… ㉠

$f(x)$가 확률밀도함수이므로 $0 \le x \le \frac{17}{10}$에서 함수 $y=(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.

두 삼각형 OAB, HCA의 넓이의 비는 $1 : 9$이므로 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{10}$이다.

즉, $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{10}$, $ab = \frac{1}{5}$ …… ㉡

㉠에서 $a = \frac{17}{10} - 3b$이므로 ㉡에 대입하면

$\left(\frac{17}{10} - 3b\right)b = \frac{1}{5}$

$30b^2 - 17b + 2 = 0$

$(6b-1)(5b-2) = 0$

$b = \frac{1}{6}$ 또는 $b = \frac{2}{5}$

$b = \frac{1}{6}$이면 ㉡에서 $a = \frac{6}{5}$

$b = \frac{2}{5}$이면 ㉡에서 $a = \frac{1}{2}$

$0 < b < a < 1$이므로 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{5}$

따라서 $50(a+b) = 50\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right) = 45$

필수 개념

▸ 확률밀도 함수

연속확률변수 X가 $a \le x \le b$의 임의의 값을 취할 때, 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f(x)$를 확률변수 X의 확률밀도함수라 한다.

(1) 모든 x에 대하여

$f(x) \ge 0$ (단, $a \le x \le b$)

(2) 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 $x=a$와 $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

▸ 확률밀도 함수에서 확률 구하기

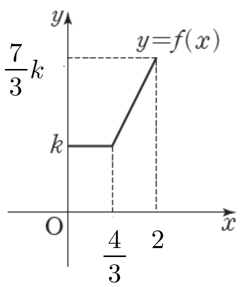
두 상수 c, d에 대하여 $P(c \le X \le d)$는 함수 $f(x)$와 x축 및 $x=c$와 $x=d$로 둘러싸인 부분의 넓이이다.

2) 정답 ①

[출제범위] 확률밀도함수

함수 $f(x) = \begin{cases} k & \left(0 \le x < \frac{4}{3}\right) \\ 2k\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}k & \left(\frac{4}{3} \le x \le 2\right) \end{cases}$의

그래프는 그림과 같다.



$f(x)$가 확률밀도함수이므로 $0 \le x \le 2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이다.

즉, $\frac{4}{3} \times k + \frac{1}{2} \times \left(k + \frac{7}{3}k\right) \times \frac{2}{3} = 1$이므로

$\frac{22}{9}k = 1$에서 $k = \frac{9}{22}$이다.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{9}{22} & \left(0 \le x < \dfrac{4}{3}\right) \\ \dfrac{9}{11}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{11} & \left(\dfrac{4}{3} \le x \le 2\right) \end{cases}$$

이므로

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{6}{11}$$

따라서

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}\right) &= P\left(\frac{1}{2} \le x \le \frac{4}{3}\right) + P\left(\frac{4}{3} \le x \le \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{5}{6}\times\frac{9}{22}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{22}+\frac{6}{11}\right)\times\frac{1}{6} \\ &= \frac{15}{44}+\frac{7}{88} \\ &= \frac{37}{88} \end{aligned}$$

필수 개념

▸ 확률밀도 함수

연속확률변수 X가 $a \le x \le b$의 임의의 값을 취할 때, 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f(x)$를 확률변수 X의 확률밀도함수라 한다.

(1) 모든 x에 대하여

$f(x) \geq 0$ (단, $a \le x \le b$)

(2) 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 $x=a$와 $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

▸ 확률밀도 함수에서 확률 구하기

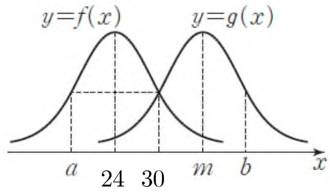
두 상수 c, d에 대하여 $P(c \leqq X \leqq d)$는 함수 $f(x)$와 x축 및 $x=c$와 $x=d$로 둘러싸인 부분의 넓이이다.

3) 정답 ⑤

[출제범위] 정규분포

확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, 두 확률변수 X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이고,

$f(a)=f(30)=g(30)$이므로 아래 그림과 같다.



$P(a \le X \le 30)=0.81>0.5$이므로

$a<24$이고, $f(a)=f(30)$이므로

$\dfrac{a+30}{2}=24$에서 $a=18$이다.

두 확률변수 X, Y의 표준편차가 같고, $m \neq 24$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 겹쳐질 수 있다.

함수 $y=(x)$의 그래프는 직선 $x=24$에 대하여 대칭이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$f(30)=g(30)$에서

$\dfrac{24+m}{2}=30$

$m=36$이다.

