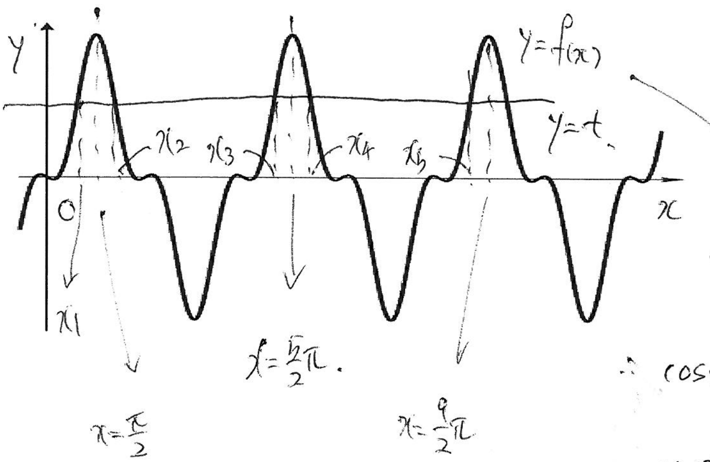
* 2020학년도 평가원 6월 수학 가형 30번.

$f(x) = a\sin^3 x + b\sin x$

$f(\frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2}$, $f(\frac{\pi}{3}) = 5\sqrt{3}$

$a \times \frac{2\sqrt{2}}{8} + b \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b = 3\sqrt{2} \rightarrow a + 2b = 12$

$a \times \frac{3\sqrt{3}}{8} + b \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 5\sqrt{3} \rightarrow 3a + 4b = 40$.



$\therefore$ $a = 16$, $b = -2$. $f(x) = 16\sin^3 x - 2\sin x$.

$\sin x$로만 구성된 연산함수 → 주기 존재 (2π).

$f'(x) = 48\sin^2 x\cos x - 2\cos x = 2\cos x(24\sin^2 x - 1)$

$\therefore$ $\cos x = 0$ or $\sin^2 x = \frac{1}{24}$ 일 때, $f'(x)$의 부호가 바뀌고, $f(x)$는 극값을 갖는다.

(i) $\cos k_1 = 0$ 이면 $\sin k_1 = \pm 1$. $f(k_1) = 16 \times (\pm 1)^3 - 2 \times (\pm 1) = \pm 14$.

$\left(\left| \mp \frac{4}{3\sqrt{24}} \right| < 1 \right)$.

(ii) $\sin k_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{24}}$ 이면 $f(k_2) = 16 \times \left(\pm\frac{1}{\sqrt{24}}\right)^3 - 2 \times \left(\pm\frac{1}{\sqrt{24}}\right) = \pm\frac{2}{3\sqrt{24}} - \left(\pm\frac{6}{3\sqrt{24}}\right) = \mp\frac{4}{3\sqrt{24}}$.

수열 x_n의 특징을 정리해 보면

$x_1 + x_2 = \pi$, $x_3 + x_4 = 5\pi$, $x_5 + x_6 = 9\pi$, $\cdots$ / $x_1 + 2\pi = x_3$, $x_2 + 2\pi = x_4$, $x_3 + 2\pi = x_5$, $\cdots$

따라서 n이 자연수일 때, $\begin{cases} x_{2n-1} + x_{2n} = 4n\pi - 3\pi. \\ x_{2n+1} = x_{2n-1} + 2\pi, \quad x_{2n+2} = x_{2n} + 2\pi. \end{cases}$

이 때, $c_n = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)} dt = \frac{1}{f'(x_n)} \times \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} t\,dt = \frac{1}{f'(x_n)} \times \left[\frac{t^2}{2}\right]_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} = \frac{1}{f'(x_n)} \times \frac{57}{2}$.

$\therefore$ $\begin{cases} c_1 = c_3 = c_5 = \cdots, \quad c_2 = c_4 = c_6 = \cdots \text{ (주기성)} \\ c_1 + c_2 = c_3 + c_4 = c_5 + c_6 = \cdots = 0 \text{ (대칭성)} \end{cases}$

따라서 $\sum_{n=1}^{101} c_n = 50 \times (c_1 + c_2) + c_1 = c_1 = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)} dt = p + q\sqrt{2}$.

$f(x_1) = 16\sin^3 x_1 - 2\sin x_1 = t$.

$\therefore f'(x_1)\,dx_1 = dt$ 에서 $f'(x_1) = \dfrac{dt}{dx_1}$ ($\because$ x_1과 t 값은 서로 간에 종속적이다)

$$\therefore \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_1)}\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} t\,dx_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x_1)\,dx_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$$

$= \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \{16\sin^3 x - 2\sin x\}\,dx$. (문제 조건에 나온 $f(\frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2}$, $f(\frac{\pi}{3}) = 5\sqrt{3}$ 을 통해 윗끝, 아랫끝 확인 가능)

* $\int \sin^3 x\,dx$ 는 $\cos x = s$로 치환하면 $-\sin x\,dx = ds$ 이므로

$$\int \sin x \cdot \sin^2 x\,dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx = -\int \{1-s^2\}\,ds$$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 16\sin^3 x\,dx = -16 \times \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \{1-s^2\}\,ds = -16 \times \left[s - \frac{s^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

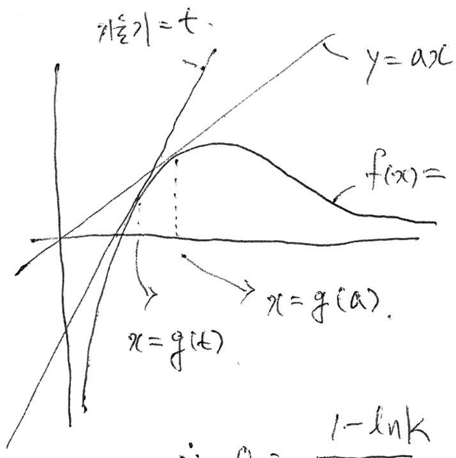
$$= -16 \times \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{24}\right)\right\} = -16 \times \left(\frac{11}{24} - \frac{10\sqrt{2}}{24}\right) = -\frac{22}{3} + \frac{20\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -2\sin x\,dx = 2 \times [\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \sqrt{2}.$$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \{16\sin^3 x - 2\sin x\}\,dx = -\frac{22}{3} + \frac{20\sqrt{2}}{3} + 1 - \sqrt{2} = -\frac{19}{3} + \frac{17\sqrt{2}}{3} \quad //$$

