30번 해설

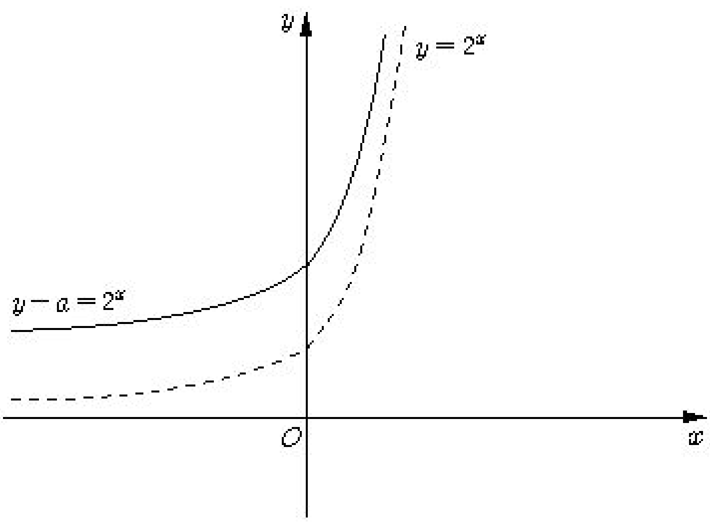
*문제 독해하기

1. 자연수 a, b에 대하여 두 곡선 $y-a=2^x$, $by=2^x$가 있다.
→ 문제의 상황을 나타내기 위한 배경이 되는 정보입니다. 일단은 말 그대로 두 곡선의 존재를 머릿속에 각인시킵시다.

2. 점 P에서 y축의 음의 방향으로 a만큼 이동한 점을 Q라 하자. 점 Q를 지나고, x축과 평행한 직선이 곡선 $by=2^x$와 만나는 점을 R이라 하자.
→ 이제 그 상황 위에 어떤 조건을 이야기하기 위한 약속을 하고 있는 것입니다.
요구대로 그래프 위에 상황을 나타내면 어렵지 않게 해결할 수 있겠지요.
일단 다음으로 넘어갑시다.

3. 두 점 P, R의 x좌표와 y좌표가 모두 정수일 때, 다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오.
→ 이 부분은 한 번에 이해하기가 매우 어려울 것입니다. 그 이유는 현재 머릿속에 저장 된 정보와 새로 받아들이려 하는 정보끼리 연결이 되지 않아서입니다. 그렇다면 1~2에서 이야기한 상황을 좀 더 구체화시켜서 이해해본 후 다시 이 부분을 독해하는데 도전하는 것이 좋을 것 같네요.

1, 2에 제시되어있는 곡선 $y-a=2^x$(a는 자연수)을 좌표평면 위에 나타내봅시다. 곡선 $y=2^x$가 y축의 양의 방향으로 a만큼 이동한 곡선임은 그 형태로서, 바로 알아낼 수 있을 것입니다. 두 곡선 $y-a=2^x$, $y=2^x$를 아래 그림처럼 나타내었습니다.



2에는 점 P에서 y축의 음의 방향으로 a만큼 이동한 점을 Q라 하자고 하였는데, 이 말 뜻을 다시 생각해봅시다. 곡선 $y-a=2^x$는 위에서 곡선 $y=2^x$가 y축의 양의 방향으로 a만큼 이동한 곡선이라고 이야기 하였습니다. 한 편, 점의 집합이 곡선이고 바꿔 말하면 곡선 위의 임의의 점은 그 곡선의 한 원소입니다. 따라서 $y=2^x$ 위의 임의의 한 점을 y축의 양의 방향

으로 a만큼 이동한다면, 그 점은 곡선 $y-a=2^x$의 원소가 되어야 합니다. 그래야 이렇게 모인 점들의 집합이 곡선 $y-a=2^x$가 되겠죠? 문제에서는 반대로 점 P에서 y축의 음의 방향으로 a만큼 이동한 점을 Q라 하였는데, 같은 원리로 이해해보면, 임의의 점 P에 대하여 선분 PQ의 길이는 항상 a로 일정하다는 것을 알 수 있습니다.

