* 2020학년도 평가원 9월 수학 가형 30번.

$f'(x^2+x+1) = \pi f(1)\sin\pi x + f(3)x + 5x^2$ → $f(x)$가 없으므로 미분하지 말고 적분해 보라는 소리.

$x=0$. $f'(1)=0$.

$x=1$. $f'(3)=f(3)+5$

$x=2$. $f'(7)=2f(3)+20$.

$x=-1$. $f'(1)=-f(3)+5$.

$\therefore f'(1)=0,\ f'(3)=10,\ f(3)=5$.

(조건에서 모든 실수에 대하여 ⇒ 항등식)

$f'(x^2+x+1)$에서 $f(x^2+x+1)$을 유추할려면 조건식의 양변에 $(2x+1)$을 곱한다.

$\therefore (2x+1)f'(x^2+x+1) = (2x+1)\{\pi f(1)\sin\pi x + 5x + 5x^2\}$

$f(x^2+x+1) = \int 2\pi f(1) x\sin\pi x\,dx + \int \{10x^2+10x^3+\pi f(1)\sin\pi x + 5x + 5x^2\}\,dx$ ⋯ ①

$\int x\sin\pi x\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos\pi x \times x + \int \frac{1}{\pi}\cos\pi x\,dx = \frac{-x\cos\pi x}{\pi} + \frac{\sin\pi x}{\pi^2}$

$\therefore f(x^2+x+1) = -2f(1)x\cos\pi x + \frac{2f(1)\sin\pi x}{\pi} + \frac{5}{2}x^4 + 5x^3 + \frac{5}{2}x^2 - f(1)\cos\pi x + C$ ⋯ ②

$x=0$. $f(1) = -f(1) + C$. $\therefore$ 적분상수 $C = 2f(1)$.

$x=1$. $f(3) = 5 = 2f(1) + \frac{5}{2} + 5 + \frac{5}{2} + f(1) + 2f(1) = 5f(1) + 10$. $\therefore f(1) = -1$.

$x=2$. $f(7) = -4f(1) + 40 + 40 + 10 - f(1) + 2f(1)$

$= 90 - 3f(1) = 90 + 3 = 93$.

* 2020학년도 평가원 9월 수학 가형 29번.

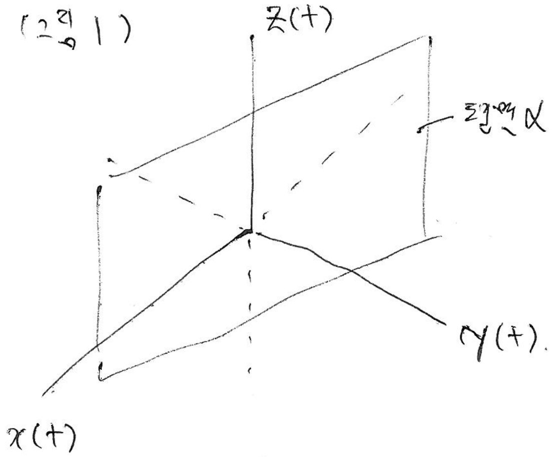
원점 O, 점 A(4, 0, 0), 평면 $x+y+\sqrt{2}z=0$ (원점을 지나는 평면) → 평면 α.

(가) $|\overrightarrow{OP}| = 1$ or 2 or 3 or $\cdots$, or 9.
(나) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP} = 6$

} 점 P는 평면 α 위에 있고, 원점과의 거리가 9 이하의 자연수이면서 평면 $x=\frac{11}{2}$ 위의 점이다.

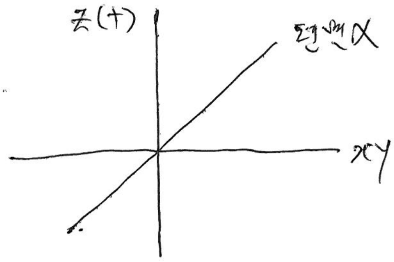
→ 점 P는 평면 α와 평면 $x=\frac{11}{2}$의 교선 위의 점.

(그림 1)



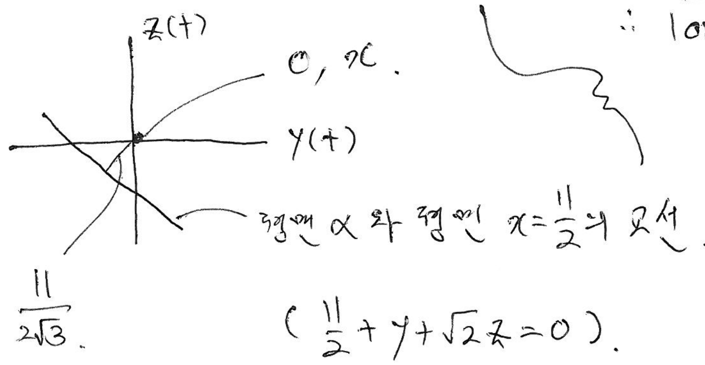
그림과 같은 각도에서 바라볼 때, x(+), y(+) z(+)는 모두 평면보다 앞 쪽에 위치한다.

(그림 2)



평면 α의 법선벡터가 $(1, 1, \sqrt{2})$이므로 xy평면과 이루는 각은 $(\sqrt{1^2+1^2}, \sqrt{2})$에서 45°가 된다.

(그림 3)



$\left(\frac{11}{2}+y+\sqrt{2}z=0\right)$.

$\therefore |\overrightarrow{OP}|$의 최솟값은 $\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2+\left(\frac{11}{2\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{11}{\sqrt{3}}$. $\left(\frac{121}{3} > 36\right)$.

$\therefore |\overrightarrow{OP}| = 7$ or 8 or 9.

점 P $\left(\frac{11}{2}, y, z\right)$라 하면 $\overrightarrow{OP} = \left(\frac{11}{2}, y, z\right)$, $\overrightarrow{AP} = \left(\frac{3}{2}, y, z\right)$. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP} = \frac{33}{4}+y^2+z^2$.

$|\overrightarrow{OP}|^2 = \frac{121}{4}+y^2+z^2 = 7^2$ or 8^2 or 9^2. → $y^2+z^2 = 7^2-\frac{121}{4}$ or $8^2-\frac{121}{4}$ or $9^2-\frac{121}{4}$.

따라서 $\frac{33}{4}+y^2+z^2$의 $\min = 7^2-\frac{121}{4}+\frac{33}{4} = 49-22 = 27$.

$\operatorname{Max} = 9^2-\frac{121}{4}+\frac{33}{4} = 81-22 = 59$.

} $M+m = 86$//

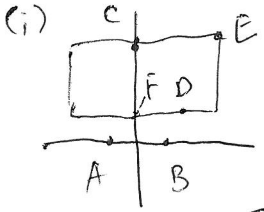
* 2020학년도 평가원 9월 수학 가형 21번.

