1988학년도 (전기)

數學 I · II-1

답

1. ④ 2. ② 3. ④ 4. ③ 5. ① 6. ③ 7. ①
8. ① 9. ③ 10. ② 11. ① 12. ② 13. ④ 14. ①
15. ② 16. ④ 17. ③ 18. ③ 19. ③

【주관식】 1. 8 2. ㉠ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ㉡ $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ ㉢ $\sqrt{3}$
3. 650 4. $1<x\leqq 2+\sqrt{2}$ 5. $a=3,\ b=-12$

※연 구※

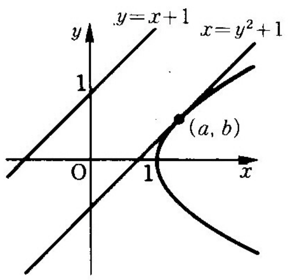
1. $f(x)g(x)>0$은
$[\{f(x)>0\}\wedge\{g(x)>0\}]\vee[\{f(x)<0\}\wedge\{g(x)<0\}]$
$\therefore\ (A\cap B)\cup(C\cap D)$

2. $x^2-2x-3+\sqrt{3}(y^2+2y-3)=0$
x, y가 유리수이므로
$$\begin{cases}x^2-2x-3=0\\ y^2+2y-3=0\end{cases}$$
$(x-3)(x+1)=0$ $\therefore\ x=3$ 또는 $x=-1$
$(y+3)(y-1)=0$ $\therefore\ y=1$ 또는 $y=-3$
이 중 $x+y$를 최대로 하는 것은
$x+y=3+1=4$

3. $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$
$z=a+bi$로 놓으면 (a, b는 실수)
$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$
$(2a-3b)+(3a+2b)i+(2a-3b)-(3a+2b)i=2$
$\therefore\ 2(2a-3b)=2$
$\therefore\ 2a-3b=1$을 만족하는 실수쌍은 무수히 많다.

4. $x^2+2axy+by^2\geqq 0$
$D\leqq 0$에서
$D/4=(ay)^2-by^2\leqq 0$
$(a^2-b)y^2\leqq 0$
$\therefore\ a^2-b\leqq 0$
$\therefore\ a^2\leqq b$

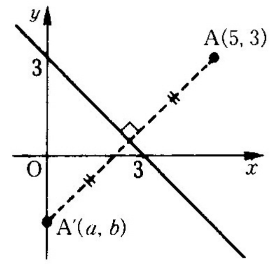
5.



점 (a, b)에서 접선의 기울기가 1이므로
$1=2y\cdot y'$, $y'=\frac{1}{2y}$, 기울기$=\frac{1}{2b}=1$
$\therefore\ b=\frac{1}{2}$
$\therefore\ a=b^2+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$
$a+b=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{4}$

6. $x^2+3y^2-6x-12y+7=0$
$(x-3)^2+3(y-2)^2=14$ $\therefore\ c=14$

7.



대칭점을 $A'(a, b)$라 하면
$M\left(\frac{a+5}{2},\ \frac{b+3}{2}\right)$
$\therefore\ \frac{b+3}{2}=-\frac{a+5}{2}+3$
$b+3=-a-5+6$
$a+b=-2$ ⋯ⓐ
$\frac{b-3}{a-5}=1,\quad a-5=b-3$
$\therefore\ a-b=2$ ⋯ⓑ
ⓐ, ⓑ에서 $2a=0$ $\therefore\ a=0,\ b=-2$ 즉, $(0, -2)$

【별해】
점 $(5, 3)$을 $\begin{cases}x=-y+3\\ y=-x+3\end{cases}$에
대입하여도 된다.
$\therefore\ x=0,\ y=-2$
따라서, 대칭점 $(0, -2)$

8. $y=\frac{x+3}{ax+b}$이 점 $\left(2,\ \frac{5}{2}\right)$를 지나므로
$\frac{5}{2}=\frac{2+3}{2a+b}$
$\therefore\ 2a+b=2$ $\therefore\ b=2(1-a)$ ⋯⋯ⓐ
$\therefore\ x$축에 평행한 점근선의 식은 $y=\frac{1}{a}$이므로
$y=\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$ $\therefore\ a=2$ ⋯⋯ⓑ
ⓑ를 ⓐ에 대입하면,
$b=2(1-2)=-2$
$\therefore\ a+b=2+(-2)=0$

9. $2^x=(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})^{\frac{1}{3}}$
$=\left(\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$
$=\left(\frac{\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$
$=(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{6}}$
$\therefore\ x=\frac{1}{6}$

10. (i) $\sin^2\frac{A}{2}+4\cos\frac{A}{2}=2$ 에서

$1-\cos^2\frac{A}{2}+4\cos\frac{A}{2}=2$

$\cos^2\frac{A}{2}-4\cos\frac{A}{2}+1=0$

$\cos\frac{A}{2}=2-\sqrt{3}\quad\left(\because\ \cos\frac{A}{2}\leqq 1\right)$

(ii) $A+B+C=\pi$ 에서

$B+C=\pi-A$

$\sin\left(\frac{B+C-2\pi}{2}\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi-A-2\pi}{2}\right)$

