수능에서 논술까지 한번에!

한권으로 완성하는 수학

적분과 통계 (원고 일부)

12개의 $Critical\ \ Point$로 수능 수학을 정복하고

20개의 심화특강으로 수능 수학의 풀이속도와 수리논술을 정복한다!

이해원 지음

All in One

저자 이해원

연세대학교 수학과
성광고등학교 졸업
2010 고려대학교 정보통신대학 합격
2011 연세대학교 이과대학 수학과 합격
2011 고려대학교 이과대학 수학과 합격
2012 고려대학교 사범대학 수학교육과 합격
2012 포카칩 모의평가 검토위원
2011 KICE 9월 모의평가 수학 100점
2012 KICE 대학수학능력시험 수학 100점
2012 Xi-story 자이스토리 수학 수기 저자
tbs 기적의 TV - 상담 받고 대학가자: 공부의 비법 〈수리영역〉편 출연

주요 저서

수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 수학II
수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 기하와 벡터
수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 적분과 통계
수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 수학1
수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 미적분과 통계 기본
2013 난만한 모의평가 수리영역 가형, 수리영역 나형

저자 이해원이 주로 활동하는 곳 - (닉네임: 난만한)
포만한 수리연구소 (pnmath.com)
오르비스 옵티무스 (orbi.kr)
공신닷컴 (gongsin.com)

이 책을 검토해주셔서 감사합니다.

김동하(연세대학교 수학과)
박종혁(연세대학교 수학과)
허혁재(연세대학교 컴퓨터과학과)
이현기(연세대학교 화공생명공학부)
곽호연(서울대학교 수학교육과)
윤현욱(서울대학교 의예과)
박천익(한양대학교 기계공학부)
김희태(한양대학교 의예과)
신승호(한양대학교 공과대학)
김환철(한양대학교 컴퓨터공학부)
김용욱(서강대학교 전자공학부)
임동준(울산대학교 의예과)
김철현(상산고등학교)
최홍서(강릉고등학교)
원윤수(수지고등학교)
정상현(경기고등학교)
김세훈(동북고등학교)
이정범(동북고등학교)
박재석(성산고등학교)
김도헌(여의도고등학교)
한근희(중앙대학교 사범대학 부속고등학교)
윤태원
장재훈
김태훈
박주혁(메가스터디 재종반 강사)

집필에 도움을 주셔서 감사합니다.

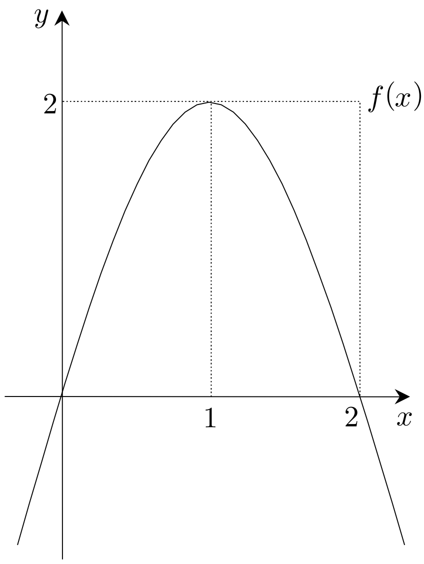
임은성(연세대학교 수학과)
이덕영(연세대학교 수학과)
김태영(연세대학교 수학과)

최대, 최소에 의한 정의

먼저 간단한 예를 들어 공부해보자.

> $f(x)=2x(2-x)$일 때, $t \leqq x \leqq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 한다.
> $g(t)$를 함수로 표현하시오.

여기서 새로운 함수 $g(t)$를 정의 했는데 일단 $f(x)$의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



이제 $g(t)$를 해석해야 하는데 바로 직관으로 해석해내지 못할 경우 t에 숫자를 하나하나 대입해보는 것이 가장 현명한 방법이다. 그렇게 하나하나 대입하다보면 문제에서 묻는 것이 무엇인지 파악할 수 있다.

먼저 $g(-2)$를 구해보자. $g(-2)$는 $-2 \leqq x \leqq -1$에서 $f(x)$의 최댓값이므로 $f(-1)$과 같음을 그래프에서 확인할 수 있다.

마찬가지로 $g(-1)$은 $-1 \leqq x \leqq 0$에서 $f(x)$의 최댓값이므로 $f(0)$

$\cdots$ 이와 같이 $g(t)$에서 $t \leqq 0$일 때는 항상 $f(t+1)$과 같음을 알 수 있다.

