2020 EBS 수능특강 확률과 통계 2. 중복조합과 이항정리

p17 유제1 단순변형

1. 10명으로 구성된 어느 동아리에서 정기 모임 장소를 정하기 위해 3개의 장소 A, B, C중 한 곳에 무기명으로 투표하기로 하였다. 개표 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 기권이나 무효는 없다.)

① 63 ② 66 ③ 69
④ 72 ⑤ 75

p19 유제3 단순변형

2. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f중 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는?

(가) $f(4)$는 소수이다. (나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$이다.

① 255 ② 260 ③ 265
④ 270 ⑤ 275

p21 유제5 단순변형

3. 다항식 $(x-2a)^8$의 전개식에서 x^6의 계수가 448일 때, x^7의 계수는? (단, a는 양수이다.)3)

① -32 ② -16 ③ 0
④ 16 ⑤ 32

p23 유제6 응용변형

4. $N={}_{11}C_1+{}_{11}C_3+{}_{11}C_5+{}_{11}C_7+{}_{11}C_9+{}_{11}C_{11}$일 때, $\log_4 N$의 값은?4)

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

p23 유제7 단순변형

5. 자연수 n에 대하여 서로 다른 7종류의 아이스크림 중에서 중복을 허락하여 n개의 아이스크림을 택하는 경우의 수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$의 값은?
(단, 모든 종류의 아이스크림은 충분히 많이 있다.)5)

① 788 ② 789 ③ 790
④ 791 ⑤ 792

p24 1번 단순변형

6. ${}_6H_4+{}_5P_3$의 값은?6)

① 118 ② 120 ③ 122
④ 124 ⑤ 126

p24 2번 응용변형

7. 서로 다른 5개의 문자 a, b, c, d, e에서 중복을 허락하여 n개를 택하는 경우의 수가 70일 때, 자연수 n의 값은?(단, 각 문자를 적어도 하나는 포함한다.)7)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

p24 3번 단순변형

8. 같은 종류의 빵 4개와 같은 종류의 초코우유 5개를 네 사람에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?(단, 아무것도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)8)

① 1920 ② 1940 ③ 1960
④ 1980 ⑤ 2000

p24 4번 단순변형

9. $3 \le a \le b \le c \le 7 \le d \le e \le 10$을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는?9)

① 300 ② 350 ③ 400
④ 450 ⑤ 500

p24 5번 응용변형

10. 방정식 $x+y+z=15$을 만족시키는 홀수 $x,\ y,\ z$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?10)

① 24 ② 25 ③ 26
④ 27 ⑤ 28

p25 6번 단순변형

11. $\left(2x^2+\dfrac{4}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항을 a, x^6의 계수를 b라 할 때 $\dfrac{a}{b}$의 값은?11)

① 2 ② $\dfrac{5}{2}$ ③ 3
④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ 4

p25 7번 단순변형

12. 다항식 $(2x+a)^5$의 전개식에서 상수항과 x^3의 계수의 합이 0일 때, x^2의 계수를 구하면?
(단, a는 0이 아닌 상수이다.)12)

① -3200 ② -1600 ③ 1200
④ 1600 ⑤ 3200

p25 8번 단순변형

13.다항식

$(3x^2+1)+(3x^2+1)^2+(3x^2+1)^3+\cdots+(3x^2+1)^{10}$

의 전개식에서 x^4의 계수는?13)

① 1470 ② 1475 ③ 1480
④ 1485 ⑤ 1490

p25 9번 단순변형

14. 집합 $A=\{x \mid x$는 11이하의 자연수 $\}$의 공집합이 아닌 부분집합 중에서 원소의 개수가 짝수인 부분집합의 개수를 구하면?14)

① 1022 ② 1023 ③ 1024
④ 1025 ⑤ 1026

p26 2번 단순변형

15. 같은 종류의 빵 9개와 같은 종류의 음료수 4개를 세 사람에게 남김없이 나누어 줄 때, 아무것도 받지 못하는 사람이 생기지 않도록 나누어 주는 경우의 수는?15)

① 618 ② 638 ③ 658
④ 678 ⑤ 698

정답 및 해설

1	②	2	③	3	①	4	③	5	④
6	⑤	7	④	8	③	9	②	10	⑤
11	⑤	12	①	13	④	14	②	15	④

1) 정답 ②

[출제범위] 중복조합

무기명 투표이므로 10명이 3개의 장소 중 한곳에 투표한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = \dfrac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66$가지이다.