($\therefore q - p = 12$)

* 2020학년도 평가원 6월 수학 가형 21번



$$f(x)=\frac{\ln x}{x} \qquad f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$\therefore$ $g(a)=k$라 하면 $\left(k, \frac{\ln k}{k}\right)$에서의 접선은

$$y=\left(\frac{1-\ln k}{k^2}\right)(x-k)+\frac{\ln k}{k}=\left(\frac{1-\ln k}{k^2}\right)\cdot x+\frac{-1+2\ln k}{k}=ax$$

$\therefore$ $a=\frac{1-\ln k}{k^2}$, $\frac{-1+2\ln k}{k}=0$, 따라서 $k=\sqrt{e}=g(a)$, $a=\frac{\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$.

정리하면 $g(a)=k$일 때 $a=\frac{1-\ln k}{k^2}$.

$g(t)=\alpha$라 하면 $t=\frac{1-\ln\alpha}{\alpha^2}$ $\therefore$ $g'(t)\,dt=d\alpha$.

$$dt=\frac{-\frac{1}{\alpha}\times\alpha^2-(1-\ln\alpha)2\alpha}{\alpha^4}\times d\alpha=\frac{\alpha(-3+2\ln\alpha)}{\alpha^4}d\alpha=\frac{2\ln\alpha-3}{\alpha^3}d\alpha.$$

$$\therefore\ g'(t)=\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\alpha^3}{2\ln\alpha-3}.$$

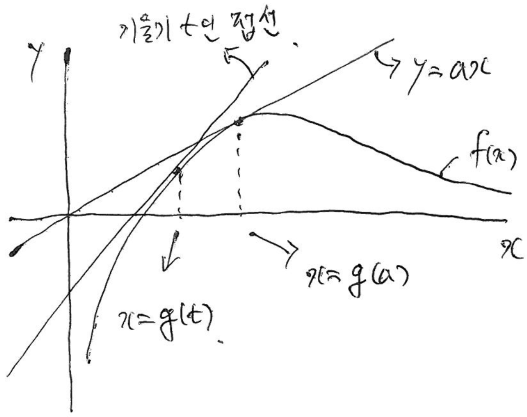
결국 $t=a=\frac{1}{2e}$일 때 α값 찾으라는 문제임.

그런데 위에서의 k값과 α값이 과정이 동일하므로

$$g'(a)=g'\left(\frac{1}{2e}\right)=g'\left(\frac{1-\ln k}{k^2}\right)\Big|_{k=\sqrt{e}}=g'\left(\frac{1-\ln\alpha}{\alpha^2}\right)\Big|_{\alpha=\sqrt{e}}=\frac{(\sqrt{e})^3}{2\ln\sqrt{e}-3}=\frac{e\sqrt{e}}{-2}.$$

$$\therefore\ a\times g'(a)=\frac{1}{2e}\times\left(\frac{e\sqrt{e}}{-2}\right)=-\frac{\sqrt{e}}{4}\ //$$

* 2020 학년도 평가원 6월 수학 가형 21번. (V-2)



$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

→ (1) $x>0$, (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0(+)$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x}=\frac{\infty(-)}{0(+)}=-\infty.$$

(3) $(1,0)$ ← 유일근 (=단독근).

x좌표가 $g(t)$인 점에서의 접선의 기울기 $f'(g(t))=t$. $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

접선 중 원점을 지나는 접선의 기울기 $=a$.

$g(a)=k$라 하면, $(k, f(k))$에서의 접선은 $y=\left(\frac{1-\ln k}{k^2}\right)(x-k)+\frac{\ln k}{k}=ax$

$\therefore\ \frac{1-\ln k}{k^2}=a,\quad \frac{-1+\ln k}{k}+\frac{\ln k}{k}=\frac{2\ln k-1}{k}=0.$ (∵ 원점을 지난다)

$\therefore\ k=\sqrt{e},\quad \therefore\ a=\frac{\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e},\quad k=g(a)=\sqrt{e}.$

매개변수 또는 합성함수가 아니고 역함수로 접근할 때에는

(1) 역함수 관계 정리 : $f'(x)$와 $g(x)$가 역함수이다. (∵ $f'(g(t))=t$)

(2) 관계식 정리 : $g'(x)=\frac{1}{f''(g(x))}$, $f''(x)=\frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$

(3) 계산 ($a=\frac{1}{2e}$, $g(a)=\sqrt{e}$)

$$g'(a)=\frac{1}{f''(g(a))}=\frac{1}{f''(\sqrt{e})}=\frac{e\sqrt{e}}{-3+2\times\frac{1}{2}}=\frac{e\sqrt{e}}{-2}.$$

$$\therefore\ a\times g'(a)=\frac{1}{2e}\times\frac{e\sqrt{e}}{-2}=-\frac{\sqrt{e}}{4}\ //$$

※ 2020학년도 평가원 6월 수학 나형 30번.

$f(x) = x^3 + \cdots,\ f'(2) = 3$

$g(x) = \begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$ $g(0) = 9$

$y = g(x)$와 $y = t$가 서로 다른 두 점에서만 만난다.

