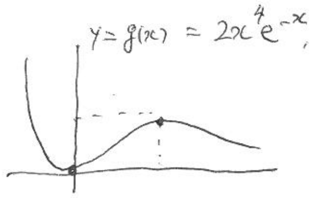
* 2019 학년도 평가원 9월 수학 가형 30번.

$f(x)=\frac{1}{2}x^4+\cdots$, $f(x)$의 최솟값은 0,

$g(x)=2x^4e^{-x}$, $h(x)=f\circ g(x)$



$g'(x)=(8x^3-2x^4)e^{-x}$

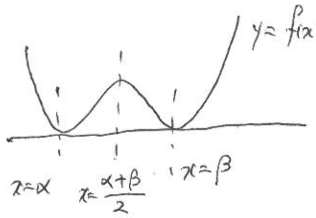
$=2x^3(4-x)e^{-x}$

(가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4.

$f(\triangle)=0$ 을 만족시키는 $\triangle$가 1개 뿐이면 불가 ($\because$ $g(x)=\triangle$를 만족시키는 서로 다른 x는 최대 3개)

$\therefore$ 최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 최솟값이 0이고,

조건 (가)를 만족시키려면 개형은 오른쪽과 같다.



$y\,(=g(x))$ 값에 따른 서로 다른 실근의 개수는

① 1 ($y=0$), ② 3 ($0<y<512e^{-4}$), ③ 2 ($y=512e^{-4}$), ④ 1 ($y>512e^{-4}$) 와 같다.

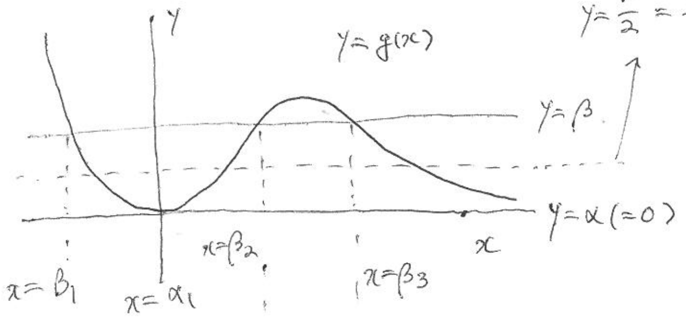
이 때, ①부터 ④를 이용하여 4개를 만드는 경우는

(i) ①+②, (ii) ②+④ 의 두가지 경우이다.

①,③은 중복불가, ②,④는 중복가능

($\because$ ③+③의 경우는 불가능)

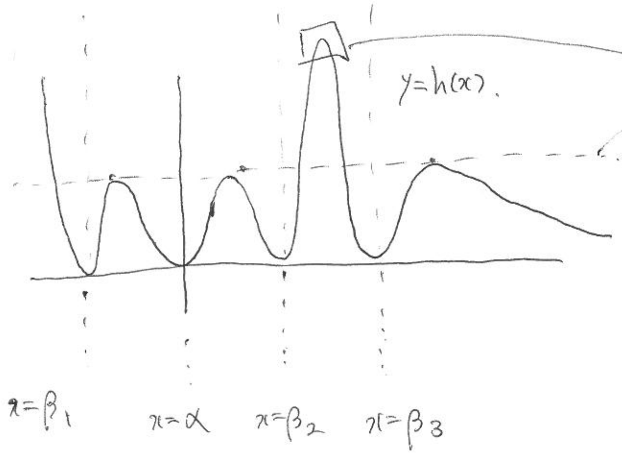
(i) $\alpha=0$, $0<\beta<512e^{-4}$



$y=\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$ ($\because \alpha=0$)

$g(\alpha_1)=g(0)=0 \rightarrow f(0)=0$ ($\because \alpha=0$)