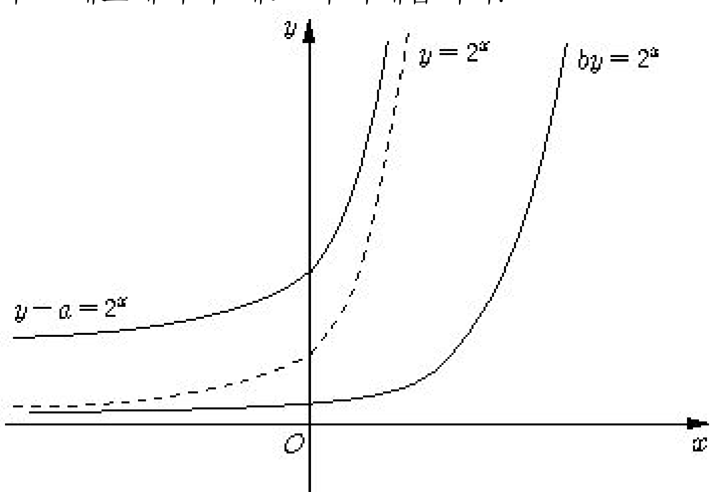
이제 '점 Q를 지나고, x축과 평행한 직선이 곡선 $by=2^x$와 만나는 점을 R이라 하자' 라는 대목은 어떻게 이해하면 좋을까요? 문장의 구조를 살펴보니 앞서 살펴 분석해보았던 '점 P에서 y축의 음의 방향으로 a만큼 이동한 점을 Q라 하자'와 유사함을 알 수 있습니다. 그렇다면 '혹시 이것도 평행이동의 관점에서 생각해볼 수 있지 않을까?' 라는 생각을 해 볼 수 있을 것입니다. 그런데 곡선 $by=2^x$은 어떻게 평행이동하면 되는 것인지 $y-a=2^x$에 비해서는 조금 힘들었을 것입니다. $y-a=2^x$는 왜 바로 알아보기 쉬웠을까요? 그것은 평행이동의 방향과 크기를 나타내는 a가 변수 바로 뒤에 있어서 우리 머릿속에 각인되어 있는 평행이동의 양상을 그대로 드러내고 있었기 때문입니다. 그렇다면 $by=2^x$도 변수 x또는 y뒤에서 일정한 상수가 더해진 꼴로 나타낼 수 있다면 좋을 텐데... 음... b가 y뒤에 더해진 것이 아니라 곱해져있어서 이것을 덧셈으로 바꿨으면 하는데... 아하... 로그의 진수에서 두 양수의 곱으로 나타낸 형태라면 각각의 양수를 진수로 하는 밑이 같은 두 로그의 합으로 나타낼 수 있었습니다! 그럼 양 변에 로그를 취해볼까요? 로그의 밑은 2로 하는 것이 우변의 x를 바로 빼올 수 있기 때문에 좋을 것 같습니다. 다음과 같이 변형해봅시다.

$by=2^x \;\rightarrow\; \log_2(by)=x \;\rightarrow\; \log_2 y=x-\log_2 b$

형태를 보아하니, x축의 양의 방향으로 $\log_2 b$만큼 평행이동 한다는 정보가 포함된 것 같은데 $y=f(x)$의 꼴로 나타내어져 있지 않아서 명확하게 보이지 않는군요.
그렇다면 이번엔 양 변을 각각 밑이 2인 지수가 되도록 나타내봅시다.