또한 t에 0과 1사이의 값을 대입해보면 $g(0)=g\left(\frac{1}{3}\right)=g\left(\frac{2}{3}\right)=g(1)=2$

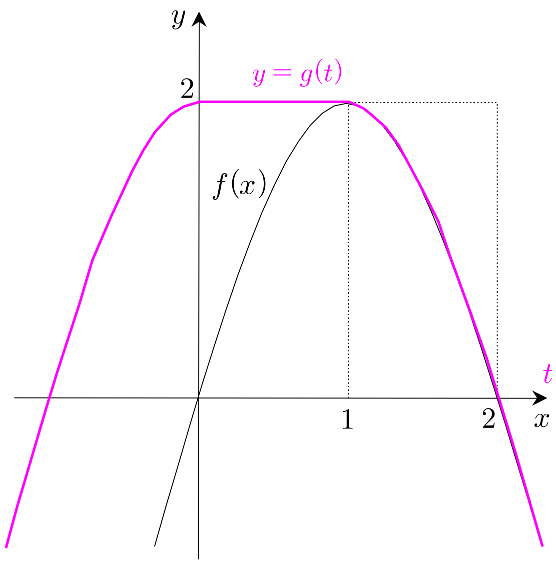
이 되고 $0 \leqq t \leqq 1$에서는 $g(t)=2$임을 알 수 있고

$t>1$에서는 $g(t)=f(t)$이므로 최종적으로 $g(t)$를 아래와 같이 정리할 수 있다.[1)]

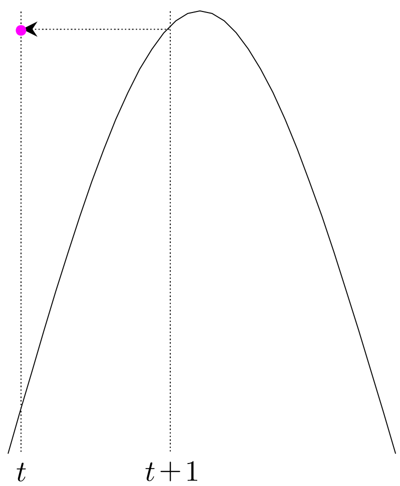
1) 이처럼 생소한 함수를 새롭게 정의할 때, 숫자를 하나하나 대입해보면 함수를 이해하기에 훨씬 수월하다.

$$g(t)=\begin{cases} f(t+1) & (t<0) \\ 2 & (0 \leqq t < 1) \\ f(t) & (t \geqq 1) \end{cases}$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프 위에 겹쳐서 그려보면 아래와 같이 그릴 수 있다.[1)]



이처럼 생소한 함수가 정의 되었을 때 바로 이해가 어려우면 정의역을 하나씩 직접 대입해서 확인해보면 슬슬 함수에 대한 이해가 될 뿐 아니라 그래프의 개형도 완성할 수 있다. 사실 위와 같은 정의에 의한 함수는 아래와 같은 이해를 바탕으로 그리는 것이 가장 이상적인 방법이긴 하다.



그림과 같이 구간 $t \leqq x \leqq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값을 정의역 t위에 찍고 t를 움직여가면서 그래프를 완성해나가면 $g(t)$의 개형을 금방 완성할 수 있을 것이다.[2)]

1) 여기까지의 과정은 고등학교 1학년 수준정도의 수학이다.
이 문제가 만약 수능에 출제 된다면

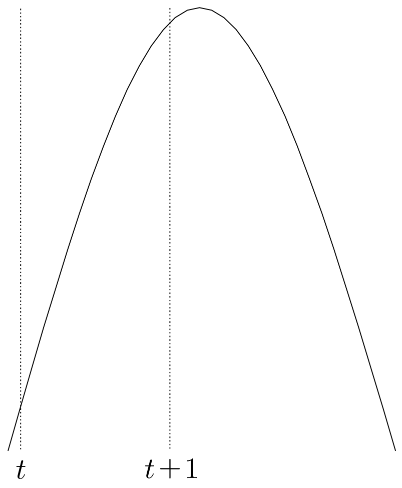
$f(x)=2x(2-x)$일 때,
$t \leq x \leq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 한다.
$\int_{-1}^{2} g(t)dt$의 값을 구하시오.

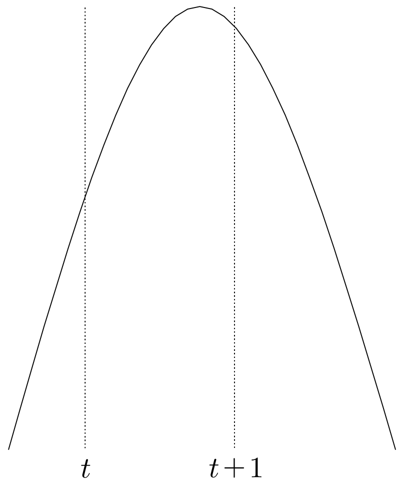
정도로 출제가 될 수 있다.

2) 이상적인 방법인데, 바로 이렇게 되지 않는다면 역시 숫자를 하나하나 대입하면서 새롭게 정의된 함수를 이해하는 것이 최우선이다.

하나의 예만 더 들어보자.

$f(x)=2x(2-x)$일 때, $t \leqq x \leqq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차를 $g(t)$라 한다. $g(t)$를 함수로 표현하시오.