$=\sin\left(\frac{-A-\pi}{2}\right)=-\cos\frac{A}{2}$

$=-2+\sqrt{3}$

11. $n=1$; $a=2$; $S=2$

$n=2$; $a=4$; $S=2+4$

$n=3$; $a=6$; $S=2+4+6$

$\therefore$ 첫째항 2, 공차 2인 등차수열의 제 100 항까지의 합

$S=\frac{100}{2}\{2\times 2+(100-1)\times 2\}$

$=100(2+99)=10100$

12. $f(x)=\sum_{k=1}^{100}\left(x-\frac{1}{k(k+1)}\right)^2$

$=100x^2-2\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}x+\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)^2$

$=100\left\{x^2-\frac{2}{100}\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}x\right\}+\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)^2$

$f(x)$를 최소가 되게 하는 x의 값은

$x=\frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\frac{1}{100}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)\right\}=\frac{1}{101}$

13. $x\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4&6\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ 에서

$\begin{cases}x+4y=1\\y=1\end{cases}$

$\therefore\ x=1-4=-3$

$\therefore\ x+y=-3+1=-2$

14. ① $AB=E$ 이면 $B=A^{-1}$

$\therefore\ BA=A^{-1}A=E$

② 는 $AB=BA$ 일 때 성립한다.

③ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

④ $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$ 일 때 $A^2=O$인 경우도 있다.

15. $f(x)=x(x^2-ax+a)$

$=x^3-ax^2+ax$

$f(x)$ 가 증가함수이려면

$f'(x)=3x^2-2ax+a\geqq 0$

$\frac{D}{4}=a^2-3a\leqq 0$

$\therefore\ 0\leqq a\leqq 3$

16. $xf(x)=\frac{2}{3}x^3+\int_0^x f(t)dt$ 의 양변을 x에 관하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2x^2+f(x)\qquad\therefore\ f'(x)=2x$

$f(x)=x^2+C$ 에서 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

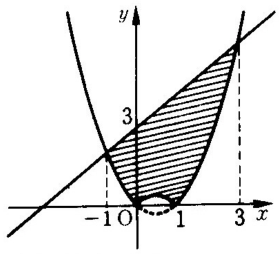
$\therefore\ f(x)=x^2,\quad f(2)=4$

17. 곡선과 직선의 교점

$\begin{cases}y=x(x-1)\\y=x+3\end{cases}$

$x^2-x=x+3,\quad x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0\qquad\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$



구하는 면적을 S라 하면,

$S=\int_{-1}^{3}(x+3)dx-\int_{-1}^{0}x(x-1)dx$

$-\int_0^1-x(x-1)dx-\int_1^3 x(x-1)dx$

$=\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{3}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$

$+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^3$

$=16-\frac{5}{6}-\frac{1}{6}-\frac{14}{3}$

$=\frac{31}{3}$

〔별해〕 포물선과 직선이 이루는 부분의 면적을 S_1, 포물선과 x 축이 이루는 부분의 면적을 S_2라 하면,

$S=S_1-2S_2=\frac{1}{6}\times 4^3-2\times\frac{1}{6}\times 1^3$

$=\frac{64-2}{6}=\frac{62}{6}=\frac{31}{3}$

18. 비 오는 것을 ○

비 안오는 것을 ×라 하면

○○일 확률 $\frac{1}{2}$

○×일 확률 $\frac{1}{2}$

×○일 확률 $\frac{1}{3}$

××일 확률 $\frac{2}{3}$

	월	화	수	목	
①	○	○	○	○	: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$
②	○	○	×	○	: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$
③	○	×	○	○	: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$
④	○	×	×	○	: $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}=\frac{9+6+6+8}{72}=\frac{29}{72}$

19. $m=100,\ \sigma=4,\ n=25$

$$\frac{c-100}{\frac{4}{\sqrt{25}}}>1.65$$

$$c-100>1.65\times\frac{4}{5}=1.32$$

$$c>101.32$$

【주 관 식】

1. $\begin{cases} x^2+4xy+y^2=10 \\ x-y=2 \end{cases}$

$y=x-2$를 대입하면,

$x^2+4x(x-2)+(x-2)^2=10$

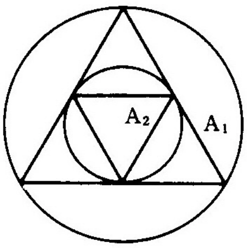
$6x^2-12x-6=0$

$x^2-2x-1=0$

$x=1\pm\sqrt{2},\ y=-1\pm\sqrt{2}$ (복호 동순)

$\therefore\ (x+y)^2=(\pm2\sqrt{2})^2=8$

2.