점 A$(-2, 0)$, 점 B$(2, 0)$, 점 C$(0, 6)$, 점 D$\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 라 할 때,

두 점 A, B로부터의 거리의 합이 최대인 경우가 점 C이고, 최소인 경우가 점 D이다.

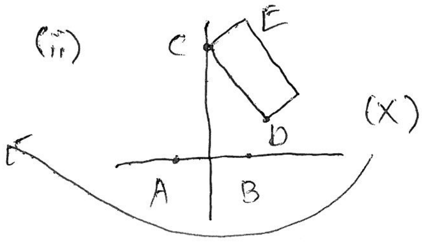
↳ 타원을 떠올릴 수 있어야 한다. 그렇지 못한 경우, 상황파악을 통해 떠올려야 한다.

(i)



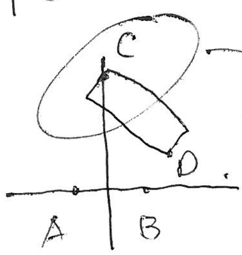
(X) $\overline{CA}+\overline{CB} < \overline{EA}+\overline{EB}$.

(ii)



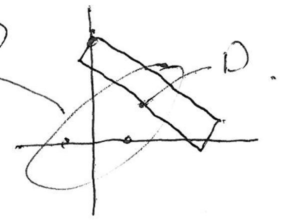
(X)

∴ (iii)



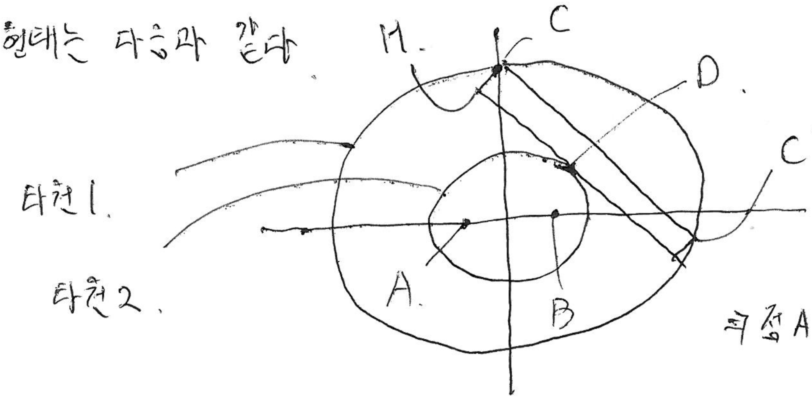
이런 경우에서 가능하다.

(iv)



(iii) (iv)에 의해 타원방정식을 이용해서 계산해야 함을 알 수 있고,

형태는 다음과 같다.



⇒ 최대인 경우는 C, C' 두 곳이고 최소인 경우는 D 하나 뿐이다.

⇒ 점 A, B는 각 타원의 초점이다.

$\overline{CA}(=\overline{CB})=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ (장축의 길이는 $4\sqrt{10}$) ∴ 타원1은 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$.

$\overline{DA}=\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$, $\overline{DB}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. ∴ 타원2는 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$.

직선 HD는 타원2 위의 점 D에서의 접선이므로

$\frac{x\,dx}{5}+\frac{y\,dy}{3}=0$ 에서 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{5}\times\frac{3}{y}=-\frac{3}{5}\times\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}=-1$.

∴ HD: $y=-\left(x-\frac{5}{2}\right)+\frac{3}{2}=-x+4$ $(x+y-4=0)$.

CC': $y=-x+6$. (∵ 같은 기울기, 점 C는 y절편)

따라서 직사각형 넓이의 최댓값은 $\overline{CH} \times \overline{CC'}$와 같다.

선분 CH의 길이는 점C와 직선 HD의 거리와 같으므로

$(0, 6)$과 $x+y-4=0$ 에서 $\frac{|6-4|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ …… ①

점C'은 타원1과 직선 CC'의 교점 중 하나이므로

$y=-x+6$과 $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{36}=1$을 연립하면 $\frac{x^2}{40}+\frac{(-x+6)^2}{36}=1$ 에서 $\frac{x^2}{40}+\frac{x^2-12x+36}{36}=1$.

$\therefore \frac{x^2}{40}+\frac{x^2-12x}{36}=0$. $\therefore 36x^2+40x^2-480x = 76x^2-480x=0$.

$\therefore x = 0$ (점C) or $\frac{480}{76} = \frac{120}{19}$ (점C').

따라서 $\overline{CC'}$은 점 $C(0,6)$와 점 $C'\left(\frac{120}{19}, -\frac{6}{19}\right)$ 사이의 거리이므로

$$\overline{CC'} = \sqrt{\left(\frac{120}{19}\right)^2 + \left(-\frac{6}{19}-\frac{114}{19}\right)^2} = \sqrt{2\times\left(\frac{120}{19}\right)^2} = \frac{120\sqrt{2}}{19}.$$

$\left(-\frac{120}{19}+6=-\frac{6}{19}\right)$

구하는 직사각형의 넓이의 최댓값인 $\overline{CH}\times\overline{CC'} = \sqrt{2}\times\frac{120\sqrt{2}}{19} = \frac{240}{19}$ //

* 2020학년도 평가원 9월 수학 나형 30번.

$f(x)=x^4+\cdots$, $f(-1), f(0), f(1), f(2) \to$ 등차수열. $-1, 0, 1, 2 \to$ 등차수열. } 하나의 직선 위에 존재

그 직선을 $l(x)=ax+b$ (1차함수가 아니고 직선이므로 $a=0$일 가능성 존재) 라 하면

$f(x)-l(x)=(x+1)x(x-1)(x-2)=x(x^2-1)(x-2)=x^4-2x^3-x^2+2x$.

$\therefore f'(x)-l'(x)=4x^3-6x^2-2x+2$.

$\begin{cases} f'(-1)=l'(-1)-4-6+2+2=a-6 \\ f'(2)=l'(2)+32-24-4+2=a+6 \end{cases}$

$\hookrightarrow \begin{cases} f(-1)=-a+b \\ f(0)=b \\ f(1)=a+b \\ f(2)=2a+b \end{cases}$

$\therefore$ $(-1, f(-1))$ 에서의 접선을 $T_1(x)$라 하면

$T_1(x)=(a-6)(x+1)+f(-1)=(a-6)x+a-6+f(-1)=(a-6)x+b-6$

$(2, f(2))$ 에서의 접선을 $T_2(x)$라 하면

$T_2(x)=(a+6)(x-2)+f(2)=(a+6)x-2a-12+2a+b=(a+6)x+b-12$.

$T_1(x)$, $T_2(x)$ 모두 $(k,0)$을 지나므로 $\begin{cases} ak-6k+b-6=0 \\ ak+6k+b-12=0 \end{cases}$ } $12k-6=0$.