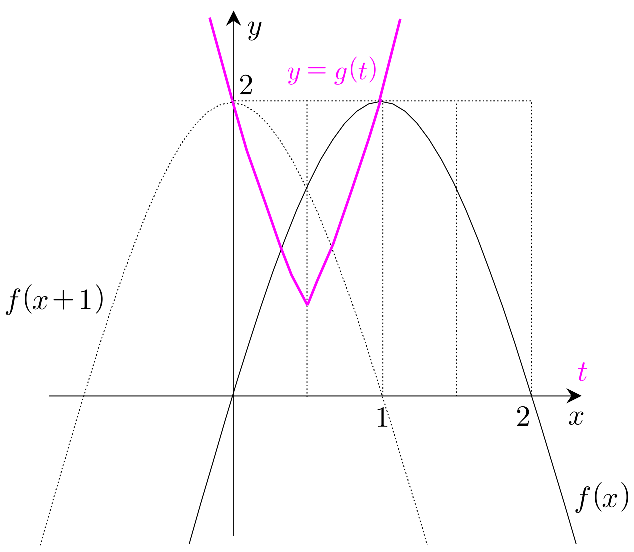
왼쪽 그림과 같이 $t \leqq 0$일 때는 $g(t)=f(t+1)-f(t)$

오른쪽 그림과 같이 $0<t \leqq \dfrac{1}{2}$일 때는 $g(t)=2-f(t)$

마찬가지로 $\dfrac{1}{2}<t \leqq 1$일 때는 $g(t)=2-f(t+1)$

$t>1$일 때는 $g(t)=f(t)-f(t+1)$

임을 알 수 있고 $f(t+1)-f(t)=2-4t$이므로 $g(t)$의 그래프를 그리면 아래와 같다.[1]



1) 이처럼 수능에서 어떠한 개형 $y=f(x)$를 출제할 때, 단순히 미분해서 개형을 완성하는 것이 아니라 최대, 최소를 이용해서 $y=f(x)$에 의하여 종속적인 새로운 함수를 정의해서 문제를 좀 더 어렵게 출제하기도 한다.

그래프의 교점의 개수, 실근의 개수에 의한 정의

마찬가지로 먼저 간단한 예를 들어 공부해보자.

> $f(x)=2x(2-x)$일 때, 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.
> $g(t)$를 함수로 표현하시오.

위 문제에서

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (t<2) \\ 1 & (t=2) \\ 0 & (t>2) \end{cases}$$

임을 쉽게 알 수 있다.[1)]

하나의 예를 더 들어보자.

> $f(x)=2x(2-x)$일 때, 방정식 $f(x)=t(x-1)+4$의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.
> $g(t)$를 함수로 표현하시오.

위 문제는 그래프를 그려보면 결국 $(1,\ 4)$에서 함수 $f(x)$에 그은 접선과 관련이 있음을 알 수 있다.[2)]

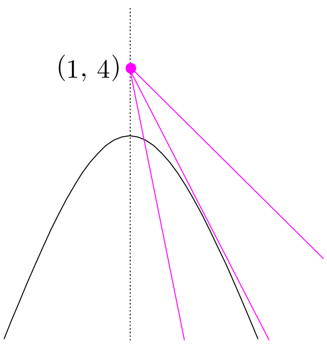
따라서 곡선 밖의 점 $(1,\ 4)$에서 그은 접선을 찾아보자.

$y=f'(p)(x-p)+f(p)=(4-4p)(x-p)+2p(2-p)$에 $(1,\ 4)$을 대입하면

$1=p^2-2p+1+4p-2p^2$에서 $p(p-2)=0$이므로 $p=0,\ 2$임을 알 수 있다.

즉 $(1,\ 4)$에서 그은 접선의 기울기는 $f'(0)=4,\ f'(2)=-4$이다.

따라서 아래의 그림과 같이 $t<-4$일 때는 $g(t)=2,\ t=-4$일 때 $g(t)=1$, $-4<t<4$일 때 $g(t)=0,\ t=4$일 때 $g(t)=1,\ t>4$일 때 $g(t)=2$임을 알 수 있다.



1) 이해가 어렵다면 역시 $t=0,\ t=1,\ t=2,\ t=3\ \cdots$ 을 대입해보는 것이 최선의 함수 추론 방법이다.

2) $f(x)=t(x-1)+4$ 를

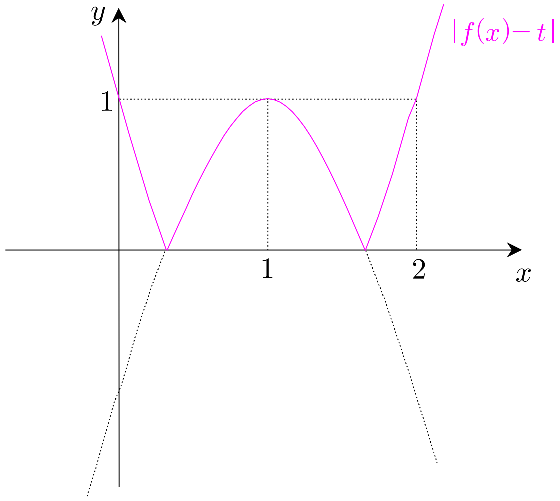
$$\frac{f(x)-4}{x-1}=t$$

으로 변형해서 $\frac{f(x)-4}{x-1}$ 의 그래프를 그리면 처음에 든 예시처럼 해결할 수도 있다.

미분 불가능 점의 개수에 의한 정의

$f(x) = 2x(2-x)$일 때, 함수 $|f(x)-t|$이 미분 불가능이 되는 x값의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)$를 함수로 표현하시오.