정삼각형 A_1, A_2의 한 변의 길이를 x_1, x_2라 하면,

$x_1=2R\sin 60°=\sqrt{3},\quad a_1=\frac{\sqrt{3}}{4}x_1^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$x_2=\frac{1}{2}x_1=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad a_2=\frac{\sqrt{3}}{4}x_2^2=\frac{3\sqrt{3}}{16}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots$ 은 무한등비급수

$$\therefore\ \frac{\frac{3}{4}\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{3}$$

㉠$=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ㉡$=\frac{3\sqrt{3}}{16}$ ㉢$=\sqrt{3}$

3. 500원짜리 동전 2개에 대한 기대값을 $E(X)$, 100원짜리 동전 3개에 대한 기대값을 $E(Y)$라 하면

$E(X)+E(Y)=500\times\frac{1}{2}\times2+100\times\frac{1}{2}\times3$

$=650$(원)

4. $\log_2(x-1)\leqq\log_4(2x-1)$

진수 $\begin{cases} x-1>0, & x>1 \\ 2x-1>0, & x>\frac{1}{2} \end{cases}\quad \therefore\ x>1 \qquad \cdots$ⓐ

$\therefore\ \log_4(x-1)^2\leqq\log_4(2x-1)$

$\therefore\ (x-1)^2\leqq2x-1$

$x^2-2x+1\leqq2x-1,\ x^2-4x+2\leqq0$

$\therefore\ 2-\sqrt{2}\leqq x\leqq2+\sqrt{2} \qquad \cdots$ⓑ

ⓐ, ⓑ에서 $1<x\leqq2+\sqrt{2}$

5. $f(x)=2x^3+ax^2+bx-4$

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

$f(-2)=16,\ -16+4a-2b-4=16 \qquad \cdots$ⓐ

$f'(-2)=0,\ 24-4a+b=0 \qquad \cdots$ⓑ

ⓐ+ⓑ하면, $4-b=16\ \therefore\ b=-12$

$\therefore\ a=3$

數學 Ⅰ·Ⅱ-2

답

1. ④	2. ②	3. ④	4. ③	5. ①	6. ③	7. ①
8. ①	9. ③	10. ②	11. ①	12. ②	13. ①	14. ②
15. ④	16. ③	17. ③	18. ②	19. ①	20. ②	21. ③
22. ④	23. ②	24. ③	25. ④	26. ④		

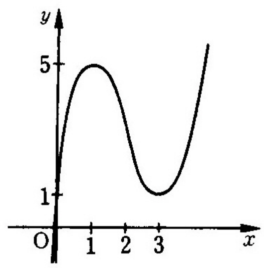
【주관식】 1. 8 2. ㉠ -1 ㉡ 1 ㉢ 3 3. ㉠ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ㉡ $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ ㉢ $\sqrt{3}$ 4. $\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$ 5. 650 6. ⇨研究 7. ⇨研究

연 구

1~12. 인문계와 같음.

13. $x=6-\frac{9}{x}-\frac{1}{x^2}$

$x^3=6x^2-9x-1$



$f(x)=x^3-6x^2+9x+1=0$

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$=3(x^2-4x+3)$

$=3(x-1)(x-3)=0$

$f(1)=1-6+9+1=5>0 \qquad \therefore$ 극대값>0

$f(3)=27-54+27+1=1>0 \qquad \therefore$ 극소값>0

$\therefore$ 실근의 갯수 : 1개

14. $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$

$A^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 6\\0 & 1\end{pmatrix}$

$A^n=\frac{1}{2^n}\begin{pmatrix}1 & 2n\\0 & 1\end{pmatrix}$

$a_{11}=\frac{1}{2^n},\ a_{22}=\frac{1}{2^n}$

$a_n=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

15. (i) x축에 대하여 대칭변환 f : $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

(ii) $\frac{\pi}{3}$만큼 회전이동한 변환

$$g\ ;\ \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\therefore f\circ g\circ f\ ;\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

16. (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)를 지나는 평면의 방정식은

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$$

$$2x+2y+z-2=0$$

$$\therefore\ d=\frac{|-2|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2}{3}$$

17. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

$$\vec{c}=-(\vec{a}+\vec{b})$$

$$|\vec{c}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2$$

$$196=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$$

$$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=36+100+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{60}{2|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$=\frac{60}{2\cdot 6\cdot 10}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \theta=60°$$