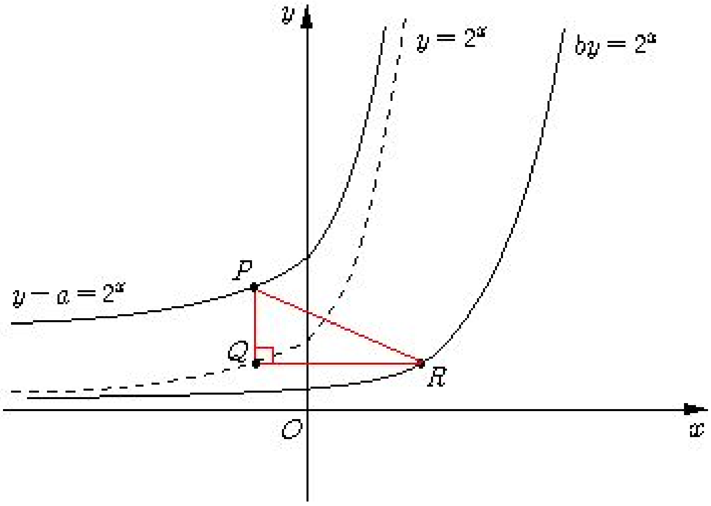
$\log_2 y=x-\log_2 b \;\rightarrow\; 2^{\log_2 y}=2^{x-\log_2 b} \;\rightarrow\; y=2^{x-\log_2 b}$

옳지! 이제 보입니다! $by=2^x$는 곡선 $y=2^x$를 x축의 양의 방향으로 $\log_2 b$만큼 이동한다는 뜻이었군요. 곡선 $by=2^x$도 위의 그래프에다가 새로 추가해봅시다.



이제 '점 Q를 지나고, x축과 평행한 직선이 곡선 $by=2^x$와 만나는 점을 R이라 하자'라는 말을 좀 더 명확하게 이해할 수 있습니다.
왜냐하면 임의의 점 P에 대하여 선분 QR의 길이는 항상 $\log_2 b$로 일정하다는 사실을 알게 되었기 때문입니다.

이제 세 점 P, Q, R도 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같이 항상 $\angle PQR = 90^\circ$인 직각삼각형의 세 꼭짓점이 됨을 알 수 있습니다. 다시 말해서, 두 자연수 a, b가 영향을 미치는 것은 오직 삼각형의 각 변의 길이 $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{PR}$ 이라는 사실이 밝혀졌습니다.

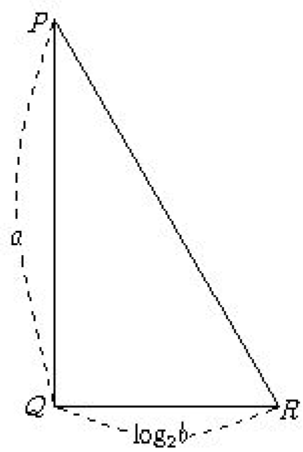


그렇다면 이제 직각삼각형 PQR만 가져오고 나머지 들러리들은 퇴장시켜 볼까요? 문제에 등장하였던 두 곡선 $y - a = 2^x$, $by = 2^x$는 단지 직각삼각형 PQR을 이끌어내고 $\overline{PQ} = a$, $\overline{QR} = \log_2 b$임을 이끌어내기 위한 꼭두각시였습니다.

이 정보들은 더 이상 쓸 일이 없으므로 머릿속에서 지워도 됩니다. (기출문제를 푸실 때에도 마찬가지입니다. 모든 정보를 머릿속에 다 담으려 하지 마시고, 어떤 정보에서 필요한 부분을 충분히 빼먹어서 포커스가 다른 쪽으로 이미 넘어간 상태라면 이전의 정보는 부분은 머릿속에서 지우세요)

자연수 a, b에 대하여 두 곡선 $y - a = 2^x$, $by = 2^x$가 있다. 곡선 $y - a = 2^x$ 위에 임의로 한 점을 잡고, P라 하자. 점 P에서 y축의 음의 방향으로 a만큼 이동한 점을 Q라 하자. 점 Q를 지나고, x축과 평행한 직선이 곡선 $by = 2^x$와 만나는 점을 R이라 하자.