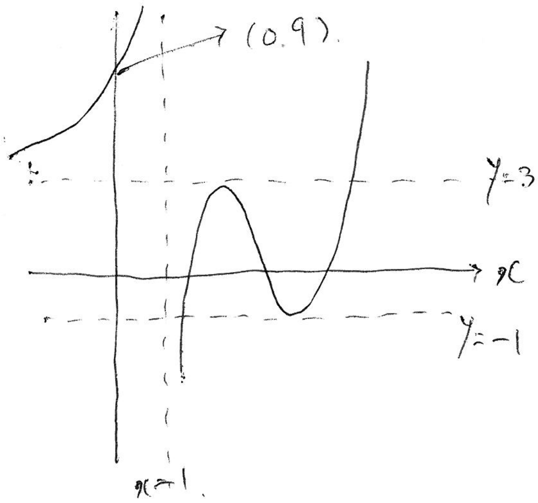
$\Leftrightarrow \{t \mid t = -1 \text{ or } t \geq 3\}$

→ 구간 (t의 구간) $[3, \infty)$에서 위 조건을 만족시키려면, 유리함수의 위치가 점근선 ($x=1$, $y=a \neq 9$)을 기준으로 4등분했을 때, 좌상쪽에 위치해야 한다. t가 충분히 커지면 ($x \geq 1$) 부분에서 교점이 하나이므로 ($x<1$) 부분에서도 하나가 있어야 한다.

$\therefore a < 9$ ($a = 9$일 때는 유리함수가 아니고 상수함수이므로 조건에 위배).

→ 또한 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 ($t=-1$)인 경우는 논외로 치더라도, 해집합의 부분인 ($t \geq 3$)인 경우에서 $t = 3$인 경우가 불가능하다. ($\because$ 유리함수의 치역이 $y \geq a$이 아니고 $y > a$이다). 따라서 $f(x)$는 극값을 갖는 3차함수이다.

따라서 기본 개형을 살펴보면 다음과 같다.



유리함수에서의 점근선은 ($x=1$, $y=3$)

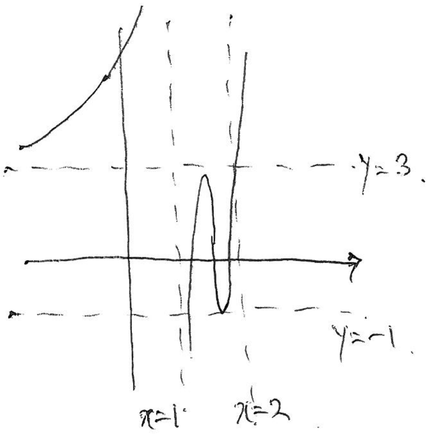
$\therefore a = 3$.

$f(x)$의 극댓값은 3이고, 극솟값은 −1이고, 극댓값과 극솟값 모두 ($x>1$) 구간에서 나타난다.

또한 $f(1) \leq -1$ (등호만 포함되는 것이 아닌 점에 주의).

$\therefore g \circ g(-1) = g(6)$ ($\because g(-1) = \dfrac{-3-9}{-1-1} = 6$) $= f(6)$ ($\because (x \geq 1)\ g(x) = f(x)$)

(i)



$f(k)=-1,\ f(\alpha)=3,\ f(\beta)=-1,\ f(2)=3$

(단, $1\le k<\alpha<\beta<2$)

$f(x)-3=(x-\alpha)^2(x-2)$

$f'(x)=(x-\alpha)(x-\alpha+2x-4)$

$=3(x-\alpha)\left(x-\dfrac{4+\alpha}{3}\right)$

$\therefore \beta=\dfrac{4+\alpha}{3}\quad (\because f'(\alpha)=f'(\beta)=0)$

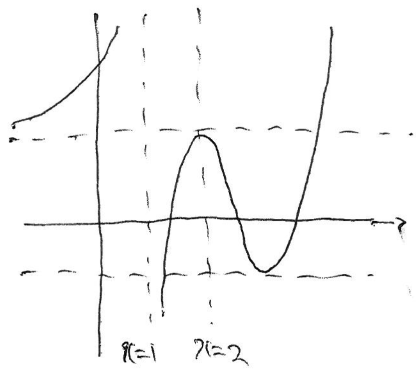
$f(\beta)-3=-4=\left(\dfrac{4-2\alpha}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{\alpha-2}{3}\right)$

$=-\dfrac{4(2-\alpha)^3}{27}$.

$\therefore (2-\alpha)=3,\ \alpha=-1$.

→ 조건에 위배.

(ii)



$f(k)=-1,\ f(2)=3,\ f(\alpha)=-1,\ f(\beta)=3$.

(단, $1\le k<2<\alpha<\beta$)

$f(x)-3=(x-2)^2(x-\beta)$

$f'(x)=(x-2)(x-\cancel{\beta}+2x-2\beta)$

$=3(x-2)\left(x-\dfrac{2+2\beta}{3}\right)$

$\therefore \alpha=\dfrac{2+2\beta}{3}\quad (\because f'(2)=0,\ f'(\alpha)=0)$

$f(\alpha)-3=\left(\dfrac{2\beta-4}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{2-\beta}{3}\right)=-4$

$=-\dfrac{4(\beta-2)^3}{27}\qquad \therefore (\beta-2)=3$.

$\therefore \beta=5,\ \alpha=4$.

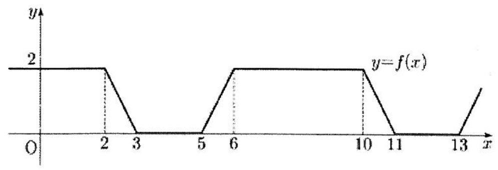
→ 조건에 부합.

$\therefore f(x)=(x-2)^2(x-5)+3$.

따라서 $g\circ g(-1)=g(6)=f(6)=16+3=19$ //

* 극대, 극소를 갖는 최고차항의 계수가 1인 3차함수의 극을 특성상, 변곡점을 지나는 상수함수와의 근의 간격이 1미만((i) 경우)일 때에는 극댓값과 극솟값의 차이가 4가 나올 수가 없으므로 (ii)의 경우로 곧바로 계산해도 상관은 없는 문제다.

※ 2020학년도 평가원 6월 나형 21번.