18. $|z|=1$

$z=x+iy,\quad x^2+y^2=1$ ……ⓐ

$z+iz=x+iy+i(x+iy)$

$=(x-y)+(x+y)i$

$x-y=k$ 라 하고 $y=x-k$ 를 ⓐ에 대입하면,

$x^2+(x-k)^2=1$

$2x^2-2kx+k^2-1=0$

$D/4=k^2-2(k^2-1)\geqq 0$

$2-k^2\geqq 0,\ k^2\leqq 2\qquad -\sqrt{2}\leqq k\leqq\sqrt{2}$

【별해】

(i) 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $x-y-k=0$이 만날 조건에서

$$\frac{|-k|}{\sqrt{2}}\leqq 1,\ -\sqrt{2}\leqq k\leqq\sqrt{2}$$

(ii) Cauchy-Schwarz 부등식

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$ 에서

$(1^2+1^2)(x^2+y^2)\geqq(x-y)^2$

$\therefore\ -\sqrt{2}\leqq x-y\leqq\sqrt{2}$

19. $(e^x-1)f(x)=x$

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}$$

$$.\ f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$$

20. 인문계 15.와 동일

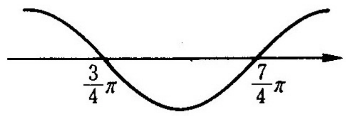
21. $x\geqq 0$

$y=e^x\sin x=f(x)$

$y'=e^x\sin x+e^x\cos x$

$=e^x(\sin x+\cos x)$

$=e^x\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$



$\therefore\ x=2n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n은 정수)

에서 극대값을 갖는다.

$y_1=f\left(\frac{3}{4}\pi\right),\ y_2=f\left(2\pi+\frac{3}{4}\pi\right),$

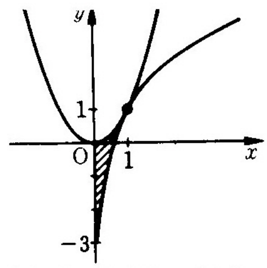
$y_3=f\left(4\pi+\frac{3}{4}\pi\right),\ \cdots$

$y_n=f\left((n-1)2\pi+\frac{3}{4}\pi\right)$

$$\therefore\ \frac{y_{100}}{y_{99}}=\frac{f\left(99\times 2\pi+\frac{3}{4}\pi\right)}{f\left(98\times 2\pi+\frac{3}{4}\pi\right)}$$

$$=\frac{e^{99\times 2\pi+\frac{3}{4}\pi}\sin\frac{3}{4}\pi}{e^{98\times 2\pi+\frac{3}{4}\pi}\sin\frac{3}{4}\pi}=e^{2\pi}$$

22.



$x^2=4\sqrt{x}-3,\ 4\sqrt{x}=x^2+3$

양변을 제곱하면

$x^4+6x^2-16x+9=0$

$(x-1)^2(x^2+2x+9)=0$

$\therefore$ 접점은 (1, 1)

면적을 S라 하면

$$S=\int_0^1\{x^2-(4\sqrt{x}-3)\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{8}{3}+3=\frac{2}{3}$$

23. $x>0$

$f(x)=\int_1^x(1-\log t)dt$

$f'(x)=1-\log x=0$

$x=e$ 에서 극대

$\therefore f(e)=\int_1^e(1-\log t)dt$

$=\Big[t-t\log t+t\Big]_1^e$

$=e-2$

24. 인문계 18. 과 동일

25. (i) $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$ 에서

$a+\frac{a}{2}+a^2=1$ 이다.

$2a^2+3a-2=0$

$(2a-1)(a+2)=0$

$0<a<1$ 이므로

$a=\frac{1}{2}$

(ii)

x_i	p_i
-1	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$

$E(X)=\frac{-2+0+1}{4}=-\frac{1}{4}$

$V(X)=\frac{2+0+1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$

$\therefore V(aX)=V\left(\frac{1}{2}X\right)=\frac{1}{4}V(X)=\frac{11}{64}$

26. 인문계 19. 와 동일

【주 관 식】

1. 인문계 1. 과 동일

2. $\vec{x}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}$ 라 하면

$\vec{x}\cdot\overrightarrow{OA}=1$

$p\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+r\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=1$

$p+\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}r=1$

$2p+q+r=2$ ……ⓐ

$\vec{x}\cdot\overrightarrow{OB}=2$

$p\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+q\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=2$

$\frac{1}{2}p+q+\frac{1}{2}r=2$

$p+2q+r=4$ ……ⓑ

$\vec{x}\cdot\overrightarrow{OC}=3$

$p\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+q\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+r\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}=3$

$\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q+r=3$

$p+q+2r=6$ ……ⓒ

ⓐ+ⓑ+ⓒ 에서 $4(p+q+r)=12$

$p+q+r=3$ ……ⓓ

$\therefore p=-1,\ q=1,\ r=3$

3. 인문계 2. 와 동일

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2}(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+2}+\cdots+\sqrt{3n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2n+k}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2+\frac{k}{n}}$

$=\int_2^3\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\Big[x^{\frac{3}{2}}\Big]_2^3$

$=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

5. 인문계 3. 과 동일

6. 인문계 4. 와 동일

7. $f(x)=ax^3+bx^2+cx$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$\therefore f'(2)=12a+4b+c=4$ ……ⓐ