$g(\beta_1)=g(\beta_2)=g(\beta_3)=\beta \rightarrow f(\beta)=0$



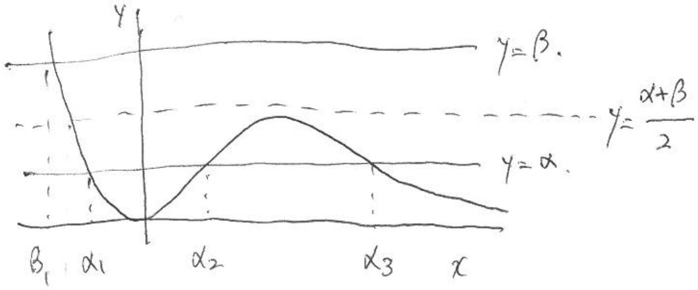
미확정 상태, 지금까지의 정보로는 점선으로 표시된 극값보다 클수도, 작을수도 ···

$y=f(x)$의 극댓값

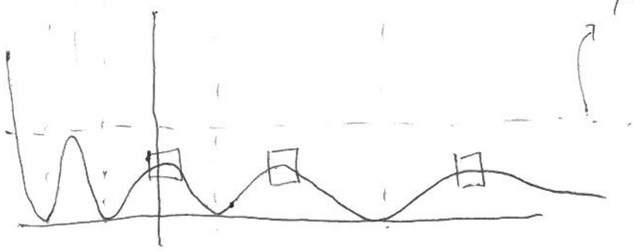
$\Rightarrow$ $g(x)$의 함숫값이 $\frac{\beta}{2}$, $\therefore$ $f(\frac{\beta}{2})$는 $f(x)$의 극댓값이 되고, $h(x)$값이 된다.

$h(\alpha)=h(0)$은 극솟값 $\rightarrow$ (나)조건 충족.

(ii) $0 < \alpha < 512e^{-4}$, $\beta > 512e^{-4}$.



→ 이 값이 $y=512e^{-4}$ 보다 클수도, 같을 수도, 작을 수도 있다. (미확정 상태)



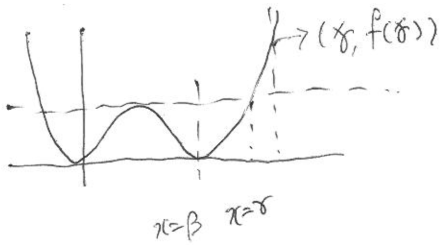
$y=f(x)$의 극댓값.

□ 부분은 미확정 상태

단, $g(0)=0$, $f(0)>0$ ($\because$ $\alpha>0$, $f(0)$은 감소 상태)

→ (나) 조건을 충족시키지 못한다.

따라서 (ii) 경우는 불가능한 경우이다. ⇒ (i) 에서 미확정상태인 $h(4)=f\circ g(4)=f(512e^{-4})$를 확인.



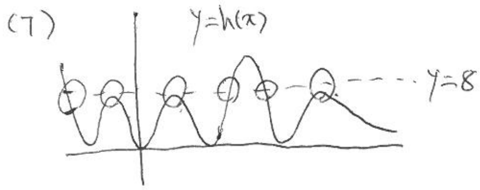
(ㄱ) $g(4)>\gamma$ → $h(4) >$ $f(x)$의 극댓값

(예를 들어서 $x=\gamma$ 인 경우)

(ㄴ) $g(4)=\gamma$, (ㄷ) $g(4)<\gamma$.

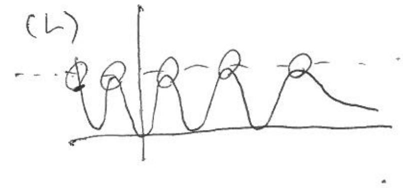
$g(4)=512e^{-4}$.

(ㄱ)



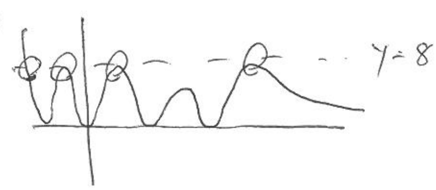
O (=서로 다른 실근) 6개.

(ㄴ)



O 5개.

(ㄷ)



O 4개.

따라서 (ㄱ) 에서 조건 충족. $\therefore f(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=\frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$. $f(\frac{\beta}{2})=8$ (극댓값)

$\frac{1}{2}\times\frac{\beta^2}{4}\times\frac{\beta^2}{4}=\frac{\beta^4}{32}=8$. $\therefore \beta^4=2^8$. $\therefore \beta=4$ ($\because$ $\beta>\alpha$ $(\alpha=0)$).

