* 2019학년도 평가원 9월 수학 나형 30번.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$,

방정식 $f\circ f(x)=x$ 의 모든 실근 → $0,\ 1,\ a,\ 2,\ b$ $(0<1<a<2<b)$ ⇒ 5개.

$f'(1)<0,\ f'(2)<0$ → 극대, 극소 존재, $f'(0)-f'(1)=6$. ($f(x)$의 개형)

$f\circ f(x)=k$ (단, k는 상수)의 근을 또는 근의 개수를 찾아야 하는

형태가 아니고, $f\circ f(x)=x$ (단, x는 변수)의 근을 찾아야 하는 형태임에 주의한다.

∴ ① $f(\triangle)=x$인 $\triangle$를 찾고, ② $f(\alpha)=\beta,\ f(\beta)=\alpha$ (단, $\alpha\neq\beta$) 인

α, β를 찾아야 한다. ① 에서 3개, ② 에서 2개.

② 에서 4개인 경우는 불가능하다. 근들의 중간값인 a의 경우, (a, a)를 의미한다.

$x=1$ 과 $x=2$ 가 감소하는 구간에 속하므로 (극대점 x값 $<1<2<$ 극소점 x값)

① 에서 찾을 수 있는 근 $\triangle$에 해당되는 값이 $x=0,\ x=a,\ x=b$

② 에서 찾을 수 있는 근 α, β가 $x=1,\ x=2$ 가 된다.

따라서 $f(x)$는 $(0,0),\ (1,f(1)),\ (a,a),\ (2,f(2)),\ (b,b)$

→ $(0,0),\ (1,2),\ (a,a),\ (2,1),\ (b,b)$를 만족시킨다.

$f(x)=px^3+qx^2+rx$ 라 하면 (단, $p>0,\ f(0)=0$)

$f'(x)=3px^2+2qx+r$.

(i) $(1,2)$ → $p+q+r=2$

(ii) $(2,1)$ → $8p+4q+2r=1$

$\Rightarrow 6p+2q=-3$

(iii) $f'(0)-f'(1)$ ⇒ $-3p-2q=6$ $\Rightarrow 3p+2q=-6$

∴ $p=1,\ q=-\frac{9}{2}$

∴ $r=\frac{11}{2}$

그러므로 $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{11}{2}x$, $f(5) = 125 - \frac{9}{2} \times 25 + \frac{11}{2} \times 5$

$$= 125 + \frac{-225+55}{2} = 125 - \frac{170}{2} = 125 - 85 = 40$$

→ 문제에서 a와 b를 이용한 식의 값을 묻지 않은 이유는 그 값을 구하는 것이 필수적인 경우가 아니기 때문이다.

→ a가 근의 중간값이므로 a부터 1까지의 거리와 a부터 2까지의 거리가 같아야 하는 내용이므로 $a = \frac{3}{2}$ 를 통해서 접근할 수도 있다.

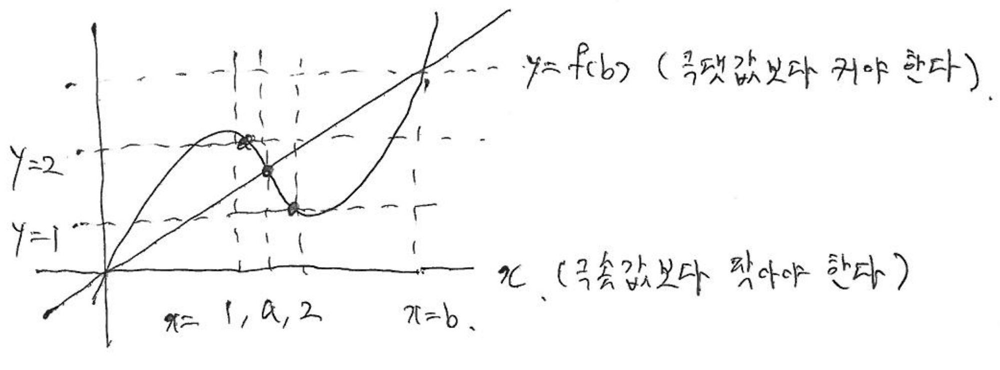
→ $f \circ f(x) = x$는 보통 역함수 문제와 유사하지만 증가·감소가 모두 존재하는 경우에서는 역함수로 접근할 수 없기 때문에 문제에서도 방정식이라는 표현을 쓴 것이다.

(참고) $f(x)$와 $g(x)$가 역함수다 $\Rightarrow$ $f(g(x)) = x$ (True)

$f(g(x)) = x$ $\Rightarrow$ $f(x)$와 $g(x)$가 역함수다. (False) → 엄밀하게는 [맞다고 할 수는 없다] 는 표현이 맞음.

$\Rightarrow$ $f(x)$와 $g(x)$가 $y=x$ 대칭이다. (True).

→ 문제 내용을 그래프에서 정리하면 다음과 같다.



※ 실근의 개수와 서로 다른 실근의 개수를 혼동하면 안 된다.