$f''(x)=6ax+2b$

$\therefore f''(1)=6a+2b=0\quad \therefore b=-3a$ ……ⓑ

변곡점 (1, 2) 는 곡선 위의 점이므로

$a+b+c=2$ ……ⓒ

ⓐ−ⓒ 하면 : $11a+3b=2$ ……ⓓ

ⓑ를 ⓓ에 대입하면, $11a+3(-3a)=2$

$\therefore 2a=2\quad \therefore a=1,\ b=-3,\ c=4$

1988학년도 (후기)

수학 I·II-1

답

1. ① 2. ④ 3. ④ 4. ③ 5. ② 6. ① 7. ④ 8. ②
9. ② 10. ① 11. ② 12. ④ 13. ① 14. ③ 15. ③
16. ④ 17. ③ 18. ② 19. ③
〔주관식〕 1. 4 2. $8\sqrt{3}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4번과 5번의 풀이 과정의 답은 해설 참조

연 구

1. P : (i) $x\geq 0$ 일 때, $x+x=0$ 에서 $x=0$

(ii) $x<0$ 일 때, $x-x=0$ 에서 항상 성립 $\therefore x<0$

(i), (ii)에서 P : $x\leq 0$

Q : $3^x>3^0$ 에서 $x>0$

$\therefore$ P−Q=P

2. 준 식$=\{(1+i)^2\}^3-\{(1-i)^2\}^3$

$=(2i)^3-(-2i)^3$

$=-8i-(8i)=-16i$

3. $(x-1)$이 공약수이므로

$1+a+b=0$ ……①

$1+c+a=0$ ……②

$c+b+4=0$ ……③

①+②+③에서 $2(a+b+c)+6=0\quad \therefore a+b+c=-3$

4. $x+y=2$ ……① $\quad ax-y=3$ ……②

①+②에서 $(a+1)x=5 \quad \therefore x=\dfrac{5}{a+1}$

이것을 ①에 대입하면, $\dfrac{5}{a+1}+y=2$에서 $y=2-\dfrac{5}{a+1}$

$\dfrac{5}{a+1}>0$에서 $a>-1$, $2-\dfrac{5}{a+1}>0$에서 $a>\dfrac{3}{2}$

$\therefore a>\dfrac{3}{2}$

5. $x^2-kx^2+7x+3=0$에서 $(1-k)x^2+7x+3=0$

$1-k\neq0$이고 $D=7^2-12(1-k)<0$이므로

$k<-\dfrac{37}{12}=-3.\times\times\times \quad \therefore$ 최대 정수 $k=-4$

6. (i) $x\geqq0$일 때, $(x-1)(x-2)>0$에서 $x<1$, $x>2$

$\therefore 0\leqq x<1$, $x>2$

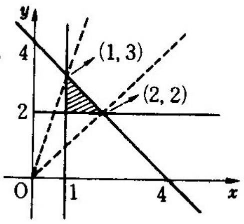
(ii) $x<0$일 때, $(-x-1)(x-2)>0$,

$(x+1)(x-2)<0$에서 $-1<x<2$

$\therefore -1<x<0$

(i), (ii)에서 $A=\{x\mid -1<x<1, x>2\}$

7. 주어진 부등식의 영역은 오른쪽 그림의 빗금 부분과 같다.



$\dfrac{y}{x}=k$로 놓으면 $y=kx$ …①

$\therefore$ 직선 ①이 점 $(1, 3)$을 지날 때 최대값 $M=\dfrac{3}{1}=3$

직선 ①이 점 $(2, 2)$를 지날 때

최소값 $m=\dfrac{2}{2}=1 \quad \therefore M+m=3+1=4$

8. 쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이라 하면

$2a=2$ (⇐ 거리의 차 2), $k=\sqrt{2}$ (⇐ 焦점)이므로

$k^2=a^2+b^2$에서 $(\sqrt{2})^2=1^2+b^2 \quad \therefore b^2=1$

$\therefore$ 쌍곡선의 방정식은 $x^2-y^2=1$ …①

이 때, 점 $(0, 1)$로부터 곡선 ① 위의 점 (x, y)에 이르는 거리를 d라 하면,

$d^2=x^2+(y-1)^2=(1+y^2)+(y-1)^2$ ⇐ ①에서 $x^2=1+y^2$

$=2y^2-2y+2=2\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$

$\therefore$ 거리의 최소값 $d=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

9. $f(x)=\log_2 x=\dfrac{3}{2}$에서 $x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore g\left(\dfrac{3}{2}\right)=1+\sqrt{3-2\sqrt{2}}=1+(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}$

10. $4^{x^2}=(2^2)^{x^2}=2^{2x^2}$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8x}=\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{8x}=2^{-4x}$

$\therefore$ 준 부등식은 $2^{2x^2}<2^{-4x}$,

$2x^2<-4x$, $2x(x+2)<0$에서 $-2<x<0$

11. 준 식$=\log_a b+\dfrac{1}{\log_a b^2}=\log_a b+\dfrac{1}{2\log_a b}$

$\geqq 2\sqrt{\log_a b\cdot\dfrac{1}{2\log_a b}}=2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