$\therefore k=\frac{1}{2}$, $\therefore \frac{a}{2}+b=9$.

$f(2k)=f(1)=a+b=20$.

$\begin{cases} a+2b=18 \\ a+b=20 \end{cases}$ 에서

$b=-2$, $a=22$, $k=\frac{1}{2}$. $\therefore f(x)-l(x)=f(x)-(22x-2)$

$=(x+1)x(x-1)(x-2)$.

$\therefore f(4k)=f(2)$. $f(2)-42=0$.

$\therefore f(4k)=f(2)=42$//

* 2020학년도 평가원 9월 수학 가형 28번, 나형 29번.

$\begin{cases} \text{연 } 7 \\ \text{볼 } 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \text{여 } 3 \\ \text{남 } 2 \end{cases}$.

(구별하지 않는다)

(가) 각각의 여학생이 받는 연필의 수는 0 or 1 or 2 (나) (가)에서 0 제외 (여)

각각의 남학생이 받는 볼펜의 수는 0 or 1 or 2. (다) (가)에서 0 제외 (남).

∴ case를 (여.연1, 남.볼1), (여.연1, 남.볼2), (여.연2, 남.볼1) (여.연2, 남.볼2).

과 같이 4개로 구분 (각각은 서로 배반) 할 수 있다.

case1) (여.연1, 남.볼1) → 남는 것은 연필 4자루, 볼펜 2자루.

∴ 연필 4자루를 남학생에게, 볼펜 2자루를 여학생에게, 각각 남김없이 나누어 준다.

⇒ ${}_2H_4 \times {}_3H_2 = {}_5C_4 \times {}_4C_2 = 5 \times 6 = 30$.

주의: 여학생이 받는 연필의 개수가 1로 고정되어 있으므로 남는 연필은 모두 남학생에게 나누어 줘야 한다. and vice versa.

case2) (여.연1, 남.볼2) → 남는 것은 연필 4자루. 볼펜 0자루.

∴ ${}_2H_4 = {}_5C_4 = 5$.

case3) (여.연2. 남.볼1) → 남는 것은 연필 1자루, 볼펜 2자루.

∴ ${}_2H_1 \times {}_3H_2 = {}_2C_1 \times {}_4C_2 = 2 \times 6 = 12$.

case4) (여.연2. 남.볼2) → 남는 것은 연필 1자루, 볼펜 0자루.

∴ ${}_2H_1 = {}_2C_1 = 2$.

∴ 각각의 case의 결과값들을 더하면 $30+5+12+2 = 35+14 = 49$ //

* 2020학년도 평가원 9월 수학 나형 21번.

$f(x)=x^3+x^2+ax+b$. $f'(x)=3x^2+2x+a$.

$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)=\{(x-1)f(x)\}'$ → ∴ $(x-1)f(x)=h(x)$라 하면 $h'(x)=g(x)$.

$=x^3+x^2+ax+b+\underbrace{(x-1)(3x^2+2x+a)}_{3x^3-3x^2+2x^2-2x+ax-a}$ (ㄱ) → True.

$=4x^3+(2a-2)x+b-a$.

(ㄴ) $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $f(-1)=0$, $f'(-1)=0$.

∴ $-a+b=0$, $3-2+a=0$ 에서 $a=-1$, $b=-1$. $g(x)=4x^3-4x$

∴ $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\{4x^3-4x\}dx=\left[x^4-2x^2\right]_0^1=1-2=-1$ (ㄴ) → True.

(ㄷ) $f(0)=0$ 이면 $b=0$. $f(x)=x^3+x^2+ax=x(x^2+x+a)$. $g(x)=4x^3+(2a-2)x-a$.

∴ $g(0)=-a$, $g(1)=4+2a-2-a=2+a$. ∴ $(-a)\times(a+2)\leq 0$ 이면 True.

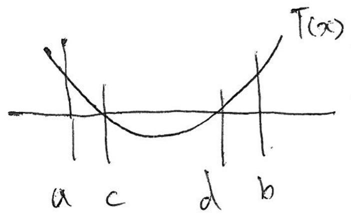
but 주어진 정보형태로는 판단불가. (틀리다가 아니고 판단불가임) ∴ 형태, 접근방법 변경 필수.

$f(x)$, $g(x)$, $(x-1)f(x)$ $(=h(x))$ 모두 다항함수이므로 $[0,1]$에서 연속, $(0,1)$에서 미분가능하다. ∴ $h(0)=0$, $h(1)=0$ 이고 $\dfrac{h(1)-h(0)}{1-0}=h'(c)=0$을 만족하는 c가 $(0,1)$ 사이에 존재한다. (평균값 정리, 롤의 정리) ∴ $h'(x)=g(x)$는 $(0,1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

---

* 사잇값 정리로 접근할 때, 선수 이해 (미리 인지하고 있어야 할 부분내용).

$[0,1]$에서 성립하면 $[0,2]$에서는? → 성립.



$T(a)>0$, $T(b)>0$ → (a,b)에서 적어도 하나의 실근?

c, d가 근인 것을 안다면 성립 → 적어도 두 개의 실근.

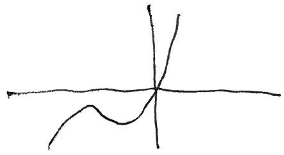
c, d가 " 모른다면 꼭짓점의 좌표 확인.

- - - - - - - - - - - -

$f(x)=x^3+x^2+ax$ (∵ $f(0)=0$), $f'(x)=3x^2+2x+a$, $D(f'(x))\geq 1$ ⇒ 극대, 극소 모두 존재.

$f(x)=0$의 해집합을 $X=\{\alpha, \beta, 0\}$이라 하면 $X=\{\alpha, -\alpha-1, 0\}$ (∵ 근과 계수와의 관계).

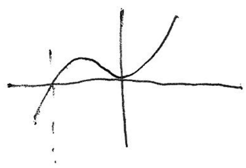
(A) α가 허근. $\alpha=-\frac{1}{2}+pi$, $\beta=-\alpha-1=-\frac{1}{2}-pi$, 0. (단, p는 임의의 실수).



$\left.\begin{array}{l} f'(0)>0 \\ f(1)>0 \end{array}\right\}$ ∴ $g(0)\times g(1)=-f'(0)\times f(1)<0$.

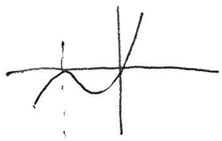
(B) α가 실근. (각각의 α 경계값 찾는 과정은 생략)

(B-1) $\alpha=-1$ or $\alpha=0$



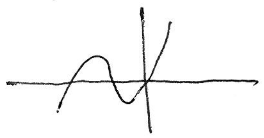
$\left.\begin{array}{l} f'(0)=0 \\ f(1)>0 \end{array}\right\}$ $-f'(0)\times f(1)=0$ 성립.