필수 개념

▸ 중복조합

서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 말하며 기호로는 ${}_nH_r$로 나타낸다. $\Rightarrow$ ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

2) 정답 ③

[출제범위] 중복조합

조건 (가)에 의하여 $f(4)$는 소수이므로 다음 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

ⅰ) $f(4)=2$인 경우

$f(1) \le f(2) \le f(3) \le 2$이므로 1, 2에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 작은 수부터 크기순으로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 정하면 된다.

즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$가지이다.

이 각각에 대하여 $2 \le f(5) \le f(6)$이므로

2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 2개를 택한 후 작은 수부터 크기순으로 $f(5)$, $f(6)$의 값으로 정하면 된다.

즉, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$가지이다.

따라서 이 경우의 수는 $4 \times 15 = 60$가지이다.

ⅱ) $f(4)=3$인 경우

$f(1) \le f(2) \le f(3) \le 3$이므로 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 작은 수부터 크기순으로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 정하면 된다.

즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$가지이다.

이 각각에 대하여 $3 \le f(5) \le f(6)$이므로

3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 2개를 택한 후 작은 수부터 크기순으로 $f(5)$, $f(6)$의 값으로 정하면 된다.

즉, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$가지이다.

따라서 이 경우의 수는 $10 \times 10 = 100$가지이다.

ⅲ) $f(4)=5$인 경우

$f(1) \le f(2) \le f(3) \le 5$이므로 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 작은 수부터 크기순으로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 정하면 된다.

즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$가지이다.

이 각각에 대하여 $5 \le f(5) \le f(6)$이므로

5, 6에서 중복을 허락하여 2개를 택한 후 작은 수부터 크기순으로 $f(5)$, $f(6)$의 값으로 정하면 된다.

즉, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$가지이다.

따라서 이 경우의 수는 $35 \times 3 = 105$가지이다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 구하는 함수의 개수는

$60 + 100 + 105 = 265$가지이다.

필수 개념

▸ 중복조합

서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 말하며 기호로는 ${}_nH_r$ 로 나타낸다. ⇒ ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

3) 정답 ①

[출제범위] 이항정리

다항식 $(x-2a)^8$의 전개식의 일반항은

${}_8C_r\,x^{8-r}(-2a)^r$이고,

x^6항은 $r=2$일 때이므로 x^6의 계수는

${}_8C_2(-2a)^2 = 112a^2$이다.

주어진 조건에 의하여 $112a^2 = 448$이므로

$a=2\ (a>0)$이다.

따라서 x^7항은 $r=1$일 때이므로 구하는 x^7의 계수는 ${}_8C_1\times(-4)^1 = -32$이다.

필수 개념

▸ 이항정리

n 이 양의 정수일 때,

$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\,a^{n-r}b^r$이고

이항계수의 일반항 ⇒ ${}_nC_r\,a^{n-r}b^r$

4) 정답 ③

[출제범위] 이항정리

$N = {}_{11}C_1 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_5 + {}_{11}C_7 + {}_{11}C_9 + {}_{11}C_{11}$

$= 2^{11-1}$

$= 2^{10}$

따라서 $\log_4 N = \log_4 2^{10} = \log_4 4^5 = 5$이다.

필수 개념

▸ 이항계수의 성질

(1) ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$

(2) ${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + {}_nC_6 + \cdots = 2^{n-1}$

(3) ${}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + {}_nC_7 + \cdots = 2^{n-1}$

▸ n이 홀수 일 때 $(n=2k-1)$

(1) ${}_{2k-1}C_0 + {}_{2k-1}C_1 + {}_{2k-1}C_2 + \cdots + {}_{2k-1}C_k = 2^{n-1}$

(2) ${}_{2k-1}C_{k+1} + {}_{2k-1}C_{k+2} + {}_{2k-1}C_{k+3} + \cdots + {}_{2k-1}C_{2k-1} = 2^{n-1}$

5) 정답 ④

[출제범위] 이항정리

서로 다른 7종류의 아이스크림 중에서 중복을 허락하여 n개의 아이스크림을 택하는 경우의 수를 $f(n)$이라 했으므로 $f(n) = {}_7H_n$이다.