$P(a \le X \le 30)=P(18 \le X \le 30)$

$=2P(24 \le X \le 30)$

$=0.81$

이므로 $P(24 \le X \le 30)=0.405$

$P(Y \ge b)=0.095$이고,

$P(X \ge 30)=0.095$이므로

$30-24=b-36$에서

$b=42$

따라서 $a=18$, $b=42$이므로

$a+b=18+42=60$이다.

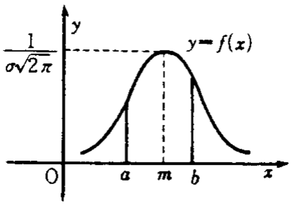
필수 개념

▸ 정규분포곡선의 성질

(1) 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

(2) x축을 점근선으로 하고,
곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

(3) $x=m$일 때, 최대값 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$를 갖는다.



4) 정답 ④

[출제범위] 정규분포

이차방정식 $x^2+2kx+9=0$에서 k의 값이 정규분포 $\mathrm{N}(1,\ 2^2)$을 따르를 때, 이 방정식이 실근을 가질 조건은 $D/4=k^2-9\geq 0$에서

$(k-3)(k+3)\geq 0$

$k\leq -3$ 또는 $k\geq 3$이다.

확률을 구하면

$P(X\leq -3)$ 또는 $P(X\geq 3)$이다.

조건에서

$P(|X-m|\leq \sigma)=0.682$이므로

$P(m-\sigma\leq X\leq m+\sigma)$

$=2P(m\leq X\leq m+\sigma)=0.682$

$\therefore\ P(m\leq X\leq m+\sigma)=0.341$

$P(|X-m|\leq 2\sigma)=0.954$이므로

$P(m-2\sigma\leq X\leq m+2\sigma)$

$=2P(m\leq X\leq m+2\sigma)=0.954$

$\therefore\ P(m\leq X\leq m+2\sigma)=0.477$

따라서

$$\begin{aligned}P(X\leq -3)&=(X\leq 1-4)\\&=P(X\leq m-2\sigma)\\&=0.5-P(m-2\sigma\leq X\leq m)\\&=0.5-P(m\leq X\leq m+2\sigma)\\&=0.5-0.477\\&=0.023\end{aligned}$$

또, $P(X\geq 3)=(X\geq 1+2)$

$$\begin{aligned}&=P(X\geq m+\sigma)\\&=0.5-P(m\leq X\leq m+\sigma)\\&=0.5-0.341\\&=0.159\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$P(X\leq -3)+P(X\geq 3)=0.023+0.159=0.182$

이다.

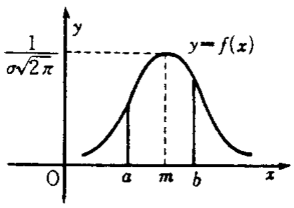
필수 개념

▸ 정규분포곡선의 성질

(1) 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

(2) x축을 점근선으로 하고,
곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

(3) $x=m$일 때, 최대값 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$를 갖는다.



5) 정답 ③

[출제범위] 표준정규분포

이 공장에서 생산하는 전구 한 개의 수명을 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(2000,\ 40^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-2000}{40}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

이때 $P(X\geq a)=0.9641$에서

$P\left(Z\geq \dfrac{a-2000}{40}\right)=0.9641$이므로

$P\left(\dfrac{a-2000}{40}\leq Z\leq 0\right)=0.9641-0.5=0.4641$

따라서

$P\left(0\leq Z\leq \dfrac{2000-a}{40}\right)=0.4641$

이므로 표준정규분포표에서

$\dfrac{2000-a}{40}=1.8$이므로 $a=1928$이다.

필수 개념
▸ 표준정규분포 (1) 표준화 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$를 따를 때, $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$의 확률분포는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$ 을 따른다. (2) 확률계산 $P(a \leqq X \leqq b)=P\left(\dfrac{a-m}{\sigma} \leqq Z \leqq \dfrac{b-m}{\sigma}\right)$

6) 정답 ①

[출제범위] 표준정규분포

집에서 학교까지의 통학 시간을 X분 이라하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

이때 수업 시작 1시간 전에 집에서 출발했으므로 지각할 확률을 구하면

$$\begin{aligned}P(X \geq 60) &= P\left(Z \geq \frac{60-50}{5}\right)\\ &= P(Z \geq 2)\\ &= 0.5-P(0 \leq Z \leq 2)\\ &= 0.5-0.4772\\ &= 0.0228\end{aligned}$$

이다.

필수 개념
▸ 표준정규분포 (1) 표준화 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$를 따를 때, $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$의 확률분포는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$ 을 따른다. (2) 확률계산 $P(a \leqq X \leqq b)=P\left(\dfrac{a-m}{\sigma} \leqq Z \leqq \dfrac{b-m}{\sigma}\right)$

7) 정답 ②

[출제범위] 표준정규분포

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 두 주사위의 눈의 합이 3의 배수가 나올 확률은

$3 \Rightarrow 2$가지

$6 \Rightarrow 5$가지

$9 \Rightarrow 4$가지

$12 \Rightarrow 1$가지

이므로 $\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$이다.

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(288,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따르므로 평균과 분산을 구하면

$\mathrm{E}(X)=288 \times \dfrac{1}{3}=96$

$\mathrm{V}(X)=288 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3}=64$

이다.

이때 288는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(96,\ 8^2)$을 따르고,

$Z=\dfrac{X-96}{8}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

따라서

$$\begin{aligned}P(88 \leq X \leq 112) &= P\left(\frac{88-96}{8} \leq Z \leq \frac{112-96}{8}\right)\\ &= P(-1 \leq Z \leq 2)\\ &= P(-1 \leq Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 2)\\ &= P(0 \leq Z \leq 1)+P(0 \leq Z \leq 2)\\ &= 0.3413+0.4772\\ &= 0.8185\end{aligned}$$

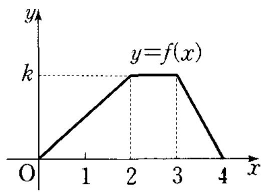
이다.

필수 개념
▸ 표준정규분포 (1) 표준화 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$를 따를 때, $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$의 확률분포는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$ 을 따른다. (2) 확률계산 $P(a \leqq X \leqq b)=P\left(\dfrac{a-m}{\sigma} \leqq Z \leqq \dfrac{b-m}{\sigma}\right)$

8) 정답 ④

[출제범위] 확률밀도함수

$f(x)$가 확률밀도함수이므로 $0 \leq x \leq 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이가 1이다.



따라서 넓이를 구하면

$\frac{1}{2}\times 2\times k+k+\frac{1}{2}\times 1\times k=1$

$\frac{5}{2}k=1$이다.

따라서 $k=\frac{2}{5}$이다.

필수 개념
▸ 확률밀도 함수 연속확률변수 X가 $a \leq x \leq b$의 임의의 값을 취할 때, 다음 두 조건을 만족하는 함수 $f(x)$를 확률변수 X의 확률밀도함수라 한다. (1) 모든 x에 대하여 $f(x) \geqq 0$ (단, $a \leq x \leq b$) (2) 함수 $f(x)$의 그래프와 x축 및 $x=a$와 $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다. ▸ 확률밀도 함수에서 확률 구하기 두 상수 c, d에 대하여 $P(c \leqq X \leqq d)$는 함수 $f(x)$와 x축 및 $x=c$와 $x=d$로 둘러싸인 부분의 넓이이다.

9) 정답 ③

[출제범위] 정규분포

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$P(X \geq 6)=0.65$이므로

$P(X \leq 6)=1-0.65=0.35$이고,

$P(6 \leq X \leq m)=0.5-0.35=0.15$이다.

$P(X \leq 6)=P(X \geq 14)$이므로

$\frac{6+14}{2}=m$에서 $m=10$이다.

$\therefore\ P(6 \leq X \leq 10)=P(10 \leq X \leq 14)=0.15$

따라서

$P(|X-m| \leq 4)=P(|X-10| \leq 4))$

$=P(6 \leq X \leq 14)$

$=P(6 \leq X \leq 10)+P(10 \leq X \leq 14)$

$=2P(10 \leq X \leq 14)$

$=2\times 0.15$

$=0.30$

이다.

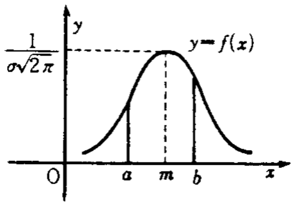
필수 개념

▸ 정규분포곡선의 성질

(1) 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

(2) x축을 점근선으로 하고,
 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

(3) $x=m$일 때, 최대값 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$를 갖는다.



10) 정답 ⑤

[출제범위] 표준정규분포

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(4m,\ m^2)$을 따르므로

$Z_1=\dfrac{X-4m}{m}$으로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

$P(m\le X\le 30)=P\left(\dfrac{m-4m}{m}\le Z_1\le\dfrac{30-4m}{m}\right)$

$=P\left(-3\le Z_1\le\dfrac{30-4m}{m}\right)$

$P(-2\le Z\le 3)=P(-3\le Z\le 2)$이므로

$\dfrac{30-4m}{m}=2$에서 $m=5$이다.

필수 개념

▸ 표준정규분포

(1) 표준화

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$를 따를 때,

$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$의 확률분포는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$ 을 따른다.

(2) 확률계산

$P(a\leqq X\leqq b)=P\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\leqq Z\leqq\dfrac{b-m}{\sigma}\right)$