(B-2) $\alpha=-\frac{1}{2}$.



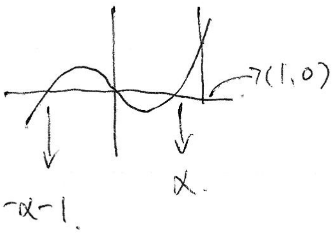
$\left.\begin{array}{l} f'(0)>0 \\ f(1)>0 \end{array}\right\}$ $-f'(0)\times f(1)<0$ 성립.

(B-3) $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$ or $-\frac{1}{2}<\alpha<0$.



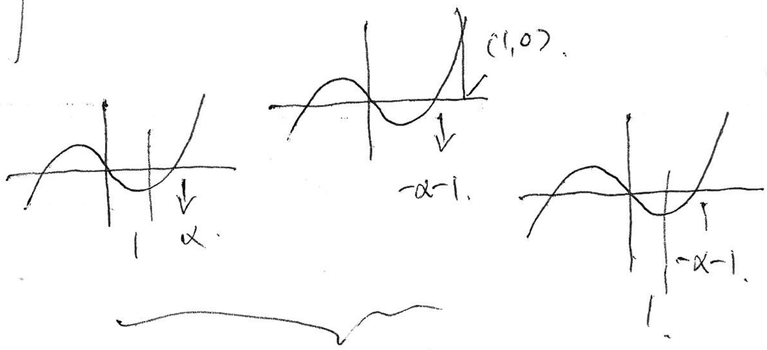
$\left.\begin{array}{l} f'(0)>0 \\ f(1)>0 \end{array}\right\}$ 성립.

(B-4) $\alpha<-1$ or $\alpha>0$.



$\left.\begin{array}{l} f'(0)<0 \\ f(1)>0 \\ f(\frac{\alpha}{2})<0 \end{array}\right\}$ ∴ $(0, \frac{\alpha}{2})$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

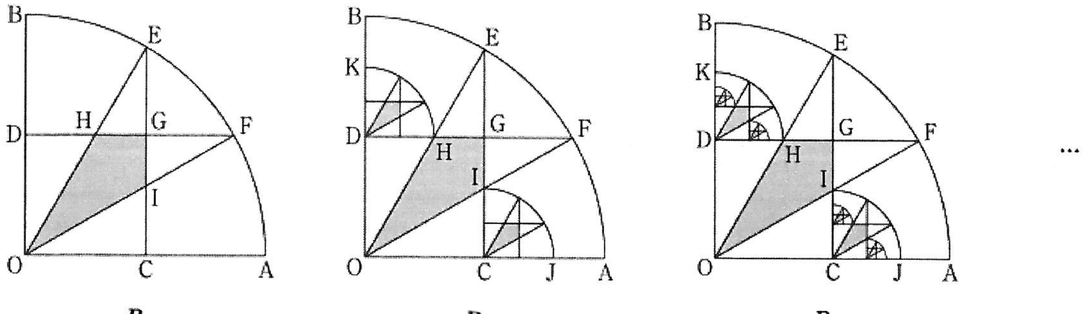
$(0, \frac{\alpha}{2})\in(0, 1)$ 이므로 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다 → 성립.



모두 성립.

* 시험장에서는 평균값 정리를 활용해서 해결해야 한다. 교육과정上 중요 내용이고, 시험문제에 자주 출제되는 방식이다. 단, 기출회독할 때에는 이와 같이 사잇값 정리도 사용가능하다는 점은 확인해 둬야 한다.

* 2020학년도 평가원 9월 수학 나형 18번.



R_1 R_2 R_3 …

① n ; $1 \to 2$. $\therefore n=2$.

② $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OE}=\overline{OF}=2$, $\overline{OD}=\overline{OC}=\overline{CG}=\overline{DG}=1$.

직선 OE 를 $y=\sqrt{3}x$ 로 놓으면 점H와 점I는 다음과 같다. $H(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$, $I(1, \frac{1}{\sqrt{3}})$

$\therefore \overline{DH} = \overline{CG} - \overline{HG} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\therefore \overline{HG} = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

lr : $2 \to \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\therefore lr = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, $Sr=\frac{1}{12}$.

③ □OIGH

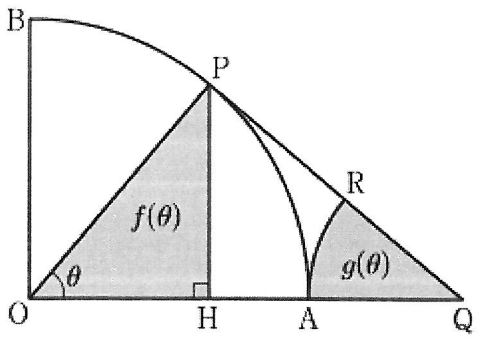
$= \triangle OCE - \triangle HGE - \triangle OCI$

$= \frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3} - \frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{\sqrt{3}})\times(\sqrt{3}-1) - \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{3-4+2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{12}\times 2} = \frac{-6+6\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{18-6\sqrt{3}}{15} = \frac{6-2\sqrt{3}}{5}$ //

* 2020학년도 평가원 9월 수학 가형 20번.



$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right) \to \sin\theta \neq 0,\ \cos\theta \neq 0.$

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OP} = 1$, 점 $P(\cos\theta, \sin\theta)$

$\therefore f(\theta)$ (분모) $= \frac{1}{2} \times \cos\theta \times \sin\theta$

직선 OP와 직선 PQ는 수직. $\therefore \overrightarrow{PQ} = (\sin\theta, -\cos\theta)$ or $(-\sin\theta, \cos\theta)$

$\therefore$ 직선 PQ : $y = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(x - \cos\theta) + \sin\theta = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{1}{\sin\theta}$. $\therefore$ 점 $Q\left(\frac{1}{\cos\theta}, 0\right)$.

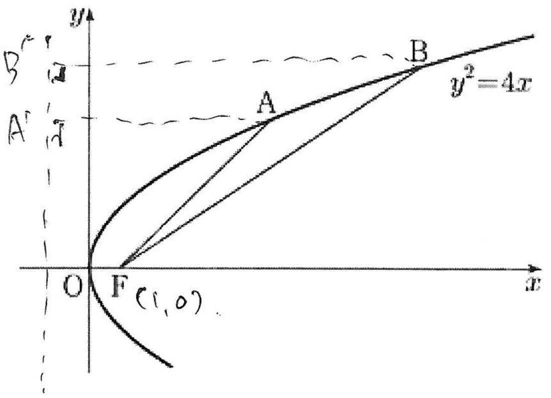
$\angle RQA = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\overline{QA} = \frac{1}{\cos\theta} - 1$, $\therefore g(\theta)$ (분자) $= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta \times f(\theta)} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \times \left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)}{\theta \times \frac{1}{2} \times \cos\theta \times \sin\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{\theta \times \frac{1}{2} \times \cos\theta \times \sin\theta} \times \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta \times (1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \left\{ \frac{\sin^2\theta}{\theta \times \sin\theta} \times \frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{\frac{1}{2} \times \cos^2\theta \times (1+\cos\theta)} \right\} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{1}{2} \times 1 \times 2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} //$$

* 2020학년도 평가원 9월 수학 가형 27번.