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$

$= {}_7H_1 + {}_7H_2 + {}_7H_3 + {}_7H_4 + {}_7H_5$

$= {}_7C_1 + {}_8C_2 + {}_9C_3 + {}_{10}C_4 + {}_{11}C_5$

$= ({}_7C_0 + {}_7C_1) + {}_8C_2 + {}_9C_3 + {}_{10}C_4 + {}_{11}C_5 - 1$

$= ({}_8C_1 + {}_8C_2) + {}_9C_3 + {}_{10}C_4 + {}_{11}C_5 - 1$

$= ({}_9C_2 + {}_9C_3) + {}_{10}C_4 + {}_{11}C_5 - 1$

$= ({}_{10}C_3 + {}_{10}C_4) + {}_{11}C_5 - 1$

$= ({}_{11}C_4 + {}_{11}C_5) - 1$

$= {}_{12}C_5 - 1$

$= \dfrac{12\times11\times10\times9\times8}{5\times4\times3\times2\times1} - 1$

$= 791$

다른풀이

서로 다른 7종류의 아이스크림 중에서 중복을 허락하여 n개의 아이스크림을 택하는 경우의 수를 $f(n)$이라 했으므로 $f(n) = {}_7H_n$이다.

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$

$= {}_7H_1 + {}_7H_2 + {}_7H_3 + {}_7H_4 + {}_7H_5$

$= {}_7C_1 + {}_8C_2 + {}_9C_3 + {}_{10}C_4 + {}_{11}C_5$

$= {}_6C_6 + {}_7C_6 + {}_8C_6 + {}_9C_6 + {}_{10}C_6 + {}_{11}C_6 - 1$
$= {}_{12}C_7 - 1$
$= {}_{12}C_5 - 1$
$= 791$

필수 개념

▸ 이항계수의 성질
(1) ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r = {}_nC_r$
(2) ${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_nC_2 = {}_{n+1}C_3$

6) 정답 ⑤
[출제범위] 중복조합
${}_6H_4 = {}_{6+4-1}C_4 = {}_9C_4 = \dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1} = 126$
${}_5P_3 = 5\times4\times3 = 60$
따라서 ${}_6H_4 + {}_5P_3 = 126 + 60 = 186$이다.

필수 개념

▸ 중복조합
서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 말하며 기호로는 ${}_nH_r$로 나타낸다. ⇒ ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

7) 정답 ④
[출제범위] 중복조합
서로 다른 5개의 문자를 적어도 하나 포함해야 하므로 미리 각 문자를 하나씩 뽑아 놓고 중복을 허락하여 $n-5$개를 택하는 경우의 수이다.
즉, 서로 다른 5개에서 $n-5$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_5H_{n-5} = {}_{n-1}C_{n-5} = {}_{n-1}C_4$
$= \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4\times3\times2\times1}$

즉, $\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4\times3\times2\times1} = 70$이므로
$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 70\times24$
$= 8\times7\times6\times5$
따라서 $n-1=8$에서 $n=9$이다.

필수 개념

▸ 중복조합
서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 말하며 기호로는 ${}_nH_r$로 나타낸다. ⇒ ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

8) 정답 ③
[출제범위] 중복조합
같은 종류의 빵 4개를 네 사람에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_4 = {}_7C_3 = 35$가지이다.
이 각각에 대하여 같은 종류의 초코우유 5개를 네 사람에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_5 = {}_{4+5-1}C_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $35\times56 = 1960$가지이다.

필수 개념

▸ 중복조합
서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 말하며 기호로는 ${}_nH_r$로 나타낸다. ⇒ ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

9) 정답 ②

[출제범위] 중복조합

$3 \le a \le b \le c \le 7$을 만족시키는 세 자연수 a, b, c는 3, 4, 5, 6, 7에서 중복을 허락하여 3개를 택한 후 작은 수부터 크기순으로 a, b, c의 값으로 정하면 되므로 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$이다.