마찬가지로 $t=1$을 대입해보면 그림과 같이 미분 불가능 점이 2개임을 알 수 있다.



이와 같이 t의 값을 점점 크게 하면서 대입을 계속해보면
$t<2$일 때 $g(t)=2$, $t \geqq 2$일 때 $g(t)=0$임을 알 수 있다.

좀 더 문제를 어렵게 해보면 아래와 같다.

$f(x) = 2x(2-x)$일 때, 함수 $|f(x) - \{t(x-1)+4\}|$이 미분 불가능이 되는 x값의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)$를 함수로 표현하시오.

이 문제도 마찬가지로 $(1,\ 4)$에서 곡선에 그은 접선이 중요하다는 것을 알 수 있고 접할 때 t의 값은 4, -4이므로 아래와 같은 결론을 내릴 수 있다.

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (|t| \leqq 4) \\ 2 & (|t| > 4) \end{cases}$$

이처럼 함수를 정의하는 다양한 방법을 배웠는데, 결국 수능에 어떤 새로운 정의가 출제될지는 아무도 모르기 때문에 이 심화특강에 있는 예시를 외우는 것은 전혀 쓸모가 없음을 명심하고 이 단원에 주어진 대표적인 상황을 대입을 통해서 차근히 이해하고 추론해나가는 연습을 해야 한다.

정적분으로 정의된 함수[1]

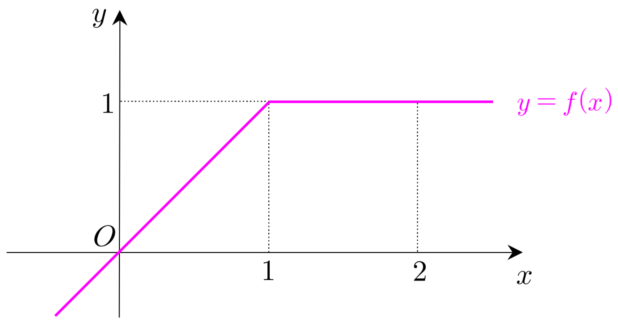
1. 정적분으로 정의된 함수에 대한 근본적인 이해

정적분으로 정의된 함수가 출제되면 아래와 같이 두 가지 식을 이끌어 내는 것이 가장 기본이다. 하지만 함수에 대한 근본적인 이해가 잘 안되어 있는 경우가 많다.

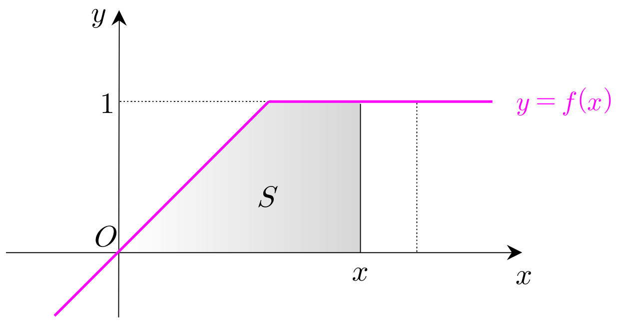
$$g(x)=\int_a^x f(t)dt \ \rightarrow \ g(a)=0,\ g'(x)=f(x)^{2)}$$

예를 들어

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$일 때, $y=f(x)$의 그래프가 아래와 같이 그려진다고 하자.



여기서 $g(x)$의 그래프를 생각해보면 분명히 $x>0$에서 증가한다는 것을 바로 추측할 수 있어야 한다. 또한 $g(1)=\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}$, $g(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ 임을 바로 바로 알 수 있다. 왜냐하면 함수 $g(x)$는 애초에 $y=f(x)$에서의 밑넓이를 의미하는 함수이기 때문이다.



즉 그림과 같이 넓이 S가 곧 $g(x)$ 되는 것이다. (즉, $g(x)=S$)[3]

이처럼 단순 수식 2개를 유도하는 암기가 아닌 근본적인 이해가 되어있어야 한다.

1) 앞서 CP05에서 배웠던 내용을 좀 더 심화적으로 공부한다고 생각하면 된다.

2) "변화율" 심화특강에서 $g'(x)=f(x)$에 대한 본질적인 이해를 해보자.

3) 즉, 넓이로 새롭게 정의된 함수라고 할 수 있고, 그 함수가 가지는 특징이 $g'(x)=f(x)$이 되는 것이다.

2. 정적분으로 정의된 함수의 응용

① $g(x)=\int_a^x (x-t)f(t)dt$**일 때**

과 같은 형태가 자주 출제되는데, 먼저 “함수 $g(x)$의 정의역(변수)”과 “적분변수”를 명백히 구분하는 것이 최우선이다.

$\int_a^x (x-t)f(t)dt$에서 적분변수는 t이므로 x는 상수취급을 해서 정적분의 성질을 적용하면

$\int_a^x (x-t)f(t)dt=\int_a^x \{xf(t)-tf(t)\}dt=\int_a^x xf(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$

$=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$이 된다.

이제 $g(x)=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$을 미분해야 하는데

x와 $\int_a^x f(t)dt$은 각각 “x에 대한 함수”이므로 $x\int_a^x f(t)dt$을 곱함수로 해석해서 곱의 미분법을 적용해야 한다.

즉 $g'(x)=\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_a^x f(t)dt$이 되고 $g''(x)=f(x)$임을 알 수 있다.

따라서 결론은 아래와 같다.

$$g(x)=\int_a^x (x-t)f(t)dt$$

$$\rightarrow\ g(a)=0,\ g'(x)=\int_a^x f(t)dt,\ g'(a)=0,\ g''(x)=f(x)$$

② $g(x)=\int_a^{2x^2} tf(t)dt$**일 때**

위와 같이 복잡하게 출제되면 헷갈리는 경우가 있는데,

$h(t)=tf(t)$와 같이 치환한 후 미적분의 기본정리 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$을 생각하는 것이 가장 좋은 방법이다.

즉 $g(x)=\int_a^{2x^2} tf(t)dt=\int_a^{2x^2} h(t)dt=H(2x^2)-H(a)$이므로

$g'(x)=4xh(2x^2)=4x\{2x^2f(2x^2)\}=8x^3f(2x^2)$임을 알 수 있다.

이처럼 치환과 미적분의 기본정리를 잘 활용하도록 하자.

③ $\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt = f(a)$에 대한 이해

이 극한 또한 0/0꼴 극한이므로 아래의 세 가지 방법이 대표적인 해법이 된다.[1)]

첫 번째로 로피탈로 해결하면 가장 빠른 해결이 가능하다.

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{1} = f(a)$$

두 번째로 기울기로 분석해보자.

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a} = F'(a) = f(a)$$

이렇게 두 가지 방법이 있는데 복잡한 형태가 출제되더라도 위의 방법만 잘 지키면 모두 해결할 수 있다. 또한 가장 빠른 풀이 방법은 로피탈의 정리임을 알 수 있다. 예를 들어

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x^2 - a} \int_a^{x^2} t^2 f(t)dt = \lim_{x \to a} \frac{x^4 f(x^2) \times 2x}{2x} = \lim_{x \to a} x^4 f(x^2) = a^4 f(a^2)$$

이 됨을 알 수 있다.

1) 한완수 수학2(상)
함수의 극한 심화특강에서
세 가지 방법에 대해 자세히
배울 수 있다.

① 로피탈
② 기울기 분석
③ 식변형

의 방법이 있는데
여기서는 ①~②의 방법이
가능하다.

분석 및 해제에는 심화특강의 개념을 활용한 풀이만 있으므로 정석적인 풀이는 반드시 스스로 해봐야 한다. 정석 풀이를 아는 사람만이 심화풀이를 할 자격이 있음을 명심해라.

Actual Fight

분석 및 해제 66쪽

01. 실수 a에 대하여 집합

$$\{x|ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x\text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2010]

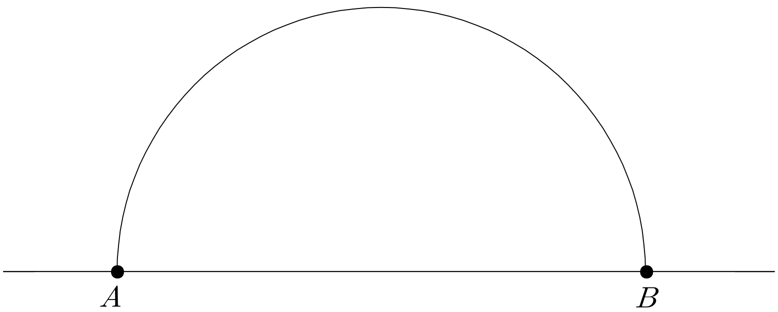
<보 기>

ㄱ. $\lim_{a\to 0} f(a)=f(0)$

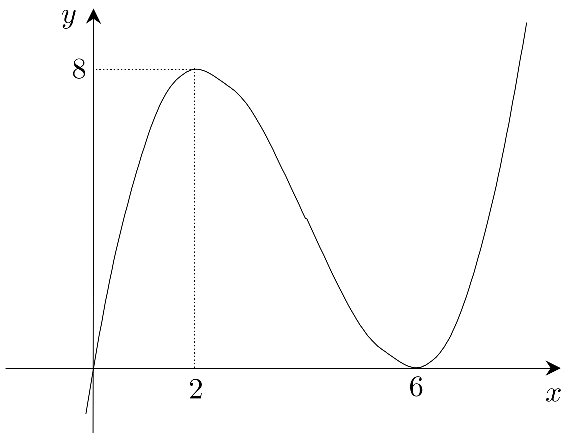
ㄴ. $\lim_{a\to c+0} f(a)\neq \lim_{a\to c-0} f(a)$인 실수 c는 2개이다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

02. 아래와 같이 반지름이 2인 반원과 직선 $\overleftrightarrow{AB}$가 있다. 양수 x에 대해 $f(x)$를 반지름의 길이가 x인 원 중에서, 반원의 호 $\overset{\frown}{AB}$ 에 접하고 동시에 직선 $\overleftrightarrow{AB}$에 접하는 원의 개수라 할 때, $f(x)=3(x-2)^2$의 실근의 개수는? (단, 양 끝점 A, B는 반원의 호에서 제외)



03. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래와 같다.



(1) 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(2) 방정식 $f(x)=f(t)$의 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(3) 방정식 $f(x)=tx$의 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

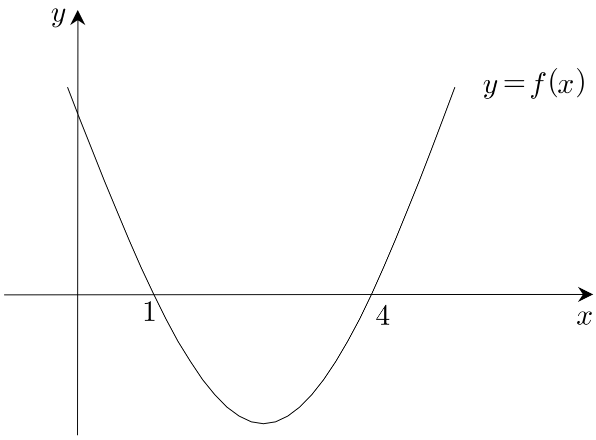
(4) 방정식 $f(x)=t(x-2)+10$의 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

04. 실수 m에 대하여 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은? [2012]

05. x에 대한 방정식 $\sqrt{(x-1)(3-x)}=mx$의 서로 다른 실근의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $y=f(m)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

06. 실수 x에 대하여 $t^2=x^3-x$를 만족시키는 실수 t의 개수를 $f(x)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프 개형을 완성하시오. [1994]

07. 아래 그림은 $y=f(x)$의 그래프이다. 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1} f(t)dt$라 할 때, $g(x)$가 최소가 되는 x의 값은? [1994]



08. 다항함수 $f(x)$가 $\int_{2}^{x} f(t)dt = x^2+ax+2$를 만족시킬 때, $f(10)$의 값을 구하시오/ [2000]

09. 다음 식을 만족하는 다항식 $f(x)$의 계수들의 합은? [2002]

$$f(f(x))=\int_{0}^{x} f(t)dt - x^2+3x+3$$

10. 두 함수 $f(x)=ax+b$와 $g(x)=e^x$가

$$f(g(x))=\int_0^x f(t)g(t)dt-xe^x+3$$

을 만족할 때, $f(2)$의 값은? [2002]

11. 함수 $f(x)$는 연속함수이고 모든 실수 x에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(x)-2\int_0^x e^t f(t)dt=1$$

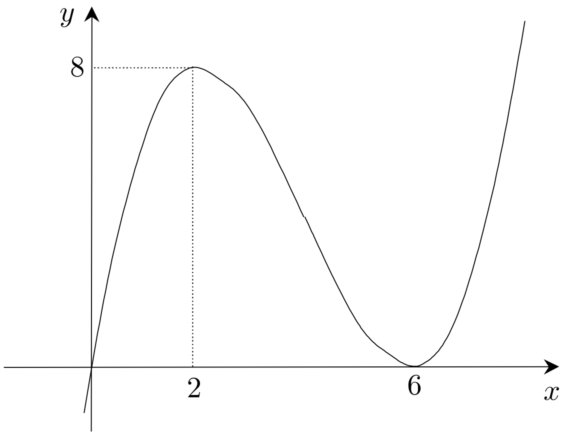
이때, $f''(0)$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이고, $f''(x)$는 $f(x)$의 이계도함수이다.) [2003]

12. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt=x^3-2ax^2+ax$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [2007]

13. 삼차함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래와 같다.



(1) $x \leqq t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $y = g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(2) $t \leqq x \leqq t+2$에서 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$라 할 때, $y = g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(3) $t-3 \leqq x \leqq t+3$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $y = g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

14. 함수 $f(x)=x(x-3)^2$과 실수 t에 대하여 $t \leqq x \leqq t+p$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=a$에서 미분 불가능하다고 한다. $g(a) \geqq 4$일 때, p의 최솟값을 구하시오.

15. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 $t(t \geqq -1)$에 대하여 $-1 \leqq x \leqq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\int_{-1}^{1} g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [2010]

16. 함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2(a>0)$과 실수 t에 대하여, $x \leqq t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a의 최댓값은? [2010.9]

17. 함수 $f(x)=\begin{cases}-1 & (x<1)\\ -x+2 & (x \geqq 1)\end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [2008.9]

<보 기>

ㄱ. $g(x)$는 구간 $(1,2)$에서 증가한다.
ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄷ. 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 존재 한다.

18. 실수전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=e^{x}-1+\int_{0}^{x}f(t)\,dt$$

를 만족할 때, <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, e 는 자연로그의 밑) [2005.10]

<보 기>

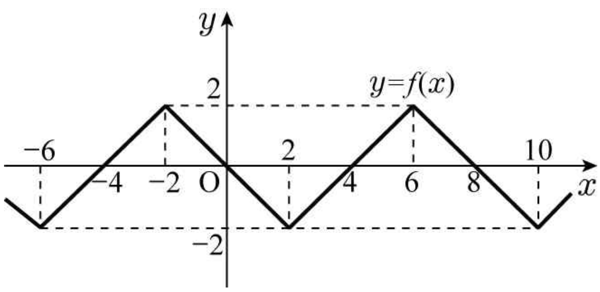
ㄱ. $f(0)=0$이다.
ㄴ. $f'(0)=0$이다.
ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>f(x)$이다.

19. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

모든 실수 x에 대하여
(가) $f(x)g(x)=x^3+3x^2-x-3$
(나) $f'(x)=1$
(다) $g(x)=2\int_1^x f(t)\,dt$

$\int_0^3 3g(x)\,dx$의 값을 구하시오. [2008.10]

20. 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부가 그림과 같다.



실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$를 $g(x)=\int_x^{x+2} f(t)\,dt$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2010.10]

〈보 기〉

ㄱ. $g(-1)=0$
ㄴ. 함수 $g(x)$는 개구간 $(-2,\ 2)$에서 감소한다.
ㄷ. $-4 \leqq x \leqq 6$에서 방정식 $g(x)=2$의 모든 실근의 합은 4이다.

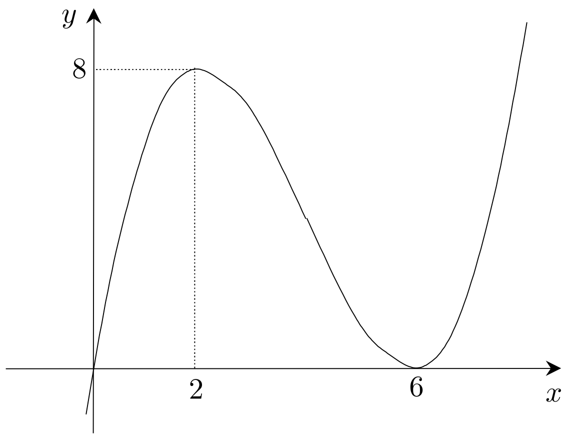
21. x에 대한 방정식 $\int_0^x |t-1|dt = x$의 양수인 실근이 $m+n\sqrt{2}$일 때, m^3+n^3의 값을 구하시오. (단, m, n은 유리수이다.) [2011.4]

22. 곡선 $y=6x^2+1$과 x축 및 두 직선 $x=1-h$, $x=1+h(h>0)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(h)$라 할 때, $\lim_{h\to+0}\frac{S(h)}{h}$의 값을 구하시오. [2008]

23. $f(x)=2x(2-x)$일 때, $t \leqq x \leqq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 한다. $\int_{-1}^{2} g(t)dt$의 값을 구하시오.

24. $f(x)=2x(2-x)$일 때, $t \leqq x \leqq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차를 $g(t)$라 한다. $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} g(t)dt$의 값을 구하시오.

25. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래와 같다.



(1) 함수 $|f(x)-t|$이 미분불가능이 되는 x의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(2) 함수 $|f(x)-f(t)|$이 미분불가능이 되는 x의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(3) 함수 $|f(x)-tx|$이 미분불가능이 되는 x의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(4) 함수 $|f(x)-\{t(x-2)+10\}|$이 미분불가능이 되는 x의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

26. 삼차함수 $f(x)=\dfrac{1}{4}x(x-6)^2$에 대하여 함수 $p(x)=\left|f(x)-\left\{\left(\dfrac{f(t)-10}{t-2}\right)(x-2)+10\right\}\right|$이 미분불가능이 되는 x의 개수를 $g(t)$라 하자. $y=g(t)\,(t\neq 2)$에 대한 설명 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g(1)=\lim\limits_{t\to 1}g(t)$

ㄴ. $g(4)=\lim\limits_{t\to 4}g(t)$

ㄷ. $a<t$에서 $g(t)$가 연속함수라 할 때, a의 최솟값은 10이다.

27. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. [2009.6]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $\lvert f(x)-f(1)\rvert$은 오직 $x=a\,(a>2)$에서만 <u>미분가능하지 않다.</u>

28. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$S=\{a\mid$ 함수 $\lvert f(x)-t\rvert$가 $x=a$에서 <u>미분가능하지 않다.</u> $\}$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [2011]

29. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

가. 직선 $g(x)=x+10$과 $x=0$, $x=6$에서 접한다.
나. 함수 $h(x)=\lvert f(x)-g(x)-g(0)\rvert$는 $x=a$, $x=b$ $(a<0,\ b>6)$를 제외한 모든 구간에서 미분가능하다.

두 조건을 만족할 때, 최고차항 계수의 최댓값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이며, $a<0$, $b>6$)

30. 최고차항의 계수가 1인 함수 $f(x)$는 $(x-3)^2(x+3)^2$으로 나누어 떨어지고 그 때의 몫은 이차식인 $P(x)$이다. 함수 $y=|f(x)|$가 모든 실수에서 미분가능 하다고 할 때, $g(x)=|f(x)+a|$에 대하여 함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능하기 위한 양의 실수 a의 최솟값을 구하시오. (단, 방정식 $P(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.)

31. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\left|\int_0^x f(x)dx\right|$이 아래의 조건들을 만족시킨다.

가. $0<a<b$인 두 상수 a, b에 대하여 $f(a)=f(b)=0$이고, $\int_0^b f(x)dx \leqq 0$이다.
나. 함수 $y=g(x)$은 $x=1$에서 극댓값을 갖는다.
다. 함수 $y=g(x)$은 $x=0$이 아닌 모든 점에서 미분가능하다.