F(1,0)

A(a, $2\sqrt{a}$)

B(b, $2\sqrt{b}$)

a, b는 자연수. $(a \neq b)$.

준선 l : $x=-1$.

$\overline{AF}=\overline{AA'}$, $\overline{BF}=\overline{BB'}$.

l : $x=-1$. $\therefore \overline{AF}\times\overline{BF}=\overline{AA'}\times\overline{BB'}=(a+1)(b+1)=ab+a+b+1$

또한 삼각형 AFB의 무게중심의 x좌표는 $\dfrac{1+a+b}{3}=6$. $\therefore a+b=17$.

$\therefore$ $ab+a+b+1$의 최댓값은 $ab+18$의 최댓값과 같다.

a, b는 자연수 (>0), $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ $\therefore ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{4}=\dfrac{17^2}{4}=\dfrac{340-51}{4}$

$=\dfrac{289}{4}=72.xxx$.

$\therefore$ $ab=72$일 때 최댓값 $72+18=90$을 갖는다.

그러나 산술기하 평균에서의 계산은 a, b가 양수이고, $a=b=\sqrt{72}$일 때의 계산.

그러므로 $a+b=17$, $ab=72$를 만족시키는 자연수는 $t^2-17t+72=0$에서

$a=8$, $b=9$가 나온다. 즉, 최댓값은 90이다.

문제에서 그림이 주어지지 않았다면 $a=9$, $b=8$도 가능하지만,

그림 내용상 $a=9$, $b=8$은 불가능하다.

* 2020 학년도 평가원 9월 수학 가형 17번.

$f(x)$, $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 도함수 연속.

(가) $f(x)\cdot g(x) = x^4-1$

(나) $\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 g'(x)\,dx = 120$

$\therefore \left[g(x)\cdot\{f(x)\}^2\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} g(x)\cdot 2f(x)\cdot f'(x)\,dx = 120$.

$= \left[(x^4-1)f(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2f'(x)\times(x^4-1)\,dx = -2\int_{-1}^{1} f'(x)(x^4-1)\,dx = 120$.

$\therefore \int_{-1}^{1} f'(x)\cdot(x^4-1)\,dx = \left[(x^4-1)\cdot f(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 4x^3 f(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} 4x^3 f(x)\,dx = -60$.

$\therefore \int_{-1}^{1} x^3 f(x)\,dx = 15$ //

* $g(x) = \dfrac{x^4-1}{f(x)}$ (단, $-1<x<1$) 이므로 $g'(x) = \dfrac{4x^3 f(x) - (x^4-1)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

$\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 g'(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \{4x^3 f(x) - (x^4-1)f'(x)\}\,dx$

$= \int_{-1}^{1} 4x^3 f(x)\,dx - \int_{-1}^{1} (x^4-1)f'(x)\,dx$

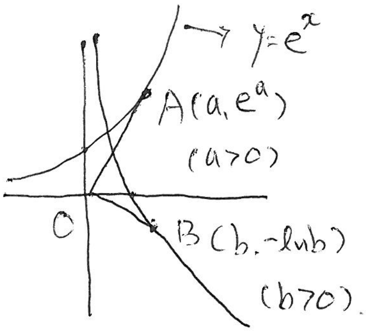
$= \int_{-1}^{1} 4x^3 f(x)\,dx - \left\{\left[(x^4-1)f(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 4x^3 f(x)\,dx\right\}$

$= 8\times\int_{-1}^{1} x^3 f(x)\,dx = 120$.

$\therefore \int_{-1}^{1} x^3 f(x)\,dx = 15$ //

$f(x)$로 나눌 때에는 $x \neq -1$, $x \neq 1$ 조건을 첨부하여야 한다.

* 2020학년도 평가원 9월 수학 가형 15번.



$\vec{OA}\cdot\vec{OB}=0$. $\therefore ab-e^a\cdot\ln b=0$ ······ ①

$\overline{OA}=\sqrt{a^2+e^{2a}}$

$\overline{OB}=\sqrt{b^2+(\ln b)^2}$

$\overline{OA}=2\overline{OB}$ 이므로

$a^2+e^{2a}=4b^2+4(\ln b)^2$ ······ ②

이 때, $\overline{OA}$ 기울기 $\dfrac{e^a}{a}=?$

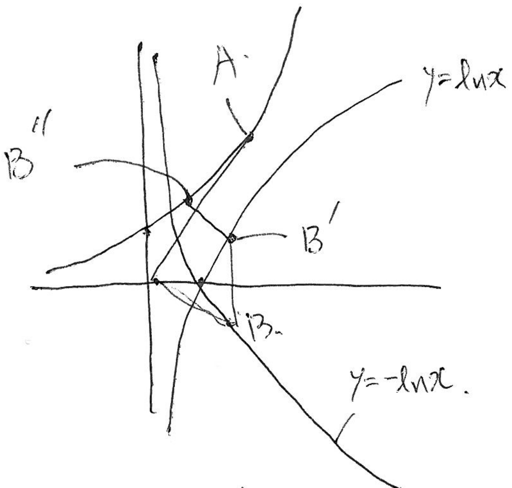
① 에서 $ab=e^a\cdot\ln b$. $\therefore \ln b=\dfrac{ab}{e^a}$. ·········· ③

② 에서 $a^2+e^{2a}=4b^2+4(\ln b)^2=4b^2+4\times\dfrac{a^2b^2}{e^{2a}}=4b^2\times\left(\dfrac{e^{2a}+a^2}{e^{2a}}\right)$

$\therefore \dfrac{4b^2}{e^{2a}}=1$. $\therefore e^a=2b$ ($\because e^a>0$) ······ ④

$\rightarrow$ $a=\ln 2b=\ln 2+\ln b$, $b=\dfrac{e^a}{2}$, $\ln b=\dfrac{a}{2}$.

결국 단순 계산으로는 풀리지 않는다. 결국 지수함수와 로그함수의 대칭성을 생각하자.



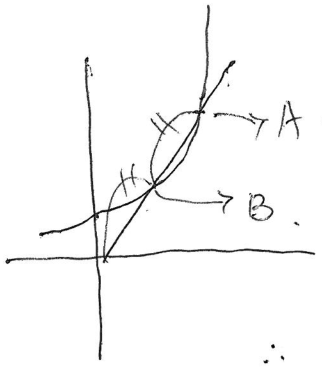
$B'(b, \ln b)$, $B''(\ln b, b)$.