이 각각에 대하여 $7 \le d \le e \le 10$을 만족시키는 두 자연수 d, e는 7, 8, 9, 10에서 중복을 허락하여 2개를 택한 후 작은 수부터 크기순으로 d, e의 값으로 정하면 되므로 모든 순서쌍 (d, e)의 개수는 ${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$이다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$35 \times 10 = 350$이다.

필수 개념

▸ 중복조합

서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 말하며 기호로는 ${}_nH_r$ 로 나타낸다. $\Rightarrow$ ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

10) 정답 ⑤

[출제범위] 중복조합

방정식 $x+y+z=15$를 만족하는 홀수의 순서쌍이므로 $x=2a+1$, $y=2b+1$, $z=2c+1$ (a, b, c는 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)=15$에서

$a+b+c=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$개 이다.

필수 개념

▸ 중복조합

서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 말하며 기호로는 ${}_nH_r$ 로 나타낸다. $\Rightarrow$ ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

11) 정답 ⑤

[출제범위] 이항정리

$\left(2x^2 + \dfrac{4}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r (2x^2)^{6-r}\left(\frac{4}{x}\right)^r = {}_6C_r \times 2^{r+6} \times x^{12-3r}$$

상수항은 $12-3r=0$, 즉 $r=4$일 때이므로

${}_6C_4 \times 2^{10} = {}_6C_2 \times 2^{10} = 15 \times 2^{10}$

$\therefore\ a = 15 \times 2^{10}$

x^6항은 $12-3r=6$, 즉 $r=2$일 때이므로

$${}_6C_2 \times 2^8 = \frac{6\times5}{2\times1} \times 2^8 = 15 \times 2^8$$

$\therefore\ b = 15 \times 2^8$

따라서 $\dfrac{a}{b} = \dfrac{15\times2^{10}}{15\times2^8} = 4$이다.

필수 개념

▸ 이항정리

n 이 양의 정수일 때,

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, a^{n-r} b^r \text{이고}$$

이항계수의 일반항 $\Rightarrow$ ${}_nC_r\, a^{n-r} b^r$

12) 정답 ①

[출제범위] 이항정리

$(2x+a)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2x)^{5-r}a^r$이다.

상수항은 $5-r=0$, 즉 $r=5$일 때이므로

${}_5C_5a^5=a^5$이다.

x^3항은 $5-r=3$, 즉 $r=2$일 때이므로 x^3의 계수는 ${}_5C_2 2^3a^2=80a^2$

$a^5+80a^2=0$에서

$a^2(a^3+80)=0$

$a\neq 0$이므로 $a^3=-80$이다.

따라서 구하는 x^2의 계수는

$5-r=2$, 즉 $r=3$일 때이므로 x^2의 계수는

${}_5C_3 2^2a^3=40a^3=-3200$이다.

필수 개념

▸ 이항정리

n이 양의 정수일 때,

$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\,a^{n-r}b^r$이고

이항계수의 일반항 ⇒ ${}_nC_r\,a^{n-r}b^r$

13) 정답 ④

[출제범위] 이항정리

$(3x^2+1)^n=(1+3x^2)^n$ 이므로 $(1+3x^2)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(3x^2)^r={}_nC_r\times 3^r\times x^{2r}$

x^4항은 $r=2$일 때이므로 x^4의 계수는

${}_nC_2\times 3^2=9{}_nC_2$

따라서

$(3x^2+1)+(3x^2+1)^2+(3x^2+1)^3+\cdots+(3x^2+1)^{10}$의 전개식에서 x^4의 계수는

$9{}_2C_2+9{}_3C_2+9{}_4C_2+\ldots+9{}_{10}C_2$

$=9({}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{10}C_2)$

$=9{}_{11}C_3$

$=1485$

다른풀이

$x\neq 0$일 때

$(3x^2+1)+(3x^2+1)^2+(3x^2+1)^3+\cdots+(3x^2+1)^{10}$은 첫째항과 공비가 모두 $(3x^2+1)$인 등비수열의 합이므로

$(3x^2+1)+(3x^2+1)^2+(3x^2+1)^3+\cdots+(3x^2+1)^{10}$

$=\dfrac{(3x^2+1)\{(3x^2+1)^{10}-1\}}{(3x^2+1)-1}$

$=\dfrac{(3x^2+1)^{11}-(3x^2+1)}{3x^2}$

이므로 주어진 식의 전개식에서 x^4의 계수는 $\dfrac{1}{3}(3x^2+1)^{11}$의 전개식에서 x^6의 계수와 같다.