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$.

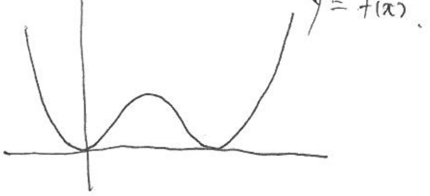
$f'(x)=x(x-4)^2+x^2(x-4)$

$\therefore f'(5)=5+25=30$ //

$h(x) = f \circ g(x)$. ∴ $x \to g(x) \to f(x) \to h(x)$.

$g(x)$ 함수는 주로 변수값을 생각하고, $f(x)$ 함수는 개형을 생각해서 $h(x)$ 개형을 추론한다.

(A)

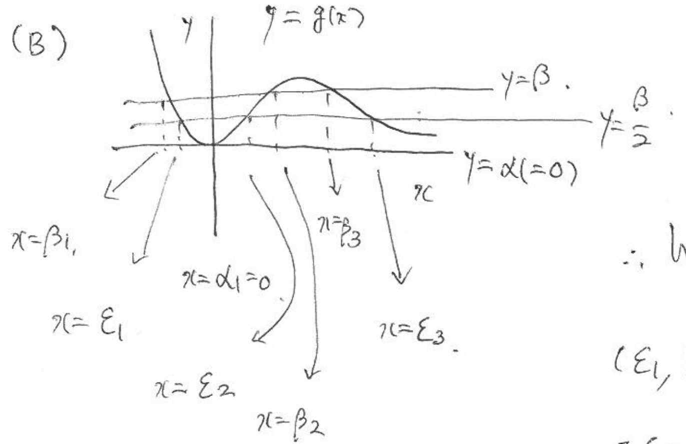


$g(\alpha_1) = g(0) = 0$. $f(0) = 0$.

↗ $g(\beta_1) = g(\beta_2) = g(\beta_3) = \beta$. $f(\beta) = 0$. (극솟값).

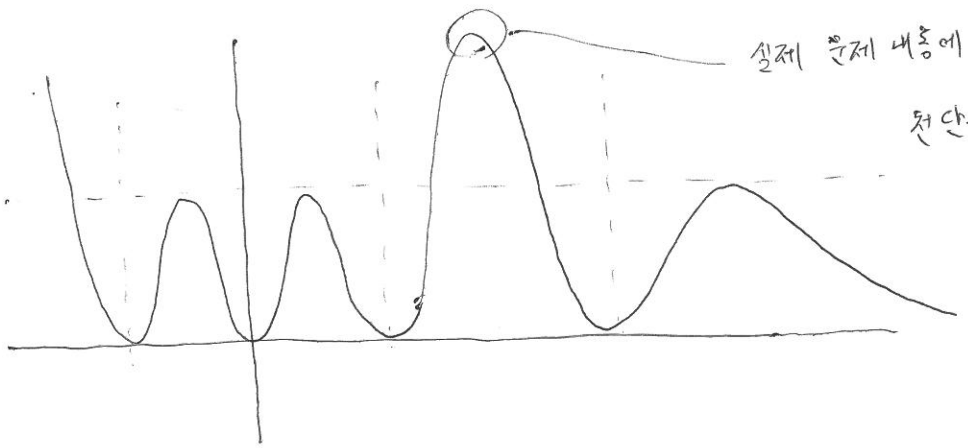
$g(\varepsilon_1) = g(\varepsilon_2) = g(\varepsilon_3) = \frac{\beta}{2}$. $f(\frac{\beta}{2}) = k$ (극댓값).

(B)



∴ $h(x)$는 $(0, 0)$, $(\beta_1, 0)$ $(\beta_2, 0)$, $(\beta_3, 0)$ (ε_1, k), (ε_2, k), (ε_3, k) 등을 지나고 각각의 점들은 $h(x)$에서 극점이 된다. (이외의 극점 존재함)

이와 같이 중간 기준점을 잡고 그래프를 도출하는 것이 편한 경우가 많다.



실제 문제 내용에 맞춰 계산해보면 천 단위의 값이 나온다.

x값 변화시키면서 나오는 $g(x)$값에 맞춰서 $f(x)$값을 구한 뒤에 나타내는 방법도 생각해 볼 것. (ex: $x < \beta_1$ 이면 $g(x) > \beta$, $f(x)$에서는 두번째 극솟값의 오른쪽 증가하는 부분인데, $x \uparrow \to g(x) \downarrow \to f(x) \downarrow$. 즉, $h(x)$에서 $x < \beta_1$ 부분에서는 x값이 커지면 $f(x)$에서 오른쪽에서 왼쪽으로 ($f(x)$에서는 $x > \beta$) 가는 부분을 대칭시키는 형태이다.

* V2 - 합성함수의 그래프를 직접 그리지 않는 경우.

(i) $\alpha=0,\quad 0<\beta<512e^{-4}$.

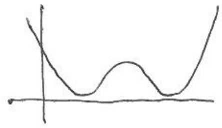
$\lim_{x\to0+} f\circ g(x) \to \downarrow \quad \therefore \lim_{x\to0+} f(0+) \to \downarrow.$

$\lim_{x\to0-} f\circ g(x) \to \downarrow \quad \therefore \lim_{x\to0-} f(0+) \to \downarrow.$

$x=0$의 좌우에서 모두 $x\to0$ 상태에서 감소한다. ⇒ 극소 OK.

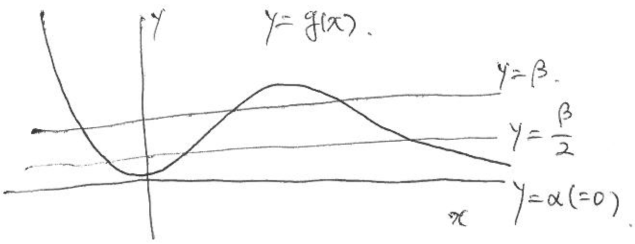
(ii) $0<\alpha<512e^{-4},\quad \beta>512e^{-4}$.

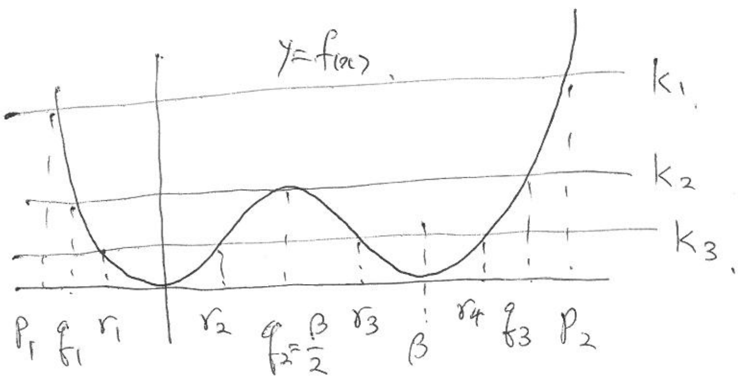
$\lim_{x\to0+} f\circ g(x) = \lim_{x\to0+} f(0+) \to \uparrow$ → $\lim_{x\to0-}$ 살펴보지 않아도 극소 불가능.



→ 이런 $f(x)$에서 $\lim_{x\to0+}$ 상황이면 값이 커진다.

$\therefore \alpha=0,\quad 0<\beta<512e^{-4}$.





(i-1) $k_1=8$ ($p_1<0,\ p_2>0$) → 3개뿐.

(i-2) $k_2=8$ ($q_1<0,\ q_2=\frac{\beta}{2}>0,\ q_3>\beta$) → q_2, q_3에서 각각 3개씩이면 가능.

→ 즉, $y=g(x)$ 그래프에서 q_2는 3개, q_3는 $\beta<q_3<512e^{-4}$ 이면 3개.

(i-3) $k_3=8$ ($r_1<0,\ 0<r_2<\frac{\beta}{2},\ \frac{\beta}{2}<r_3<\beta,\ r_4>\beta$)

→ r_2, r_3에서 각각 3개, r_4에서 1개 이상.

∴ (다) 조건을 만족시키는 경우는 (i-2) 경우이고 $f(x)$의 극댓값 $f(\frac{\beta}{2})=8$이다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$

$f'(x)=x(x-4)^2+x^2(x-4)$

$\therefore f'(5)=5+25=30$