$\therefore B''\left(\dfrac{a}{2}, b\right)=B''\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{e^a}{2}\right)$.

점 B''은 곡선 $y=e^x$ 위의 점 ($\because$ 대칭) 이면서

선분 OA의 중점이다.

$\therefore$



$\therefore e^{\frac{a}{2}}=b$. $\therefore e^a=b^2$

$\therefore$ ④ 에서 $b^2=2b$. $\therefore b=2$. $a=2\ln 2$.

$\therefore \dfrac{e^a}{a}=\dfrac{4}{2\ln 2}=\dfrac{2}{\ln 2}$ //

* 2020 학년도 평가원 9월 수학 가형 18번, 나형 20번.

빨6, 파3, 노3 → 1개 확인

$$\left\{\begin{array}{l} 빨 \to (\bar{3},\bar{1},\bar{1}) \\ 파 \to (\bar{2},\bar{6},\bar{2}) \\ 노 \to (\bar{2},\bar{2},\bar{6}) \end{array}\right\}$$

24점 이상인 사람이 나오면 시행종료.

($(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$는 점수, (a,b,c)는 공의 개수).

* 예를 들어 파란공이 4개 있다면, 파란공 4번 나오면 B가 24점이므로 시행종료라는 말임. 가장 빨리 시행이 종료되려면 6점과 2점을 사용해서 파란공 3개, 노란공 3개의 세트를 만들면 공 6개 꺼냈을 때 종료된다.

* A가 24점 이상이 되는 경우를 보면 (당연히 시행종료)

(i) A가 24점이 되려면 $(6,3,0)$, $(6,2,1)$, $(6,1,2)$, $(6,0,3)$

(ii) A가 25점이 되려면 $(5,3,2)$, $(5,2,3)$

(iii) A가 26점이 되려면 (A가 24점 미만에서 26점이 되는 상황) $(6,2,2)$

→ 이 경우 $(5,2,2)$를 거쳐서 $(6,2,2)$이 되어야 한다. 그 외의 경우는

즉, $(6,1,2)$나 $(6,2,1)$에서 $(6,2,2)$이 되는 경우는 없다.

($\because$ $(6,1,2)$, $(6,2,1)$이 되면 시행이 종료된다).

* A만 24점 이상이 되는 경우는 $(6,1,2)$, $(6,2,1)$, $(6,2,2)$ 세 가지이고,

$(6,1,2)$나 $(6,2,1)$은 직전상황에서 제약이 없으나, $(6,2,2)$의 경우에는

반드시 직전상황이 $(5,2,2)$이어야 한다.

$\therefore$ $(6,1,2)$ or $(6,2,1)$의 경우 $\dfrac{{}_6C_6 \times {}_3C_2 \times {}_3C_1}{{}_{12}C_9} = \dfrac{1\times3\times3}{\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2}} = \dfrac{9}{220}$

$(6,2,2)$의 경우 $\dfrac{{}_6C_5 \times {}_3C_2 \times {}_3C_2}{{}_{12}C_9} \times \dfrac{{}_1C_1}{{}_3C_1} = \dfrac{6\times3\times3}{220} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{18}{220}$.

$\therefore$ (가) $= p = \dfrac{9}{220}$, (나) $= q = \dfrac{18}{220}$. $\therefore$ $p+q = \dfrac{27}{220}$ //

* 2020학년도 평가원 9월 수학 나형 15번.

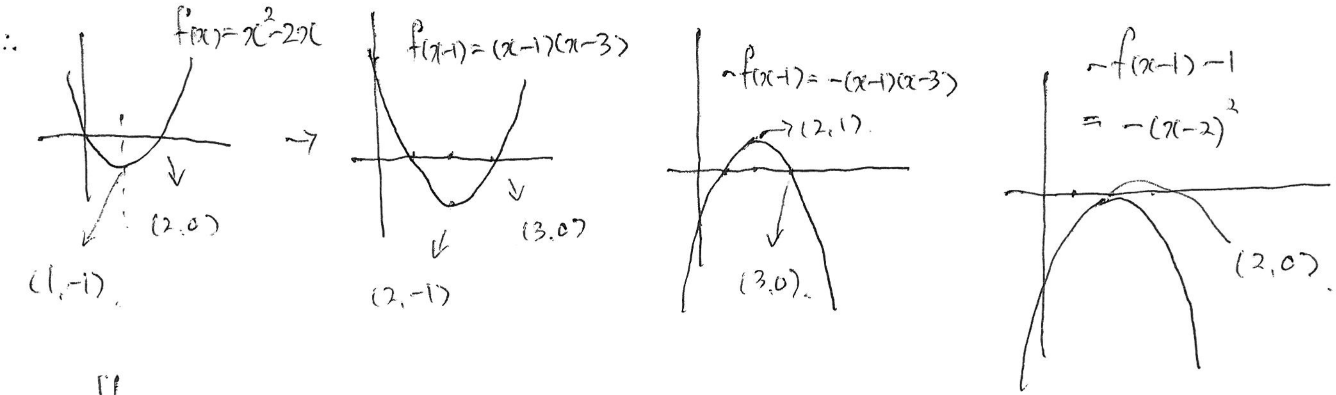
$f(x) = x^2-2x$

$f(x-1)$: $f(x)$를 x축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동

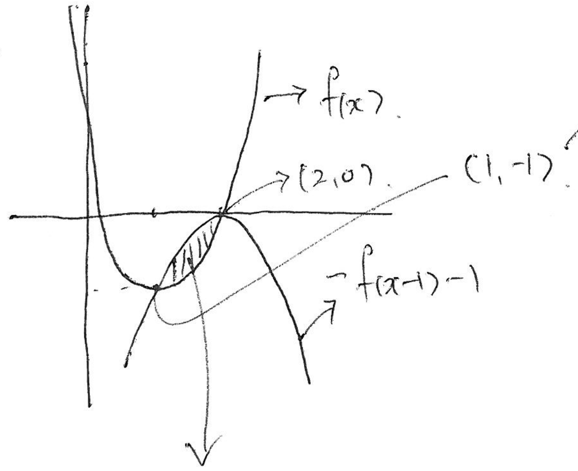
$-f(x-1)$: $f(x-1)$을 x축에 대하여 대칭이동.

$-f(x-1)-1$: $-f(x-1)$을 y축의 음의 방향으로 1만큼 평행이동.

∴



∴



∵ $f(x) = -f(x-1)-1$

→ $x(x-2)+(x-2)^2=0$

$2(x-1)(x-2)=0$.

∴ $x=1$, $x=2$ 에서 교점.