따라서 구하는 x^4의 계수는

$\dfrac{1}{3}\times{}_{11}C_3\times 3^3=1485$

필수 개념

▸ 이항정리

n이 양의 정수일 때,

$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\,a^{n-r}b^r$이고

이항계수의 일반항 ⇒ ${}_nC_r\,a^{n-r}b^r$

▸ 이항계수의 성질

(1) ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r={}_nC_r$

(2) ${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_nC_2={}_{n+1}C_3$

14) 정답 ②

[출제범위] 이항정리

집합 A의 부분집합 중에서 원소의 개수가 k $(k=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ 11)$인 부분집합의 개수는 서로

다른 11개에서 k개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{11}C_k$

따라서 원소의 개수가 짝수인 부분집합의 개수는 ${}_{11}C_2+{}_{11}C_4+{}_{11}C_6+{}_{11}C_8+{}_{11}C_{10}$이다.

$${}_{11}C_2+{}_{11}C_4+{}_{11}C_6+{}_{11}C_8+{}_{11}C_{10}$$
$$={}_{11}C_0+{}_{11}C_2+{}_{11}C_4+{}_{11}C_6+{}_{11}C_8+{}_{11}C_{10}-1$$
$$=2^{11-1}-1$$
$$=1023$$

필수 개념

▸ 이항계수의 성질

(1) ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

(2) ${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+{}_nC_6+\cdots=2^{n-1}$

(3) ${}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+{}_nC_7+\cdots=2^{n-1}$

▸ n이 홀수 일 때 $(n=2k-1)$

(1) ${}_{2k-1}C_0+{}_{2k-1}C_1+{}_{2k-1}C_2+\cdots+{}_{2k-1}C_k=2^{n-1}$

(2) ${}_{2k-1}C_{k+1}+{}_{2k-1}C_{k+2}+{}_{2k-1}C_{k+3}+\cdots+{}_{2k-1}C_{2k-1}=2^{n-1}$

15) 정답 ④

[출제범위] 중복조합

세 사람이 받는 음료수의 개수에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

ⅰ) 세 사람이 음료수를 적어도 1개씩 받는 경우

음료수 4개를 세 명에게 나누어 주는 경우의 수는 먼저 1개씩 나누어 주고 나머지 하는 세 명중 한명에게 주면 되므로 ${}_3C_1=3$가지이다.

같은 종류의 빵 9개를 세 사람에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_9={}_{3+9-1}C_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

따라서 음료수와 빵을 모두 나누어 주는 경우의 수는 $3\times55=165$가지이다.

(ⅱ) 세 사람 중 두 사람만 음료수를 받는 경우

음료수를 받지 못하는 한 사람을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$가지이고

이 각각에 대하여 나머지 두 사람에게 음료수 4개를 각 사람이 적어도 1개씩 받도록 나누어 주는 경우의 수는 먼저 두 사람에게 음료수를 1개씩 나누어 준 후 나머지 2개의 음료수를 두 사람에게 나누어 주면 되므로 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_{2+2-1}C_2={}_3C_2=3$가지이다.

따라서 음료수를 나누어 주는 방법은 9가지이다.

이 각각에 대하여 음료수를 받지 못한 사람에게 먼저 빵을 1개 나누어 주고 나머지 빵 8개를 세 사람에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$가지이다.

따라서 음료수와 빵을 모두 나누어 주는 경우의 수는 $9\times45=405$가지이다.

ⅲ) 세 사람 중 한 사람만 음료수 4개를 받는 경우

음료수 4개를 받을 한 사람을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$가지이다.

이 각각에 대하여 음료수를 받지 못한 두 사람에게 먼저 빵을 1개씩 나누어 주고 나머지 빵 7개를 세 사람에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_7={}_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=36$가지이다

따라서 음료수와 빵을 모두 나누어 주는 경우의 수는 $3\times36=108$가지이다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$165+405+108=678$가지이다.

필수 개념

▸ 중복조합

서로 다른 n개의 원소에서 중복을 허락하여 r개를 택하는 조합을 말하며 기호로는 ${}_nH_r$로 나타낸다. ⇒ ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$