12. $\overleftrightarrow{OB}: y=x$ …① $\quad \overleftrightarrow{AC}: y=-\dfrac{x}{2}+3$ …②

①, ②에서 $x=2$, $y=2 \quad \therefore$ 점 P의 좌표는 $(2, 2)$

$\triangle OAP$에서

$\overline{OP}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{AP}=\sqrt{2^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$, $\overline{OA}=3$이므로

$\cos\theta=\dfrac{\overline{OP}^2+\overline{AP}^2-\overline{OA}^2}{2\cdot\overline{OP}\cdot\overline{AP}}=\dfrac{8+5-9}{2\cdot2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

13. $S=1+2\cdot\dfrac{1}{2}+3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+30\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{29}$

$-)\ \dfrac{1}{2}S=\ 1\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+29\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{29}+30\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{30}$

$\dfrac{1}{2}S=1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{29}-30\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{30}$

$=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{30}}{1-\frac{1}{2}}-30\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{30}=2-32\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{30}$

$\therefore S=4-64\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{30}=4-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{24}$ ⇐ $64=2^6=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-6}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}t_n=\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\dfrac{\frac{1}{16}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{12}$

$p=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

$\therefore$ 준 식$=\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{5}{12}$

15. $\displaystyle\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(-2h)}{2h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\dfrac{\{f(h)-f(0)\}-\{f(-2h)-f(0)\}}{2h}$

$\displaystyle=\dfrac{1}{2}\cdot\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}-\lim_{h\to0}\dfrac{f(-2h)-f(0)}{-2h}\cdot(-1)$

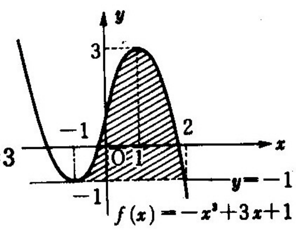
$=\dfrac{1}{2}\cdot f'(0)-f'(0)\cdot(-1)=\dfrac{3}{2}f'(0)=3$에서 $f'(0)=2$

참고 $\dfrac{0}{0}$인 꼴의 부정형의 극한값 ⇒ 로피탈의 정리를 쓰면 간편하다.

$\displaystyle\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(-2h)}{2h}=\lim_{h\to0}\dfrac{f'(h)-f'(-2h)\cdot(-2)}{2}$

$=\dfrac{f'(0)-f'(0)\cdot(-2)}{2}=\dfrac{3}{2}f'(0)$

16. $f'(x)=-3x^2+3=0$에서 $x=\pm1$



극소값, $m=f(-1)$

$=1-3+1=-1$

극대값 : $f(1)=-1+3+1=3$

$-x^3+3x+1=-1$에서

$x^3-3x-2=0$

$(x+1)^2(x-2)=0 \quad \therefore x=-1, 2$

$\therefore$ 면적 $S=\int_{-1}^{2}\{(-x^3+3x+1)-(-1)\}dx$

$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$

$=-\frac{16-1}{4}+\frac{3}{2}(4-1)+2(2+1)=\frac{27}{4}$

17. (i) $a\geqq 0$일 때

준 식$=\int_0^a 2x\,dx=\left[x^2\right]_0^a=a^2$

(ii) $a<0$일 때

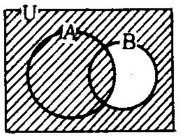
준 식$=\int_0^a(-2x)\,dx=\left[-x^2\right]_0^a=-a^2$

(i), (ii)에서 준 식$=a|a|$

18. $P(A\cup B)^c=P(A)+P((A\cup B)^c)$

$=P(A)+P(A^c\cap B^c)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$



19. 가설 H:「$m=1$이다.」

크기 16인 표본의 평균 $\bar{X}$는 정규분포

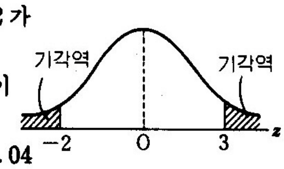
$N\left(1, \left(\frac{2}{\sqrt{16}}\right)^2\right)$ 에 따르므로 $Z=\frac{\bar{X}-1}{\frac{1}{2}}$라 하면

$\bar{X}=2$일 때 $Z=\frac{2-1}{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore$ 가설이 기각되려면 $z=2$가 기각역에 속해야 한다.

그런데 $P(0\leqq Z\leqq 2)=0.48$이므로

$P(|z|\geqq 2)=1-0.48\times 2=0.04$



$\therefore$ 유의수준 α의 최소값은 4%

≪주관식 문제≫

1. $f(\theta)=a\cos^2\theta+a\sin\theta+b$

$=a(1-\sin^2\theta)+a\sin\theta+b$

$=-at^2+at+a+b \Leftarrow \sin\theta=t$로 치환

$=-a\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a+b \quad (-1\leqq t\leqq 1)$

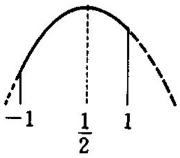
$\therefore t=\frac{1}{2}$일 때 최대값

$\frac{5}{4}a+b=10$ ……①

$t=-1$일 때 최소값

$-a+b=1$ ……②

①, ②에서 $a=4,\ b=5$



2. $\log_2(x+y)=2$에서 $x+y=4$

$\log_2 x+\log_2 y=0$에서 $\log_2 xy=0 \quad \therefore xy=1$

$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=4^2-4\cdot 1=12$

$\therefore |x-y|=2\sqrt{3}$

$\therefore |x^2-y^2|=|(x+y)(x-y)|=4\cdot 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

3.

	철수	영희
(i)	Ⓦ	Ⓦ
(ii)	Ⓑ	Ⓦ

Ⓦ 2개
Ⓑ 2개

(i) 철수가 흰 공, 영희가 흰 공을 뽑을 확률은 $\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}$

(ii) 철수가 검은 공, 영희가 흰 공을 뽑을 확률은 $\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}$

$\therefore$ 구하는 확률은 $P=\dfrac{\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$

4. $A-k\cdot E=\begin{pmatrix}3-k & 2\\ 4 & 3-k\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않기 위해서는 $(3-k)\cdot(3-k)-2\cdot 4=0$에서 $k^2-6k+1=0$

$\therefore$ 이것을 만족하는 k의 합은 근과 계수와 관계에서 6

5. $f'(x)=3x^2+2ax+b$이므로

$f'(1)=3+2a+b=0$ ……①

$f'(3)=27+6a+b=0$ ……②

$x=3$에서 극소값 -6을 가지므로

$f(3)=27+9a+3b+c=-6$ ……③

①, ②, ③에서 $a=-6, b=9,\ c=-6$

$\therefore$ 극대값은 $f(1)=1+a+b+c=-2$

수학 I·II-2

답

1. ④ 2. ④ 3. ④ 4. ③ 5. ② 6. ① 7. ④ 8. ②
9. ② 10. ① 11. ② 12. ④ 13. 13. ① 14. ③ 15. ④
16. ④ 17. ③ 18. ② 19. ③ 20. ④ 21. ① 22. ②
23. ① 24. ③ 25. ② 26. ③

〔주관식〕 1. 4 2. 6 3. 3 4. 6 5. $\frac{1}{3}$

6번과 7번의 풀이 과정과 답은 해설 참조.

연 구

※「1~13번」은 인문계의 1~13번과 같음.

14. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad \therefore A'(0, 0)$

$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \quad \therefore B'(1, 1)$

$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix} \quad \therefore C'(-2, 2)$

$\therefore \triangle A'B'C'=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|2-(-2)|=2$

15. 직선 $l: \frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{2}=z-1$의 방향벡터는 (3, 2, 1)이고 점 (3, 2, 1)을 지난다.

평면 $\alpha: x+y-5z=0$의 법선벡터는 $(1, 1, -5)$이고

$\left.\begin{array}{l}(3, 2, 1)\cdot(1, 1, -5)=3+2-5=0\\ 3+2-5\cdot 1=0\end{array}\right\}$

이므로 직선 l은 평면 α에 포함된다.

16. $\overrightarrow{OH}=(4t, 2t)$ 라 하면, $\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP}=(4t-2, 2t-2)$

$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PH}=0$ 에서

$(4, 2)\cdot(4t-2,\ 2t-2)=0$

$\therefore\ 4(4t-2)+2(2t-2)=0$ 에서 $t=\dfrac{3}{5}$

$\therefore\ \overrightarrow{OH}=\left(\dfrac{12}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$

17. $f(x)=3\sin x-4\cos x=5\sin(x-\theta)$ $\left(\text{단, } \tan\theta=\dfrac{4}{3}\right)$

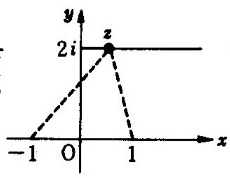
$\therefore\ x-\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $f(x)$ 는 최대값 5를 갖는다.

이 때, $x=\dfrac{\pi}{2}+\theta$ 이므로 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+\theta$

$\therefore\ \tan\alpha=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=-\cot\theta=-\dfrac{1}{\tan\theta}=-\dfrac{3}{4}$

18. $z=x+2i$ 에서 $x\geqq 0$ 이므로 z 에서 1까지의 거리 $|z-1|$ 는 z 에서 -1 까지의 거리 $|z+1|$ 보다 작다.



즉, $|z-1|\leqq|z+1|$

$\therefore\ \left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|\leqq 1$

19. $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ 에서 $a_{n+2}=\dfrac{1}{2}a_{n+1}$,

$a_{n+1}=-a_{n+1}+a_n$

$\therefore\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$, 즉 수열 $\{a_n\}$ 은 공비 $\dfrac{1}{2}$, 첫째항 $a_1=1$ 인 등비수열 $\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

20. $\dfrac{dy}{dx}<0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 감소 상태

$\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 위로 볼록

21. 준 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{dy}{dx}+\cos(xy)\cdot\left(y+x\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)$

여기에 $x=2,\ y=\pi$ 를 대입하면

$\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{dy}{dx}+\cos 2\pi\cdot\left(\pi+2\cdot\dfrac{dy}{dx}\right)$ 에서 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\pi}{6}$

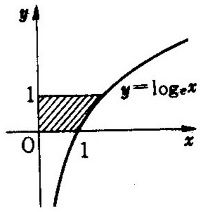
22. $\dfrac{\pi k}{2n}=x_k$ 로 놓으면 $x_0=0,\ x_n=\dfrac{\pi}{2}$

$\Delta x=\dfrac{\frac{\pi}{2}-0}{n}=\dfrac{\pi}{2n}$ 이므로 $\dfrac{\pi}{4n}=\dfrac{\pi}{2n}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\Delta x$

$\therefore$ 준 식 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos x_k\cdot\dfrac{1}{2}\Delta x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\dfrac{1}{2}\,dx$

$=\left[\dfrac{\sin x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{2}$

23. $V_y=\pi\displaystyle\int_0^1 x^2\,dy$



$=\pi\displaystyle\int_0^1(e^y)^2\,dy \Leftarrow y=\log_e x$ 에서 $x=e^y$

$=\pi\displaystyle\int_0^1 e^{2y}\,dy=\pi\left[\dfrac{e^{2y}}{2}\right]_0^1=\pi\cdot\dfrac{e^2-1}{2}$

24. $\sqrt{x+1}=t$ 라 하면 $x=t^2-1,\ dx=2t\,dt$

$x=0$ 일 때, $t=1$, $x=3$ 일 때 $t=2$

$\therefore$ 준 식 $=\displaystyle\int_1^2\dfrac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt$

$=2\displaystyle\int_1^2(t^2-1)\,dt=2\left[\dfrac{t^3}{3}-t\right]_1^2$

$=2\left\{\dfrac{2^3-1}{3}-(2-1)\right\}=\dfrac{8}{3}$

※「25번」은 인문계의 18번과 같음.

※「26번」은 인문계의 19번과 같음.

≪주관식 문제≫

※「1번」은 인문계의 1번과,「2번」은 4번과 같음.

3. $0<x<2$ 에서 $0<x^2<4$

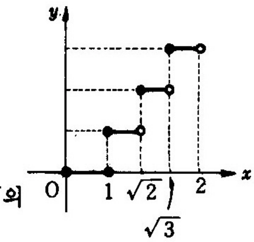
(i) $0<x^2<1$ 일 때 $[x^2]=0$

(ii) $1\leqq x^2<2$ 일 때 $[x^2]=1$

(iii) $2\leqq x^2<3$ 일 때 $[x^2]=2$

(iv) $3\leqq x^2<4$ 일 때 $[x^2]=3$

$\therefore$ 불연속점은 $x=1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}$ 의 3개



참고 $0<x<2$ 에서 $y=[x^2]$ 의 그래프의 개형은 위의 그림과 같다.

4. $f(x)=\displaystyle\int_0^x(e^t+1)\,dt$ 에서 $f'(x)=e^x+1\cdots\cdots$ ①

$\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(-2h)}{h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f'(h)-f'(-2h)\cdot(-2)}{1}$ ⇐ 로피탈의 정리 이용(미분계수의 정의를 이용한 풀이는 人文系 15번 풀이 참조)

$=f'(0)-f'(0)\cdot(-2)$

$=3f'(0)$

$=3(e^0+1)=6$ ⇐ ①에서 $f'(0)=e^0+1=2$

※「5번」은 인문계의 3번과 같음.

6. $(x-2)^2$ 을 양변에 곱하면

$x(x-2)^2<-(x-2),\ (x-2)\{x(x-2)+1\}<0$

$\therefore\ (x-2)(x-1)^2<0$ 에서 $x<2$ (단, $x\neq 1$)

$\therefore\ \{x\,|\,x<1,\ 1<x<2\}$

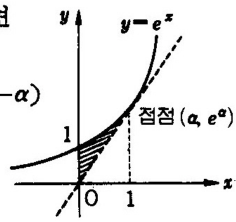
7. 접점의 좌표를 (α, e^α)라 하면 접선의 기울기는 $y'_{x=\alpha}=e^\alpha$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y-e^\alpha=e^\alpha(x-\alpha)$

이것이 원점을 지나므로

$0-e^\alpha=e^\alpha(0-\alpha)$에서 $\alpha=1$

$\therefore$ 접선의 방정식은 $y=ex$



$\therefore$ 구하는 면적은 $S=\displaystyle\int_0^1(e^x-ex)dx$

$=\left[e^x-\dfrac{e}{2}x^2\right]_0^1=(e-1)-\dfrac{e}{2}=\dfrac{e}{2}-1$