따라서 $\int_1^2 \{-f(x-1)-1-f(x)\}dx = \int_1^2 \{-x^2+4x+4-x^2+2x\}dx$

$= \int_1^2 \{-2x^2+6x-4\}dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_1^2$

$= \left(-\frac{16}{3}+12-8\right)-\left(-\frac{2}{3}+3-4\right) = -\frac{14}{3}+5 = \frac{1}{3}$ //

* 2020학년도 평가원 9월 수학 나형 19번.

$f(x) = 4x^4 + 4x^3$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) = ?$

1) $x_k = \frac{k}{n}$. $\therefore x_1 = \frac{1}{n}$, $x_n = 1$.

2) $dx = \frac{1}{n}$.

$$\therefore \frac{1}{n+k} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\left(\frac{k}{n}\right)} \; (\because n \neq 0) = \frac{dx}{1+x_k}$$

3) $\lim_{n\to\infty} x_1 = 0$ (밑끝, $\because k=1$부터), $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ (위끝, $\because k=n$까지)

따라서 준식 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 는

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{4x^3(x+1)}{1+x} dx = \int_0^1 4x^3 dx = \left[x^4\right]_0^1 = 1$$

무한급수와 정적분의 테마에서 $\frac{b-a}{n}$ 는 내용정리할 때만 쓰고, 실제 문제에서는 위와 같이 3단계로 접근해야 한다.

⇒ 무한급수를 정적분으로 바꾸는 것은 공식이 아니고 접근순서에 따라서 바꾼다.

* 2020학년도 평가원 9월 수학 나형 16번.

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1 \Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2 \Rightarrow f(-1) = 0,\ f'(-1) = 2$.

$\therefore$ $f(-1)=0$ 에서 $-1+a-b+c=0 \cdots ①$

$f'(-1)=2$ 에서 $3-2a+b = 2 \cdots ②$

$f(1) \leq 12$ 에서 $1+a+b+c \leq 12 \cdots ③$

①③ 에서 $a+c = b+1$,

$\therefore 2b+2 \leq 12$

$\therefore b \leq 5$.

② 에서 $b = 2a-1 \leq 5$. $\therefore a \leq 3$.

$\therefore f(2) = 8+4a+2b+c$ 의 최댓값은 c의 최댓값으로 결정된다.

①② 에서 $2-a+c=2$. $\therefore c=a$. $\therefore c \leq 3$.

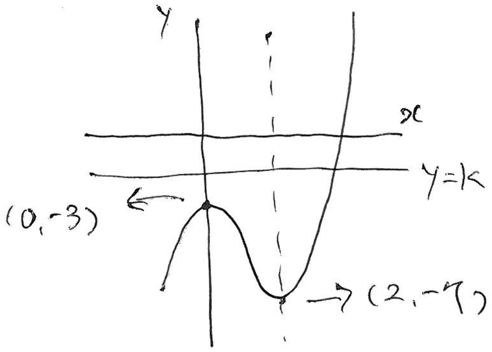
따라서 $f(2)$의 최댓값은 $8+12+10+3 = 33$ //

* 2020학년도 평가원 9월 수학 나형 27번

$y = x^3 - 3x^2 + 2x - 3$, $y = 2x + k$ ⇒ 서로 다른 두 교점 (연립방정식은 실근 3개, 서로 다른 실근 2개)

$\therefore y_1 = x^3 - 3x^2 - 3$, $y_2 = k$ 라 하면 방정식 $y_1 = y_2$는 서로 다른 두 교점을 갖는다.

$y_1' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, $\rightarrow \underbrace{y_1(0) = -3,\ y_1(2) = 8-12-3 = -7}_{(극값)}$.



따라서 $k = -3$ or -7.

$\therefore (-3)\times(-7) = 21$ //

* 2020학년도 평가원 9월 수학 나형 17번.

$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3(a^2-1)x$

$f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3(a^2-1) = 3(x^2 - 2ax + (a+1)(a-1))$

$= 3(x-(a+1))(x-(a-1))$

$\therefore$ $f(x)$의 개형은

극댓값이 4 $\Rightarrow$ $f(a-1) = 4$.

$\therefore (a-1)^3 - 3a(a-1)^2 + 3(a^2-1)(a-1)$

$= (a-1)\{(a-1)^2 - 3a(a-1) + 3a^2 - 3\}$

$= (a-1)(a^2 - 2a + 1 - 3a^2 + 3a + 3a^2 - 3)$

$= (a-1)(a^2+a-2) = (a-1)^2(a+2) = 4$

$\therefore (a-1)^2(a+2) = (a^2-2a+1)(a+2) = a^3 - 3a + 2 = 4$ 에서

$a^3 - 3a - 2 = 0$. $\therefore a^3 - 3a - 2 = (a+1)(a^2-a-2) = (a+1)^2(a-2) = 0$.

$\therefore a = -1$ or 2.

$f(-2) = -8 - 12a - 6(a^2-1) = -6a^2 - 12a - 2 > 0$

$\therefore 3a^2 + 6a + 1 < 0$.

(i) $a=-1$ 일 때 $3-6+1 = -2 < 0$ (성립).

(ii) $a=2$ 일 때 $12+12+1 = 25 > 0$ (불성립)

$\therefore a = -1$.

$f(x) = x^3 + 3x^2$

$\therefore f(-1) = -1 + 3 = 2$ //

* 2020 학년도 평가원 9월 수학 나형 28번.

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ k>0$.

(가) $3^a = 5^b = k^c = t$ ($t>0,\ t\neq 1 \because k>0,\ c>0$).

$\therefore\ a=\log_3 t,\ b=\log_5 t,\ c=\log_k t$. ------ ①

(나) $\log c = \log(2ab) - \log(2a+b) = \log\left(\frac{2ab}{2a+b}\right)$.

$\therefore\ c = \frac{2ab}{2a+b}$. $\Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{2a+b}{2ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{2a}$. ----- ②

($\frac{2ab}{2a+b}$ 를 보고 분모가 더 복잡하므로 역수를 활용해야겠다는 생각을 하는 것이 좋다. 분모가 (+)로 연결되어 있으면 다양한 변형이 가능하다)

$\therefore$ ② 에서 $\frac{1}{\log_k t} = \frac{1}{\log_5 t} + \frac{1}{2\log_3 t}$

$\therefore \log_t k = \log_t 5 + \frac{1}{2}\log_t 3 = \log_t 5\sqrt{3}$.