이 때, $\dfrac{g'(5)}{g(1)}$의 값을 구하시오.

32. 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-f(t)|\text{가 } x=a\text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=0$, $t=p$, $t=4$에서만 불연속일 때, $\dfrac{f'(6)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. (단, $0<p<3$)

이 특강의 목표

1. 새로운 함수가 나왔을 때, 정의역을 하나씩 대입해가며 추론할 수 있다.
2. 정적분으로 정의된 함수를 근본적으로 이해할 수 있다.

저자의 특강 *Tip*

수능에 새로운 함수가 자주 출제되는데
어떠한 함수가 나오더라도 정의역을 하나씩 대입해보면
그 함수를 이해하고 문제를 해결해나갈 수 있음을 명심해.

빠른 정답

심화특강06 정답					
01	ㄴ,ㄷ	13	해설 참조	25	해설 참조
02	4	14	4	26	ㄴ,ㄷ
03	해설 참조	15	17	27	12
04	$\frac{15}{4}$	16	1	28	147
05	해설 참조	17	ㄱ,ㄴ	29	91
06		18	ㄱ,ㄷ	30	729
07	2	19	27	31	6
08	17	20	ㄱ,ㄷ	32	10
09	3	21	$2+\sqrt{2}$		
10	4	22	14		
11	6	23	$\frac{14}{3}$		
12	16	24	$\frac{5}{2}$		

한권으로 완성하는 수학 검토를 마치면서...

이거, 너무 많은걸 알려주는 것 아냐?
- 난 무엇을 더 가르쳐야해?

현직 강사인 입장에서 이해원君(난만한...으로 더 많이 알려진)의 "한완수"를 본 첫 느낌이 이랬습니다. 그만큼, 대한민국 입시에서 필요한 거의 모든 것이 담겨져 있더군요.
더욱 놀라운 것은, 그것이 단지 이론적인 이야기들로 끝나지 않고, 저자의 오랜 경험으로 다져진 내공에서부터 나온 "모든 것은 교과서의 증명에서부터 시작한다"는 기본원칙에서부터 시작하여, 연습할 수 있는 문제들까지 포함하기에 더욱 읽는이로 하여금 깜짝 놀라게 하는 부분들이 많이 있었습니다.

해원君의 교재는 작년의 EI부터 시작해서 한완수 수II 까지는 직접 구매해서 보았고, 이번 기하와 벡터는 검토를 일부분 맡아서 보았지만, 항상 교과서에 있는 "기본"을 강조하는 부분이 최대 강점이라고 봅니다. 물론, 일반적인 학생들은 교과서를 보면서 이런식으로 까지 심화시켜 나아가고, 이런식으로 까지 문제풀이의 속도를 올리는 다양한 생각들을 하지 못합니다.
그것은 현장에서 학생들을 직접 가르치고 있는 제가 항상 느끼는 부분이지요. 그래서 저의 생각은 "이런 부분을 보완해 줄 수 있는 것, 교과서를 좀 더 제대로 보게끔 도와주는"것이 강사의 할 일이라고 생각했고, 그렇게 지금까지 강의해 왔습니다.

그런데 한완수는, 그러한 일을 출판교재로 하고 있습니다. 시중의 기본서인 정석이나 바이블, 개념원리가 하지 못하고 있고 쎈이나 자이스토리도 하지 못하는 일을 하고 있는 것이지요.
그것도 현존하는 출판물 중에서 거의 가장 디테일한 방법으로 설명해 줍니다. 이처럼 교과서 내용을 "자세히 풀어서 해석"한 책은 아직까진 없는 것 같습니다. (일반화도 합니다!)

세상 모든 일이 대충 보면 그 실상을 잘 알수 없듯이, 이 책도 대충 보면 "스피드"만을 추구하는 어떤 "꼼수들의 집합"과도 같다고 대충(!!) 평가받을 지도 모릅니다. 하지만 책을 천천히, 교재에서 시키는 대로 하나씩 하나씩 해 나가는 사람들에게는 분명 교과서의 개념을 아주 자세히, 그리고 심화시켜 설명하고 있다는 것을 알 수 있을 것이고, 이를 자신의 것으로 체화시킨 사람들에게 "스피드"는 덤으로 따라온다는 걸 알게 해줄 것이라고 확신합니다.

늦었다고 생각할 때가 제일 늦었다는 말이 있습니다. 하지만, 수학은 늦었다고 해서 어떤 꼼수가 잘 안 통하는 과목이지요. 늦었다고 생각하시는 분들이라도 "한완수"를 보시면 머리가 조금 많이 트이는 경험을 할 수 있을 거라고 봅니다. 저는 이 책의 구매를 고민하는 분들에게 주저하지 않고 이렇게 말할 수 있습니다.

"우선 사라. 그리고 증명하고 체화해라. 그러면 반드시 성공이다"

아직 저자는 학생인 관계로 "손"만 나오는 무료 동영상으로 학생들과 만나고 있는데요, 수년 내로 인터넷 강의도 찍지 않을까요? 출판교재가 아닌, 직접 영상으로 학생들과 만나는 난만한씨를 상상해 보는 것도 꽤 기대가 됩니다.

메가스터디 재수정규반 출강 강사 박주혁