$\Downarrow$



이제 3을 독해할 차례입니다. 답을 요구하고 있는 부분인데요, 앞서 1~2의 내용을 독해하면 간단해질 것처럼 이야기 했지만, 사실 여전히 넘어야 할 산이 많습니다.

3. 두 점 P, R의 x좌표와 y좌표가 모두 정수일 때, 다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

(가) $2 \le a \le 100,\ 2 \le b \le 100$ (나) 선분 PR을 내분하면서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 오직 하나만 존재한다.

1~2에 비해 여러 가지 조건들이 팍팍 튀어나오고 있습니다. 차분하게 하나하나 정리해봅시다.

3-1) 두 점 P, R의 x좌표와 y좌표가 모두 정수일 때

→ 점 Q는 점 P를 y축의 음의방향으로 자연수 a만큼 이동한 점입니다. 따라서 점 P와 x좌표가 같아야 하므로 점 Q의 x좌표는 정수입니다.
또, 점 Q는 점 R을 x의 음의방향으로 $\log_2 b$만큼 이동한 점이기도 합니다. 따라서 점 Q와 y좌표가 같아야만 합니다. 종합하면 점 Q도 x좌표와 y좌표가 모두 정수여야 하므로, $\log_2 b$는 자연수가 되어야 함을 알았습니다!

3-2) 이번에는 박스 안에 제시되어있는 조건들을 분석해봅시다.(조건들이 좀 많긴 하네요...)

(가) $2 \le a \le 100,\ 2 \le b \le 100$

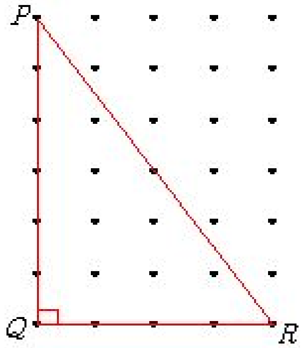
→ 이건 딱히 분석할 거리는 없어 보입니다만, 3-1에서 $\log_2 b$가 자연수가 되어야 함을 이끌어 냈으므로 이와 결합하면, $2 \le b \le 100$인 모든 자연수 b의 개수가 99개 이던 것을 $b = \{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}$이렇게 6개로 줄일 수 있습니다.

(나) 선분 PR을 내분하면서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 오직 하나만 존재한다.

→ 드디어 마지막 하이라이트입니다. 이 부분이 제가 보기엔 이 문제에서 가장 변별력 있는 부분이었다고 생각합니다. 지금까지는 문제를 독해하는 과정이었다면 여기서부터 본격적인 추론이 시작되는 것입니다. 조금 만 더 집중해 주세요!

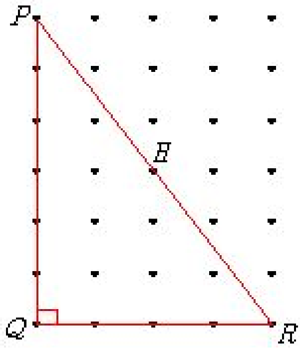
*추론하기

‘예를 들어, $a=6$, $b=16$은 다음 조건을 만족시킨다.’를 이용해서 도대체 (나)에서 무슨 말을 하고 있는 것인지 일단 파악부터 해 봅시다.

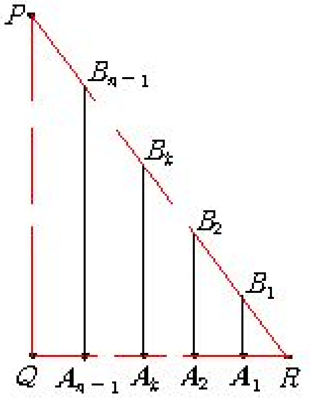


오른쪽 그림에는 35개의 점이 있는데 이를 좌표평면 위에 놓는다면 x좌표와 y좌표가 모두 정수이면서 가로, 세로로 인접한 점 끼리 간격이 1이 되도록 한 것입니다. 빨간색으로 표시한 직각삼각형 PQR은 $a=6$, $b=16$라는 조건에 맞추어 $\overline{PQ}=6$, $\overline{QR}=4$가 되도록 그린 것 이구요. 선분 PR을 내분하면서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 즉, 그림에서는 빨간색 선분 PR위에 포함되는 점은 보시다시피 1개가 존재합니다. 선분 PR을 $1:1$로 내분하면서 말이죠. 흠... 그렇다면 선분 PR위에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점이 1개만 포함된다면 그 점은 a, b의 값과 관계없이 항상 선분 PR을 $1:1$로 내분하는 것일까요? 조금만 생각해보면 당연하다는 것을 알 수 있습니다. 선분 PR을 $m:n$로 내분하는, x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점이 있다면, 대칭성에 의해 선분 PR을 $n:m$으로 내분하는 점도 반드시 x좌표와 y좌표가 모두 정수입니다. 만약 $m \neq n$이면 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점이 쌍으로 존재하면서 그 개수가 1일수는 없게 되죠. 따라서 $m=n$이라는 사실을 알았습니다.

한 편, 선분 PR을 내분하면서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 유일한 점을 H라 할 때, 이제는 각 선분 PH, HR위에 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점이 없어야 합니다. 그러기 위해서는 어떻게 되어야 할까요?



아래 그림과 같이 직각삼각형 PQR에서 선분 RQ의 길이를 n이라 하고, 이를 n등분 하여 오른쪽부터 차례대로 A_1, A_2 ... A_k ... A_{n-1}이라 합시다. 또 선분 RP의 길이 역시 n등분 하여 차례대로 B_1, B_2 ... B_k ... B_{n-1}라 하면 직각삼각형 A_1B_1R, A_2B_2R ... A_kB_kR ... $A_{n-1}B_{n-1}R$을 생각할 수 있습니다. 이 때, 선분 PQ의 길이를 m이라 하면, $\overline{A_kB_k}=(\frac{k}{n})m$가 성립하는데, 점 A_k의 x좌표와 y좌표가 모두 정수이므로, 점 B_k의 x좌표와 y좌표가 모두 정수가 되려면, $(\frac{k}{n})m$의 값 또한 자연수가 되어야 합니다.



그런데 문제는 k가 n보다 작으므로 $\frac{m}{n}$이 약분되지 않는다면 $(\frac{k}{n})m$는 절대로 자연수가 될 수 없다는 것입니다.

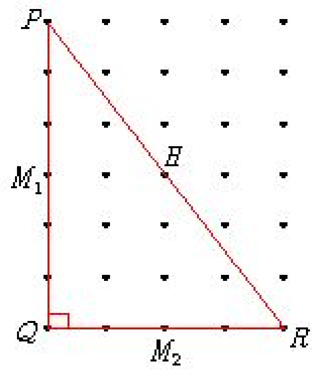
가령 $m=6,\ n=4$이고 $0<k<4$라면 $(\frac{k}{n})m=\frac{6}{4}k=\frac{3}{2}k$가 되면서 이 값은 $0<k<4$의 범위를 갖는 k에 의하여 자연수가 될 수 있지만, $m=3,\ n=2$이고 $0<k<2$라면

위와 똑같은 값 $(\frac{k}{n})m=\frac{6}{4}k=\frac{3}{2}k$이라도 k의 범위 때문에 이 값이 자연수가 되지 않습니다.

따라서 두 수 $m,\ n$이 서로소이면 선분 PR를 내분하면서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점이 존재하지 않게 된다는 사실이 설명되었습니다.

다시 *추론하기의 처음으로 돌아가서, 그 때 등장했던 삼각형을 다시 봅시다.

선분 PR을 내분하면서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 H, 선분 PQ의 중점을 M_1이라 하면, 직각삼각형 PM_1H의 빗변 PH 위에는 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점이 존재하지 않으므로, 두 선분 $PM_1,\ M_1H$의 길이는 서로소가 되어야 합니다. 마찬가지로 선분 QR의 중점을 M_2라 하면, 직각삼각형 HM_2R의 빗변 HR위에도 역시 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점이 존재하지 않으므로, 두 선분 $M_2R,\ HM_2$의 길이는 서로소가 되어야 합니다. 두 선분 $PQ,\ QR$의 길이는 각각 서로소인 두 수를 2배씩 한 것과 같으므로 결국 $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$의 최대공약수가 2라는 사실을 알아냈습니다. 그래야 각각 2로 나눈 값이 서로소가 되겠지요?



이제 순서쌍의 개수를 헤아리는 일만 남았네요. b의 값을 기준으로 분류해봅시다.

앞서, $b=\{2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64\}$라고 하였는데, 이 중 $b=\{2,\ 8,\ 32\}$를 $\log_2 b$에 대입하면 홀수가 나오기 때문에 임의의 a와 2라는 공약수를 가질 수 없습니다. 따라서 $b=\{4,\ 16,\ 64\}$ 이렇게 3가지 경우로 압축되네요.

1) $b=4$ 즉, $\log_2 4=2$와 최대공약수가 2가 되도록 하는 $2\le a\le 100$의 범위에 속하는 a는 모든 짝수에 해당합니다. 따라서 50개가 존재합니다.

2) $b=16$ 즉, $\log_2 16=4$와 최대공약수가 2가 되도록 하는 $2\le a\le 100$의 범위에 속하는 a는 4의 배수가 아닌 짝수에 해당합니다. 따라서 25개가 존재합니다.

3) $b=64$ 즉, $\log_2 64=6$와 최대공약수가 2가 되도록 하는 $2\le a\le 100$의 범위에 속하는 a는 6의 배수가 아닌 짝수에 해당합니다. 따라서 34개가 존재합니다.

최종적으로 모든 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수는 $50+25+34=109$가 됩니다.

지금까지 풀이는 제가 이 문제를 낸 사람의 입장이 아니라 처음 풀어보고자 하는 사람이 접근하고자 한다면, 어떻게 단계적으로 접근해나가야 하는 것이 좋은지 그 과정을 자세히 서술하느라 실제 풀이보다 상당히 길어졌습니다. 사실 $1, 2, 3$페이지까지는 추론이라기보다도 어느 정도 문제를 많이 접해보아서 감이 있다면 바로 도출할 수도 있는 내용이었기도 하구요. 물론 $4, 5, 6$페이지의 내용도 저렇게 일일이 과정을 거치지 않고 등간격의 점들을 찍어봐서 그 위에 직각삼각형 여러 개를 그려본 후 직각삼각형의 밑변의 길이와 높이의 공약수가 2임이 필연적이라는 것을 귀납적으로 눈치 챌 수도 있습니다. 사실 제가 이 문제를 만드는 과정에서도 처음에는 그 규칙을 찾기 위해 여러 개의 직각삼각형을 그려보다보니, 규칙을 발견하게 되어서 결국 문제가 탄생할 수 있었구요. 하지만 설명을 위해서 그러한 감이 아닌 좀 더 과정에 충실하고 납득할 수 있을 만한 풀이를 하기 위해 차후에 생각해 낸 추론 방법이었습니다.

이 문항 외에도 제가 만든 모의고사 문항 중, 질문이 많이 들어오는 문항은 심층 해설 파일을 계속해서 한 문항씩 업로드 하겠습니다. 해설 중에서 이해가 되지 않거나, 잘못된 부분,
혹은 더 좋은 풀이가 있다면 알려주시구요,
좌우지간 제가 만든 문제 및 해설이 여러분의 수리 학습에 도움이 되었으면 좋겠습니다.