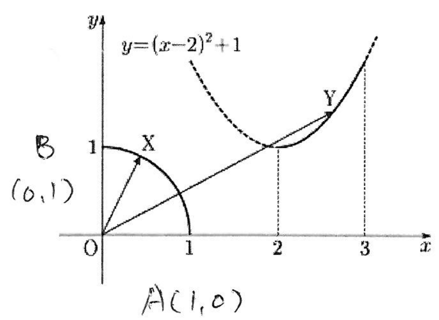
$\therefore k = 5\sqrt{3}$, $k^2 = 75$ //

$3^a = 5^b = k^c$ 에서 $3^a = 5^b = k^c = t$ 로 놓을 때

문제 조건 상 $t>0,\ t\neq 1$ 인 조건이 도출된다. 로그의 밑 조건에

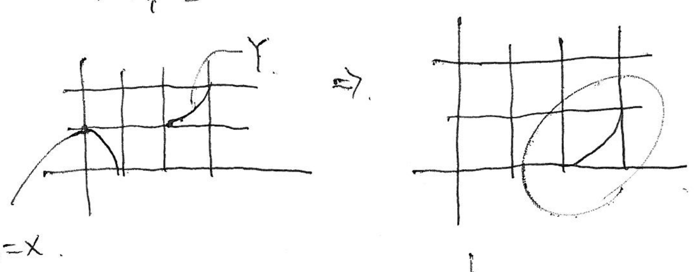
정확하게 부합하는 조건이 도출된다.

* 2020학년도 평가원 9월 수학 가형 19번.



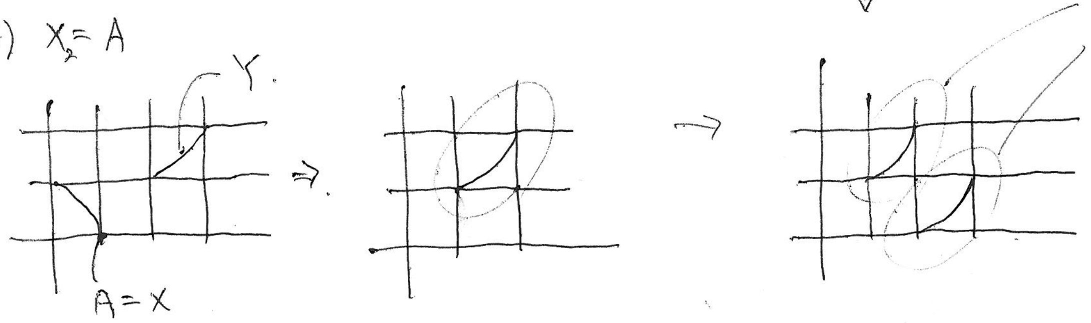
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{XY}$ (시점 X, 종점 Y)

(i) $X_1 = B$

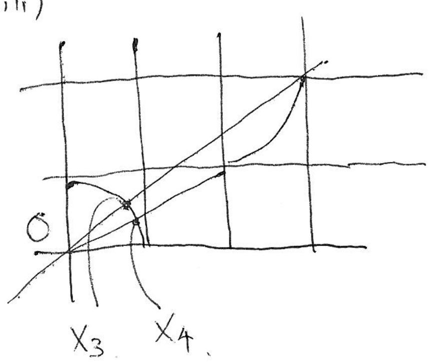


이차함수 평행이동의 형태로 나타난다.

(ii) $X_2 = A$



(iii)



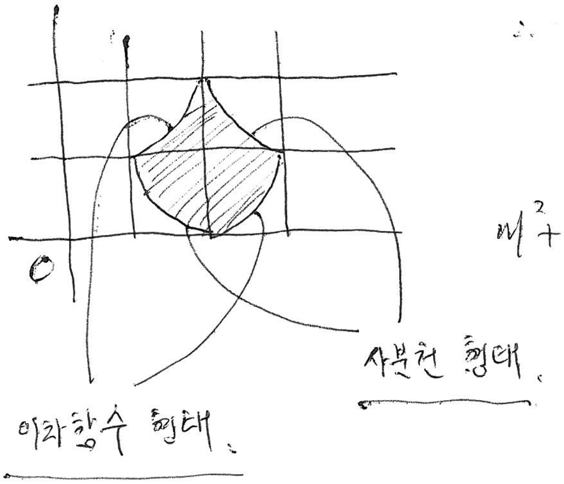
$\overline{OX_3} = \sqrt{13}-1$.

$\overline{OX_4} = \sqrt{5}-1$.

즉, (3, 2)를 중심으로 하는 사분원과 (2, 1)을 중심으로 하는 사분원으로 경계가 나타난다.

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}\right)$ 그대로 생각할 것. (Y 먼저 생각)

∴ 점 P가 나타내는 영역 R은 다음과 같다.



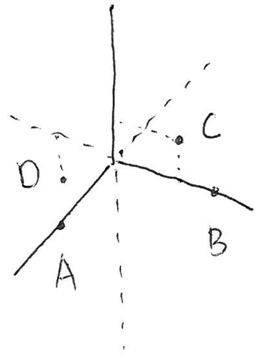
∴ $|\overrightarrow{OP}|$의 $m = \sqrt{5}-1$,

$M = \sqrt{10}$ (P(3, 1)일 때) 이므로

$M^2 + m^2 = 10 + 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 16 - 2\sqrt{5}$ //

* 2020 학년도 평가원 9월 수학 가형 16번.

A(3, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 2, 1), D$\left(0, -\frac{5}{2}, -2\right)$



점B, 점C, 점D는 모두 yz 평면위에 있다.

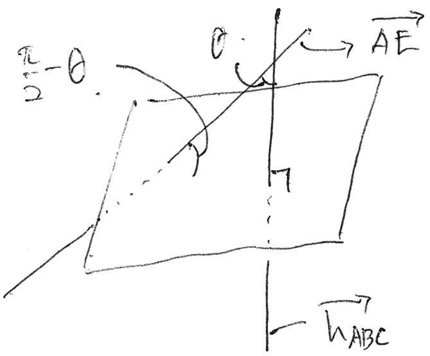
선분 CD를 2:1로 내분하는 점은 3등분점들 중 D에 가까운 점이므로

E(0, −1, −1). ∴ $\overrightarrow{AE} = (-3, -1, -1) = (3, 1, 1)$

평면 ABC는 점B와 점C의 관계를 보면 (0, 0, 3)도 지나므로 (직선 BC는 평면 ABC에 포함)

x, y, z 절편을 모두 확인 가능하므로 평면식은 $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} - 1 = 0$ 에서

평면 ABC : $x + y + z - 3 = 0$, $\overrightarrow{n_{ABC}} = (1, 1, 1)$



문제에서 요구하는 내용은 직선과 평면간의 관계이고,

$\overrightarrow{AE}$ 와 평면 ABC의 법선벡터 $\overrightarrow{n_{ABC}}$ 간의 사잇각을 θ라

하면, $|\overrightarrow{AE}| \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = |\overrightarrow{AE}| \times \sin\theta$ 가 된다.

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{n_{ABC}} = 5 = \sqrt{11} \times \sqrt{3} \times \cos\theta$. ∴ $\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{33}}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{33}}$

$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{11}$. ∴ $\sqrt{11} \times \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ //