제 2 교시

수학 영역(B 형)

홀수형

5지선다형

1. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&5\end{pmatrix}$에 대하여 역행렬 A^{-1}의 모든 성분의 합은? [2점]

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

2. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}+a}{x} & (x\neq 0)\\ b & (x=0)\end{cases}$$

이 $x=0$에서 연속이 되도록 두 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② $e-1$ ③ 2 ④ e ⑤ 3

3. 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{P}(6,\ 7,\ a)$, $\mathrm{Q}(4,\ b,\ 9)$를 이은 선분 PQ를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표가 $(2,\ 5,\ 14)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

4. 두 사건 A, B가 서로 독립이고

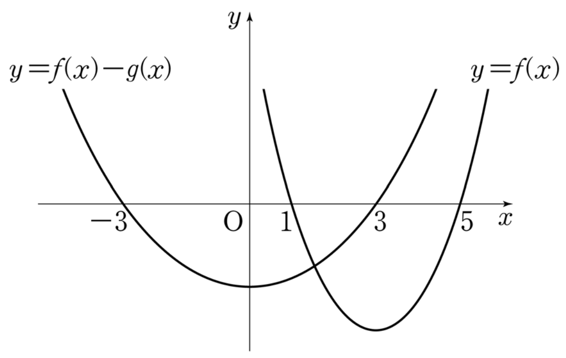
$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4},\quad \mathrm{P}(A\cup B^C)=\frac{3}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{11}{15}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{13}{15}$ ⑤ $\frac{14}{15}$

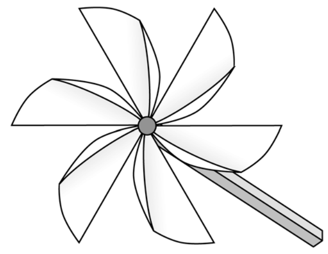
5. 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프가 그림과 같다.

부등식 $\dfrac{g(x)}{f(x)} \geq 1$을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]



① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

6. 빨간색과 파란색을 포함한 서로 다른 6가지의 색을 모두 사용하여, 날개가 6개인 바람개비의 각 날개에 색칠하려고 한다. 빨간색과 파란색을 서로 맞은편의 날개에 칠하는 경우의 수는? (단, 각 날개에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

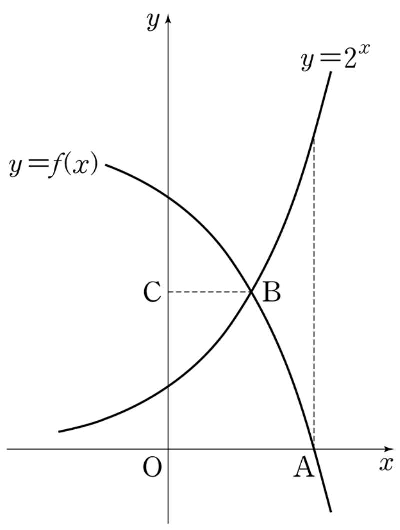
7. 두 일차변환 f, g를 나타내는 행렬이 각각

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

이다. 원 $(x-2)^2+(y+3)^2=5^2$이 합성변환 $f \circ g$에 의하여 옮겨진 도형이 y축과 만나는 두 점의 좌표를 각각 $(0, a)$, $(0, b)$라 할 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

[8～9] 곡선 $y=-2^x$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 A라 할 때, 8번과 9번의 두 물음에 답하시오. (단, $m>2$이다.)



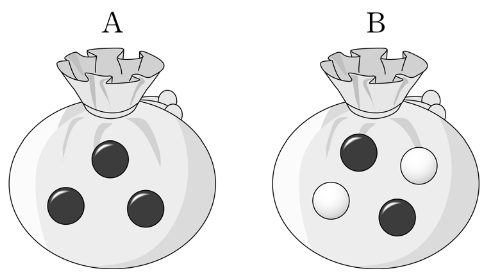
8. 곡선 $y=2^x$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 B, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{BC}}$일 때, m의 값은? [3점]

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

9. $m=5$일 때, 점 A를 지나고 y축과 평행한 직선, 곡선 $y=2^x$, x축, y축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? [3점]

① $\dfrac{12}{\ln 2}\pi$ ② $\dfrac{14}{\ln 2}\pi$ ③ $\dfrac{16}{\ln 2}\pi$ ④ $\dfrac{18}{\ln 2}\pi$ ⑤ $\dfrac{20}{\ln 2}\pi$

10. 주머니 A에는 검은 구슬 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 검은 구슬 2개와 흰 구슬 2개가 들어 있다. 두 주머니 A, B 중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 색일 때, 선택된 주머니가 B이었을 확률은? [3점]



① $\frac{5}{14}$　② $\frac{2}{7}$　③ $\frac{3}{14}$　④ $\frac{1}{7}$　⑤ $\frac{1}{14}$

11. 영행렬이 아닌 이차정사각행렬 A가 $A^2=3A$를 만족시킨다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 행렬 $(A-E)^n$을

$$(A-E)^n=a_nA+(-1)^nE$$

와 같이 나타낼 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다. (단, E는 단위행렬이다.)

> 자연수 n에 대하여
> $$(A-E)^{n+1}=\{a_nA+(-1)^nE\}(A-E)$$
> $$=a_nA^2-a_nA+(-1)^nA+(-1)^{n+1}E$$
> 이고, $A^2=3A$이므로
> $$(A-E)^{n+1}=(2a_n+\boxed{(가)})A+(-1)^{n+1}E$$
> 이다. 그러므로
> $$a_{n+1}=2a_n+\boxed{(가)}\quad\cdots\cdots ㉠$$
> 이다. 따라서 2 이상인 자연수 n에 대하여
> $$a_n+a_{n+1}=2(a_{n-1}+a_n)$$
> 이다. 또한
> $$a_1+a_2=1+1=2$$
> 이므로 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_n+a_{n+1}=\boxed{(나)}\quad\cdots\cdots ㉡$$
> 이다. ㉠과 ㉡에 의해
> $$3a_n+(-1)^n=\boxed{(나)}$$
> 이다. 따라서
> $$a_n=\frac{\boxed{(나)}+(-1)^{n+1}}{3}$$
> 이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(9)\times g(5)$의 값은? [3점]

① -32　② -16　③ 8　④ 16　⑤ 32

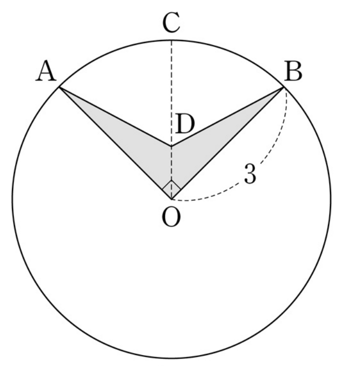
12. 두 함수 $f(x)=x^2+2x-1$, $g(x)=\sin x-\cos x$에 대하여 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은? [3점]

① $\sqrt{2}-1$　② $\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{2}-1$
④ $\sqrt{2}+1$　⑤ $2\sqrt{2}+1$

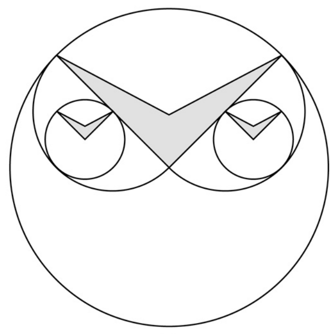
13. 기울기가 m인 두 직선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 y절편은 각각 2, 0이다. 무리방정식 $\sqrt{f(x)}=g(x)$의 실근은 α이고, 무리방정식 $\sqrt{f\left(\frac{x}{2}\right)}=g(x-\alpha)$의 실근은 2일 때, $m+\alpha$의 값은? [3점]

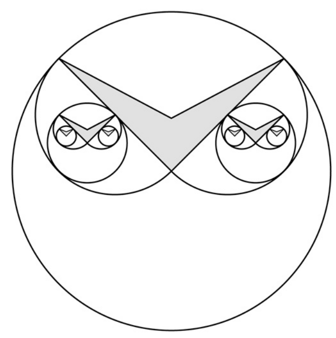
① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

14. 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이 있다. 그림과 같이 $\angle \mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$인 원 위의 두 점을 A, B라 하고, 호 AC와 호 BC의 길이가 같은 점을 C라 하자. 선분 OC를 $1:2$로 내분하는 점을 D라 하고, 네 선분 OA, AD, DB, BO로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 두 반지름 OA, OB를 각각 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 두 반원 안에 지름의 길이가 최대인 내접원을 각각 그린다. 두 내접원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 그린 두 내접원의 4개의 반지름을 각각 지름으로 하는 4개의 반원을 그리고, 4개의 반원 안에 지름의 길이가 최대인 내접원을 각각 그린다. 4개의 내접원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 모양의 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1


R_2


R_3

......

① $\frac{11\sqrt{2}}{7}$　② $\frac{12\sqrt{2}}{7}$　③ $\frac{13\sqrt{2}}{7}$
④ $2\sqrt{2}$　⑤ $\frac{15\sqrt{2}}{7}$

15. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2 = A - E, \quad (AB)^2 = E$$

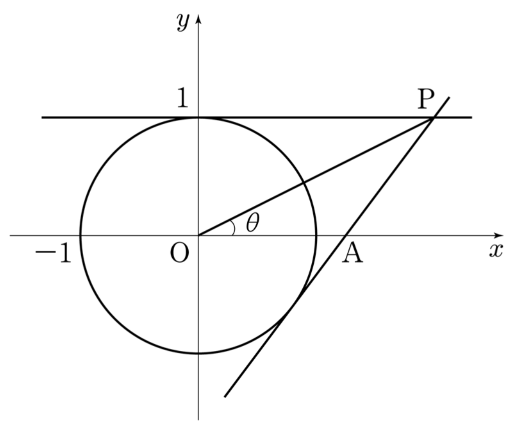
를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. A와 B는 모두 역행렬을 가진다.
ㄴ. $BAB = -A^2$
ㄷ. $B^2AB^2 = A^2 + B^2$

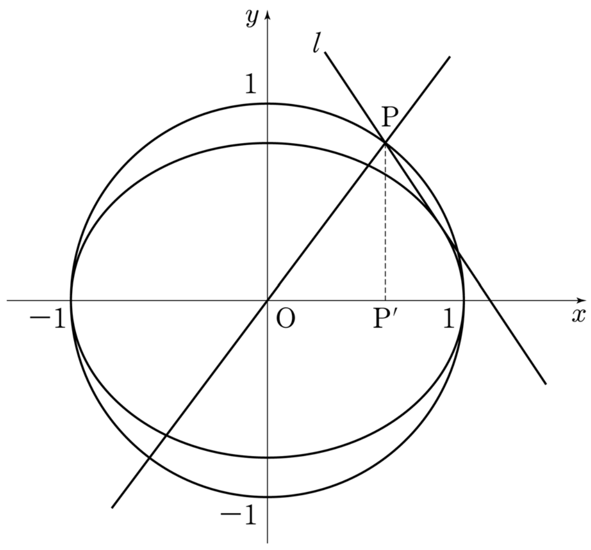
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 그림과 같이 직선 $y=1$ 위의 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선이 x축과 만나는 점을 A라 하고, $\angle \mathrm{AOP} = \theta$라 하자. $\overline{\mathrm{OA}} = \frac{5}{4}$일 때, $\tan 3\theta$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$이다.) [4점]



① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

17. 그림과 같이 좌표평면에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 P$'$이라 하자. 점 P$'$을 초점으로 하고, x축 위에 있는 원의 지름을 장축으로 하는 타원에 대하여 점 P에서 타원에 그은 접선 l의 기울기가 $-\frac{3}{2}$일 때, 직선 OP의 기울기는? [4점]



① $\frac{7}{6}$　② $\frac{5}{4}$　③ $\frac{4}{3}$　④ $\frac{17}{12}$　⑤ $\frac{3}{2}$

18. $x>0$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $2x \le f(x) \le 3x$이다. $f(1)=2$이고 $f(2)=6$일 때, $f'(1)+f'(2)$의 값은? [4점]

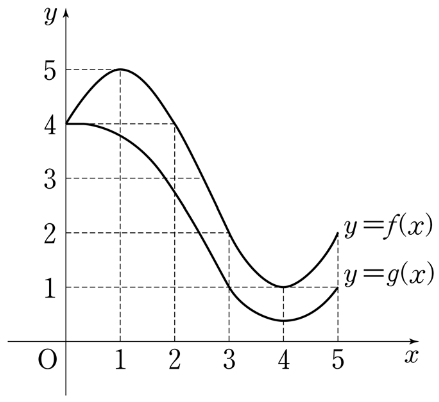
① 8　② 7　③ 6　④ 5　⑤ 4

19. 어느 지역 학생 중에서 일주일 동안 7시간 이상 독서를 한 학생의 비율이 36%라고 한다. 이 지역에서 학생 100명을 임의추출할 때, 일주일 동안 7시간 이상 독서를 한 학생이 42명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.25	0.3944
1.50	0.4332
1.75	0.4599
2.00	0.4772

① 0.6056 ② 0.8276 ③ 0.8944
④ 0.9332 ⑤ 0.9599

20. 열린 구간 $(0, 5)$에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 그림과 같다. 합성함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $h(3) = 4$
ㄴ. $h'(2) \ge 0$
ㄷ. 함수 $h(x)$는 구간 $(3, 4)$에서 감소한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-1 \leq x < 1$일 때 $f(x)=\dfrac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 4\int_{0}^{1} f(x)\,dx$

ㄴ. $1<x<2$일 때 $f'(x)>0$이다.

ㄷ. $\displaystyle\int_{1}^{3} x\,|f'(x)|\,dx = 4$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 첫째항이 -6이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이 30일 때, n의 값을 구하시오. [3점]

23. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ a)$, $\mathrm{B}(a,\ 2)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 14$일 때, 양수 a의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [3점]

24. 일차변환 f 에 의하여 점 $(1,\ 0)$ 은 자기 자신으로 옮겨지고, 점 $(1,\ 1)$ 은 점 $(-1,\ -1)$ 로 옮겨진다. 일차변환 f 에 의하여 점 $(3,\ -4)$ 가 점 $(a,\ b)$ 로 옮겨질 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 통신이론에서 신호의 주파수 대역폭이 $B(\mathrm{Hz})$ 이고 신호잡음전력비가 x 일 때, 전송할 수 있는 신호의 최대 전송 속도 $C(\mathrm{bps})$ 는 다음과 같이 계산된다고 한다.

$$C = B \times \log_2(1+x)$$

신호의 주파수 대역폭이 일정할 때, 신호잡음전력비를 a 에서 $33a$ 로 높였더니 신호의 최대 전송 속도가 2배가 되었다. 양수 a 의 값을 구하시오. (단, 신호잡음전력비는 잡음전력에 대한 신호전력의 비이다.) [3점]

26. 닫힌 구간 $[-1,\ 3]$ 에서 정의된 연속확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} a(1-x^2) & (-1 \le x < 0) \\ a\left(1-\dfrac{x}{3}\right) & (0 \le x \le 3) \end{cases}$$

일 때, $\mathrm{P}(-1 \le X \le 0) = \dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$의 초점을 F, 포물선의 준선이 x축과 만나는 점을 A라 하자. 포물선 위의 점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=7$이고 $\overline{\mathrm{BF}}=5$가 되도록 하는 p의 값이 a 또는 b일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, $a\neq b$이다.) [4점]

28. 좌표공간에서 세 직선

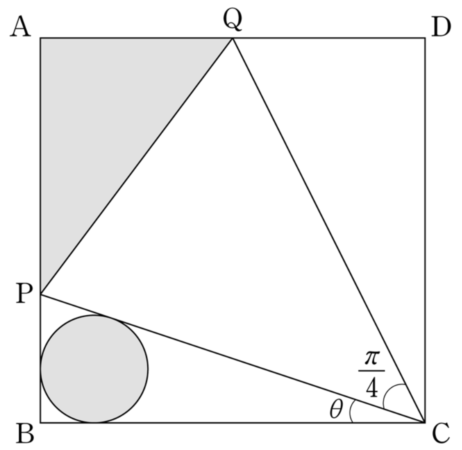
$$x=-y=\frac{z}{2},\quad x=y=\frac{z}{2a},\quad x=-\frac{y}{2}=\frac{z}{a}$$

가 같은 평면 위에 있을 때, $20a$의 값을 구하시오. (단, $a\neq 0$이다.) [4점]

29. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 변 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle BCP = \theta$라 하고, 변 AD 위의 점 Q를 $\angle PCQ = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡는다. 삼각형 APQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 BCP의 내접원의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \frac{q}{p}\pi$$

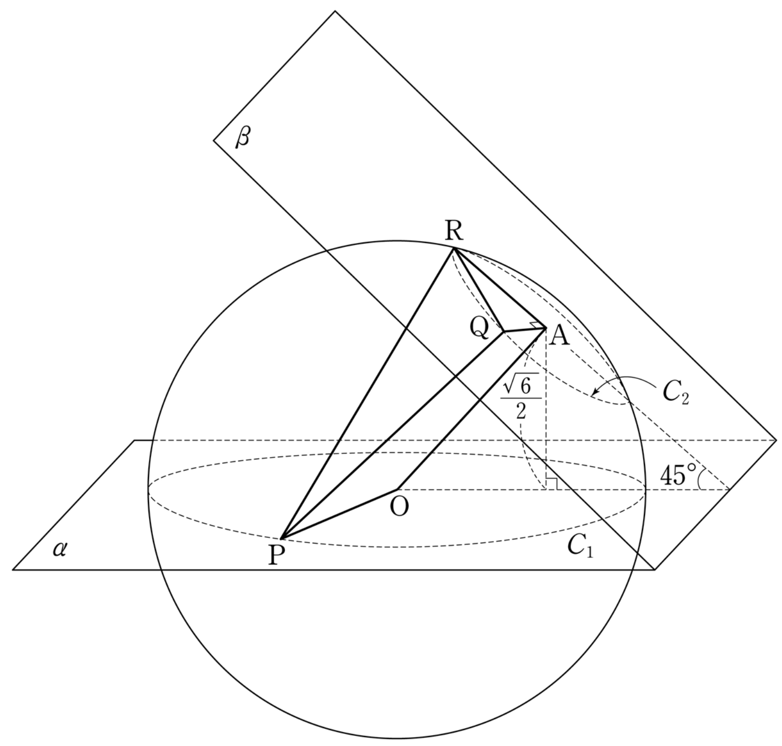
이다. $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 반지름의 길이가 2인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α라 하고, 평면 α와 이루는 각이 $45°$인 평면을 β라 하자. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원을 C_1, 평면 β와 구가 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심 A와 평면 α 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P, 원 C_2 위에 두 점 Q, R를 잡는다.

> (가) $\angle QAR = 90°$
> (나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하다.

평면 PQR와 평면 AQPO가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.