(나) 모든 실수 x에 대하여

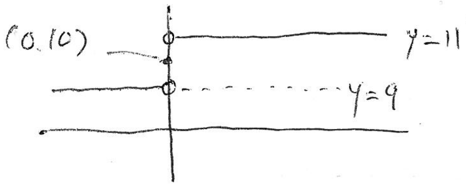
$f(-x)=f(x)$ → y축 대칭.

$f(x)=f(x-8)$ → 주기 8인 주기함수.

(정의역 구간 8을 (폭이 8인 구간)이 반복되는 함수)

$$g(x)=\begin{cases} n+1 & (x>0) \\ n & (x=0) \\ n-1 & (x<0) \end{cases}$$

예를 들어 $n=10$이라면 $g(x)$는 다음과 같다.



∴ $g(x)$의 치역은 $\{n-1, n, n+1\}$이다.

$f\circ g(x)$에서 $g(x)$의 치역이 $f(x)$의 정의역이 되므로, $f(x)$에서

$f(n-1)=f(n)=f(n+1)=k$ (k는 상수)인 60이하의 자연수 n을 찾으라는 문제임.

∴ $[0, 8]$에서 찾아보면; $n=1$, $n=4$, $n=7$, $n=8$ → 4개 성립.

∴ 56이하의 자연수 n의 개수는 28개.

$[56, 60]=[0, 4]$ (∵ 주기) 이므로 $n=1$, $n=4$ → 2개 성립.

∴ $28+2=30$//

* 2020학년도 평가원 6월 수학 가형 20번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$

(가) $f(x)>0$

(정적분으로 정의된 함수 ⇒ 1. 윗끝 = 밑끝, 2. 미분)

(나) $\ln f(x) + 2\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 0$ $\longrightarrow$ $\ln f(0)=0$, $\therefore f(0)=1$

$= \ln f(x) + 2x\int_0^x f(t)\,dt - 2\int_0^x t f(t)\,dt = 0$ ····· ①

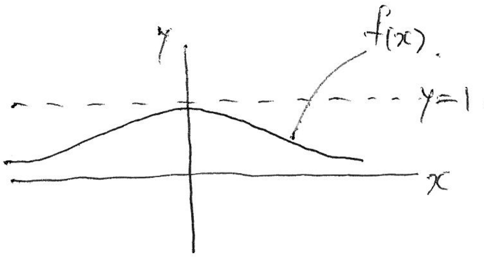
$\therefore$ ①' $\dfrac{f'(x)}{f(x)} + 2\int_0^x f(t)\,dt + 2xf(x) - 2xf(x) = 0$ ··· ②

$\therefore$ ② 에서 $(x=0)$ $f'(0)=0$

$(x>0)$ 순방향 적분 >0 $(\because f(x)>0)$ $\rightarrow f'(x)<0$

$(x<0)$ 역방향 적분 <0 $\longrightarrow f'(x)>0$.

따라서 $f(x)$의 개형은 다음과 같다.



(ㄱ), (ㄴ) → True.

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ 라 하면 $F(0)=0$. (적분상수는 임의의 상수 a에 대하여 $\int_a^0$ 을 말한다)

② 에서 $f'(x) = -2F(x)\cdot f(x) = -2F(x)F'(x)$ $(\because F'(x)=f(x))$

$= \{-\{F(x)\}^2\}'$

$\therefore f(x) = -\{F(x)\}^2 + C$ 라 할 때 $C=1$. $(\because f(0)=1,\ F(0)=0)$

$\therefore f(1) = -\{F(1)\}^2 + 1$.   (ㄷ) → True.

* $A'(x) = B'(x)$ 일 때 확인가능한 것은 $A(x)=B(x)$가 아니고 $A(x)=B(x)+C$ 라는 점을 간과하지 말라는 의미다.

* 2020학년도 평가원 6월 수학 가형 19번, 나형 29번.

음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)

(가) $x_{n+1} - x_n \ge 2$ $(n=1, 2, 3)$ (나) $x_4 \le 12$.

* H 확장.

x_1 x_2 x_3 x_4

0 2 4 $6 \sim 12$) 7(개)

$\to {}_7H_2$

$\to {}_7H_3$

$\to {}_7H_4$

$\therefore {}_7H_4 = {}_{10}C_4$

$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ //

* H 중복조합.

문제 내용상 x_1과 x_1+1, x_2와 x_2+1, x_3과 x_3+1은 항상 붙어있어야 된다

$\therefore$ ↑ (x_1, x_1+1) ↑ (x_2, x_2+1) ↑ (x_3, x_3+1) ↑ x_4 ↑

남는 숫자 $13-7=6$, 중복가능한 자리의 숫자 5.

$\therefore {}_5H_6 = {}_{10}C_6 = {}_{10}C_4 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ //

조건이 $x_{n+1} - x_n \ge n$, $x_{n+1} - x_n \ge 3$, $x_4 \le 20$ 등등으로

변화할 때, 계산값이 어떻게 달라지는가?를 확인하는 것이 기출 최적입니다.

* 2020학년도 평가원 6월 수학 가형 17번, 나형 19번.

1) 1~8까지 적혀있는 자연수 카드 8장.

2) 1번째, 2번째, 3번째, ⋯, 8번째 자리 → 8자리.

3) 8이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 k이하의 자연수 카드가 놓인 사건 A_k.

→ 예를 들어 5번째 자리에 5이하의 자연수가 놓여 있는 사건 $= A_5$.

4) 두 자연수 m, n $(1 \le m < n \le 8)$에 대하여 A_m과 A_n이 서로 독립.

→ $0 < A_m < 1$, $0 < A_n < 1$일 때, $P(A_m \cap A_n) = P(A_m) \times P(A_n)$.

* A_1 : 1번째 자리에 1이하의 자연수 중 하나가 놓인 사건 → $P(A_1) = \dfrac{{}_1C_1 \times 7!}{8!}$

$\therefore P(A_k) = \dfrac{{}_kC_1 \times 7!}{8!} = \dfrac{k}{8} = $ (가).

* A_1과 A_2가 동시에 성립한다면 $P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{{}_1C_1 \times 7!}{8!} \times \dfrac{{}_{2-1}C_1 \times 6!}{7!}$ → 주의: 이미 1번째 자리는 결정된 상태이다.

A_3과 A_6이 동시에 성립한다면

$$P(A_3 \cap A_6) = \frac{{}_3C_1 \times 7!}{8!} \times \frac{{}_{6-1}C_1 \times 6!}{7!}$$

$\therefore A_m$과 A_n이 동시에 성립한다면 $P(A_m \cap A_n) = \dfrac{{}_mC_1 \times 7!}{8!} \times \dfrac{{}_{n-1}C_1 \times 6!}{7!} = \dfrac{m(n-1)}{56} = $ (나).

독립이 되려면 $P(A_m \cap A_n) = P(A_m) \times P(A_n)$ 이므로

$\dfrac{mn-m}{56} = \dfrac{m}{8} \times \dfrac{n}{8} = \dfrac{mn}{64}$. $\therefore 8mn - 8m = 7mn$. $\therefore mn = 8m$, 따라서 $n = 8$.

$\therefore A_m$과 A_n이 서로 독립이 되는 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는 $(1,8), (2,8), (3,8), \cdots, (7,8)$

까지 7이다. $\therefore 7 = $ (다)

$\therefore p = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$, $q = \dfrac{3 \times 4}{56} = \dfrac{3}{14}$, $r = 7$. $\therefore p \times q \times r = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{14} \times 7 = \dfrac{3}{4}$ //

* 2020학년도 평가원 6월 수학 가형 27번.

1, 1, 2, 2, 3, 3 → 1개 추출, 비복원. $\therefore All = \frac{6!}{2!2!2!} = 90$

$$\begin{pmatrix} m = a_1 \times 100 + a_2 \times 10 + a_3 \\ n = a_4 \times 100 + a_5 \times 10 + a_6 \end{pmatrix}$$

$m > n \rightarrow$ (i) $a_1 > a_4$

(ii) $a_1 = a_4$, $a_2 > a_5$

(iii) $a_1 = a_4$, $a_2 = a_5$, $a_3 > a_6$ → 불가능 (자동으로 $a_3 = a_6$이 된다)

$\therefore$ (i) $(a_1, a_4) = (2,1)$ or $(3,1)$ or $(3,2)$

각각 $\frac{4!}{2!} = 12$ 이므로 (i) 에서 36가지.

(ii) $(a_1, a_4, a_2, a_5) = (1,1,3,2)$ or $(2,2,3,1)$ or $(3,3,2,1)$

각각 2가지 (남는 숫자로 a_3, a_6 배열) 이므로 (ii) 에서 6가지.

$\therefore$ 구하는 확률은 $\frac{42}{90} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} = \frac{q}{p}$. $\therefore p + q = 22$ //

위 문제는 배열 이후의 순서쌍에 대하여 각각의 확률(근원사건의 확률)이 동일하므로 확률문제로 나와도 크게 고민할, 어려워할 부분은 없다. 하지만, m과 n은 4자리 수로 가정한 뒤, 주머니 속의 공을 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3 처럼 가정하면 보통은 분자부분(Target)의 경우의 수를 구하라는 형태로 나오는데, 확률문제로 나오면 많이 세팅해야 할 부분들이 존재한다.

* 2020학년도 평가원 6월 수학 나형 20번.

다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1} = 6$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = 4$, n은 자연수 (1개 이상 존재).

$f(x) = x^n \times f_1(x)$로 놓았을 때, $f_1(0)=4$.

(i) $n+1=3$, $f(x) = 10x^3+4x^2 = x^2 \times (10x+4)$ $\leftarrow f_1(x)=10x+4$

이 때, $f(1)=14$.

(ii) $n+1 \geq 4$, $f(x) = 6x^{n+1}+4x^n = x^n \times (6x+4)$ $\leftarrow f_1(x)=6x+4$.

이 때, $f(1)=10$.

(iii) $n+1=2$, $f(x) = 4x^3+3x^2 = x^2 \times (4x+3) \rightarrow \times$.

$f(x) = 4x^3+3x^2+4x = x(4x^2+3x+4)$ $\leftarrow f_1(x)=4x^2+3x+4$

이 때, $f(1)=11$.

$\therefore$ $f(1)$의 최댓값은 14//

* 2020학년도 평가원 6월 수학 나형 27번.

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^3+3x^2-k \\ g(x) &= 2x^2+3x-10 \end{aligned}\right\} \ f(x) \ge 3g(x)$$

$$\Rightarrow x^3+3x^2-k \ge 6x^2+9x-30$$

$$\Rightarrow x^3-3x^2-9x+30 \ge k$$

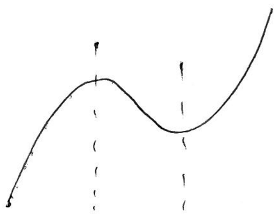
닫힌 구간 $[-1, 4]$ 에서 항상 성립하도록 하는 k의 최댓값

$\Rightarrow$ 함수 $x^3-3x^2-9x+30$ 의 닫힌 구간 $[-1, 4]$ 에서의 최솟값을 구하여라.

$h(x) = x^3-3x^2-9x+30$ 이라 하면

$h'(x) = 3x^2-6x-9 = 3(x^2-2x-3) = 3(x-3)(x+1)$

$\therefore$ $h(x)$의 개형은



$x=-1$. $x=3$.

$\therefore$ $[-1, 4]$ 에서 $h(x)$는 $x=3$일 때 극솟값, 최솟값을 갖는다.

$\therefore$ $h(3) = 27-27-27+30 = 3$ //

* 2020 학년도 평가원 6월 수학 나형 28번.

등비수열 $\{a_n\}$, $a_n = 2\times r^{n-1}$ (단, r은 정수), 자연수 m,

(가) $4 < a_2 + a_3 \leq 12$. $\rightarrow$ $4 < 2r + 2r^2 \leq 12$

$\rightarrow$ $2 < r + r^2 \leq 6$.

$\therefore$ $r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1) > 0$ 에서 $r < -2$ or $r > 1$

$r^2 + r - 6 = (r+3)(r-2) \leq 0$ 에서 $-3 \leq r \leq 2$.

따라서 $-3 \leq r < -2$ or $1 < r \leq 2$ 인 정수 r은 -3 or 2 이다.

(나) $\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{2\times(r^m - 1)}{r-1} = 122$.

(i) $r = -3$, $2\times((-3)^m - 1) = -4\times 122$. $\therefore (-3)^m = -243$. $\therefore m = 5$

(ii) $r = 2$, $2\times(2^m - 1) = 122$. $\therefore 2^m = 62$. $m = \log_2 62$. (자연수가 아님).

따라서 $m = 5$, $r = -3$ 이고 $a_n = 2\times(-3)^{n-1}$

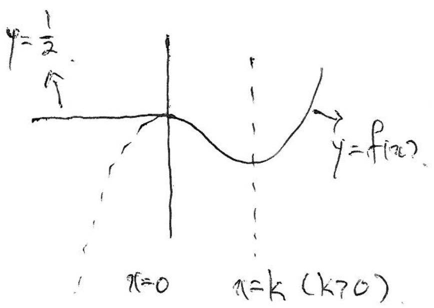
$\therefore a_m = a_5 = 2\times(-3)^4 = 162$ //

* 2020학년도 평가원 6월 수학 나형 18번.

$f(x) = x^3 + \cdots$, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x<0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$, $g(x)$는 $(x \in R)$에서 미분가능, $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작다.

→ $g(x)$의 최솟값은 $(x>0)$ 구간에서 나타난다.

∴ $g(x)$의 개형은 다음과 같다.



$\therefore f'(0) = 0,\ f(0) = \frac{1}{2}$.

$f'(x) = 3x(x-k) = 3x^2 - 3kx$

$f(x) = x^3 - \frac{3k}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

ㄱ. $g(0) = \frac{1}{2},\ g'(0) = 0$. ∴ ㄱ → True.

ㄴ. $g(1) = f(1) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}k$. $\therefore g(1) < \frac{3}{2}$ ($\because k>0$). ∴ ㄴ → True.

ㄷ. $g(x)$의 최솟값이 $0 \Rightarrow f(k) = 0$.

$\therefore f(k) = k^3 - \frac{3k^3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{k^3}{2} + \frac{1}{2} = 0$. $\therefore k = 1$.

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$. $\therefore g(2) = f(2) = 8 - 6 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. ∴ ㄷ → True.

* 2020학년도 평가원 6월 수학 나형 15번.

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (x<0)\\ -2x+2 & (x\geq 0)\end{cases},\qquad g(x)=\begin{cases}2x & (x<a)\\ 2x-1 & (x\geq a)\end{cases}.$$

$f(x)\times g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속.

(i) $a<0$.

$$f(x)\times g(x)=\begin{cases}(-2x+3)\times 2x & (x<a)\\ (-2x+3)\times(2x-1) & (a\leq x<0)\\ (-2x+2)\times(2x-1) & (x\geq 0)\end{cases}.$$

$\lim_{x\to 0-} f(x)\times g(x)=-3$, $f(0)\times g(0)=-2$. → 불연속.

$\lim_{x\to a-} f(x)\times g(x)=(-2a+3)\times 2a$, $f(a)\times g(a)=(-2a+3)\times(2a-1)$

∴ $(x=a)$에서 연속이 되려면 $a=\frac{3}{2}$, → 조건에 위배.

(ii) $a=0$.

$$f(x)\times g(x)=\begin{cases}(-2x+3)\times 2x & (x<0)\\ (-2x+2)\times(2x-1) & (x\geq 0)\end{cases}.$$

$\lim_{x\to 0-} f(x)\times g(x)=0$, $f(0)\times g(0)=-2$. → 불연속.

(iii) $a>0$.

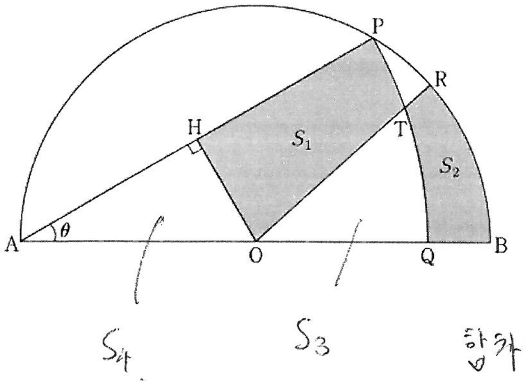
$$f(x)\times g(x)=\begin{cases}(-2x+3)\times 2x & (x<0)\\ (-2x+2)\times 2x & (0\leq x<a)\\ (-2x+2)\times(2x-1) & (x\geq a)\end{cases}.$$

$\lim_{x\to 0-} f(x)\times g(x)=0$, $f(0)\times g(0)=0$. → $(x=0)$에서 연속.

$\lim_{x\to a-} f(x)\times g(x)=(-2a+2)\times 2a$, $f(a)\times g(a)=(-2a+2)\times(2a-1)$.

∴ $a=1$ 이면 $(x=a)$에서 연속.

* 2020 학년도 평가원 6월 수학 가형 28번.



점O, 점Q, 점T로 둘러싸인 도형($=S_3$)이 부채꼴이 아니므로 S_1, S_2를 따로 구하는 것은 비현실적인 방법이다. 따라서 S_1-S_2를 구하기 위해 합차연산을 통한 식을 새롭게 만들어야 한다.

$$\ast \quad \underbrace{(S_1+S_3+S_4)}_{\text{부채꼴}} - \underbrace{S_4}_{\text{삼각형}} - \underbrace{(S_3+S_2)}_{\text{부채꼴}} = S_1 - S_2.$$

$$\therefore \overline{AH} = \cos\theta,\ \overline{AP} = 2\cos\theta,\ \overline{OH} = \sin\theta,\ \angle POB = 2\theta,\ \angle ROB = \frac{7}{5}\theta.$$

$$(S_1+S_3+S_4) = \frac{1}{2}\times(2\cos\theta)^2\times\theta.$$

$$\triangle AOH = \frac{1}{2}\times\sin\theta\times\cos\theta$$

$$(S_3+S_2) = \frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{7}{5}\theta.$$

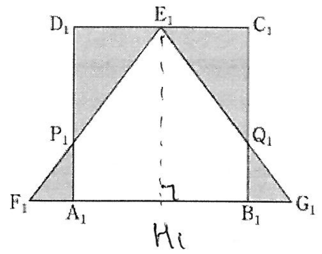
$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S_1-S_2}{\overline{OH}} = \lim_{\theta\to0+}\frac{2\cos^2\theta\times\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta - \frac{7}{10}\theta}{\sin\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{2\cos^2\theta\times\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta\times\cos\theta}{2\sin\theta} - \frac{7\times\theta}{10\times\sin\theta}\right\}$$

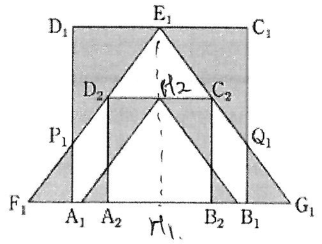
$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{7}{10} = \frac{20-5-7}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = a. \quad \therefore 50a = 40 //$$

* 2020 학년도 평가원 6월 수학 나형 17번.

R_1



R_2



⋮ ⋮

$n: 4(\text{in } R_1) \to 4$ (R_2에서 새로 추가된 부분)

$\therefore n=1$

$\overline{E_1H_1}=4$, $\therefore \overline{E_1F_1}:\overline{F_1H_1}:\overline{E_1H_1}=5:3:4$ 이므로

$\overline{E_1F_1}=5$, $\overline{F_1A_1}=1$, $\overline{A_1H_1}=2$.

$\overline{P_1A_1}=\frac{4}{3}$, $\overline{D_1P_1}=\frac{8}{3}$, $\overline{D_1E_1}=2$.

$$\therefore a=\left(\frac{1}{2}\times 2\times\frac{8}{3}\right)\times 2+\left(\frac{1}{2}\times 1\times\frac{4}{3}\right)\times 2=\frac{16}{3}+\frac{4}{3}=\frac{20}{3}.$$

$\overline{D_2A_2}=x$라 하면, $\overline{A_2H_1}=\overline{D_2H_2}=\frac{x}{2}$. $\overline{F_1A_2}=3-\frac{x}{2}$.

$\therefore 3:4=3-\frac{x}{2}:x$. $\Rightarrow$ $12-2x=3x$ 에서 $x=\frac{12}{5}$.

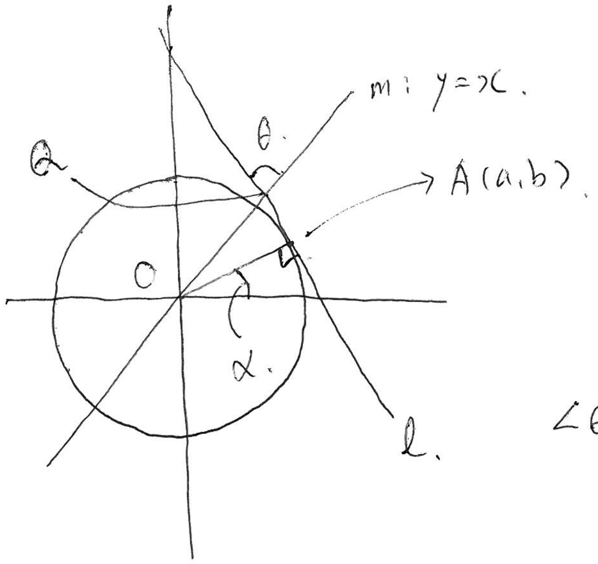
$\therefore l_r: 4\to\frac{12}{5}$. $\therefore l_r=\frac{3}{5}$, $S_r=\frac{9}{25}$.

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{20}{3}}{1-\frac{9}{25}\times 1}=\frac{\frac{\cancel{20}\,5}{3}}{\frac{\cancel{16}\,4}{25}}=\frac{125}{12}$ //

* 2020학년도 평가원 6월 수학 가형 26번.

좌표평면에서 $|\overrightarrow{OP}|=10$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형 ⇒ $x^2+y^2=10^2=100$.

∴ $A(a,b) \rightarrow a^2+b^2=100 \cdots ①$ $(a>b>0)$



직선 OA와 x축이 이루는 예각을 α라 하면

$\cos\alpha = \frac{a}{10}$, $\sin\alpha = \frac{b}{10}$.

직선 m과 직선 l의 교점을 Q라 하면

$\angle QOA = \frac{\pi}{4}-\alpha$, ∴ $\theta = \frac{\pi}{4}+\alpha$.

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{a}{10} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{b}{10}$. ∴ $a-b=2 \cdots ②$.

따라서 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=4$. ∴ $2ab=96$에서 $ab=48$.

* 2020 학년도 평가원 6월 수학 가형 29번.

C: $y=\sqrt{8-x^2}$ ($2\le x\le 2\sqrt{2}$) 위의 점 P.

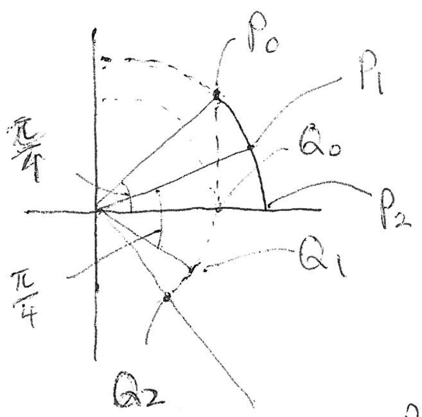
$\overline{OQ}=2$, $\angle POQ=\frac{\pi}{4}$. 직선 OP의 아랫부분 점 Q.

$\overline{OP}$ 위의 점 X, $\overline{OQ}$ 위의 점 Y.

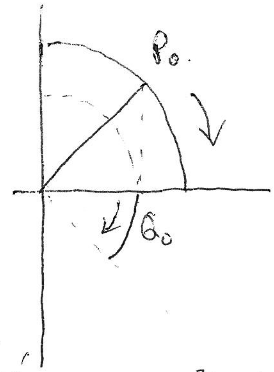
$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OY}$

점 Z가 나타내는 영역 D.

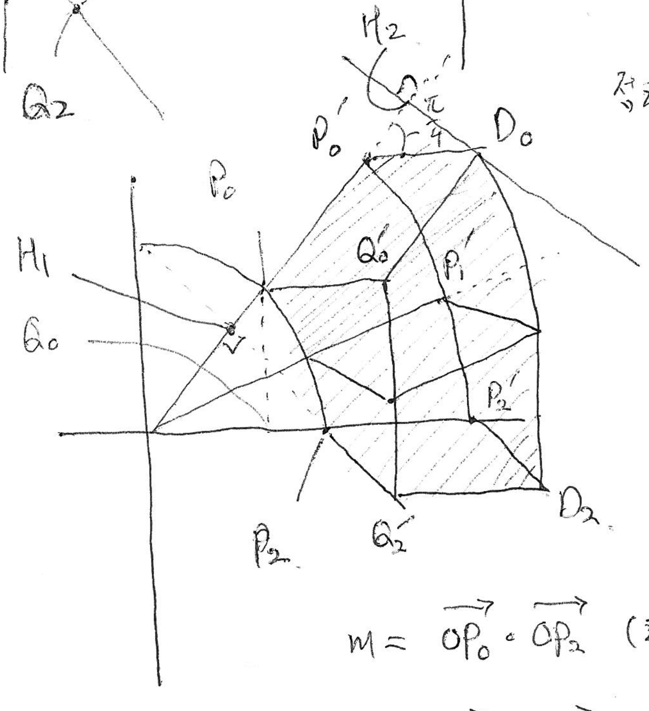
영역 D에서 y축까지의 거리 최소인 점 R.



∴



∴



점 Z가 나타내는 영역 D는 왼쪽 그림에서 빗금친 부분이다. ∴ $R=P_0$

$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OZ}$은 선분 OR (=선분 OP_0)의 길이와 직선 OR에 정사영된 OH_K의 곱이므로

$m=\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OP_2}$ (최솟값을 갖는 점 Z는 하나가 아님에 주의)

(선분 P_2Q_2' 위의 모든 점)

$M=\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OD_0}$

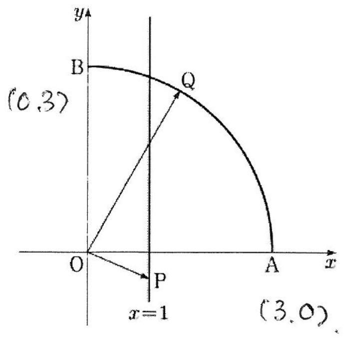
($D_0(6,4)$이다)

∴ $m=(2,2)\cdot(2\sqrt{2},0)=4\sqrt{2}$, $M=(2,2)\cdot(6,4)=20$.

∴ $20+4\sqrt{2}$ //

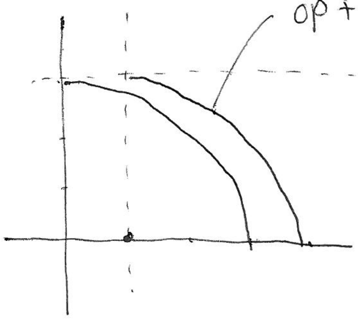
* 곡선 P_0P_2와 $P_0'P_2'$은 원의 형태의 일부분이고, 곡선 Q_0Q_2'과 D_0D_2는 원이 아니다.

* 2020학년도 평가원 6월 수학 가형 18번.



$|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값을 $f(a)$. $f(a)=5$인 a값들의 곱?

ex) $a=0$

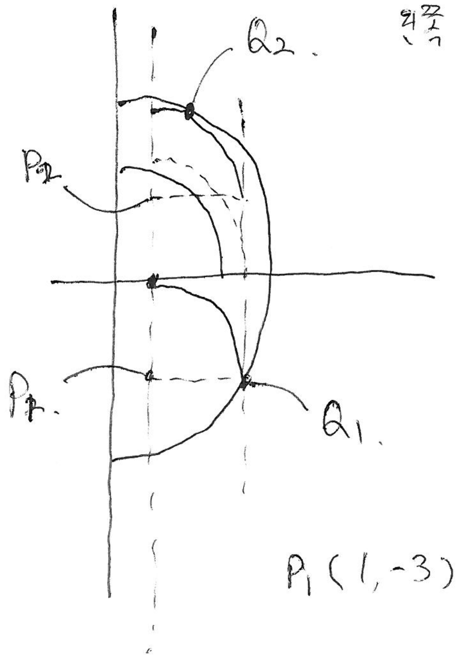


그러므로 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$ 의

$M=4$. $m=\sqrt{10}$.

이 때 $M=4=f(0)$이 된다.

따라서 $f(a)=5$인 경우는



왼쪽 그림과 같이 2가지 경우가 가능하고, 점Q에서 최댓값 $f(a)=5$가 성립한다. $Q_1(4,-3)$은 바로 확인 가능하고, Q_2는 바로 확인하기는 힘들지만 P_2를 확인할 수 있다. Q_2에서 $x^2+y^2=5^2$과 $(x-1)^2+(y-a)^2=3^2$이 접해야 하므로 $\overline{P_2Q_2}+\overline{OP_2}=5$. $\therefore \overline{OP_2}=2$. $\therefore P_2(1,\sqrt{3})$.

$P_1(1,-3)$이므로 모든 a값들의 곱은 $(-3)\times\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$ //

$\overline{OQ_2}=5$, $\overline{P_2Q_2}=3$으로 고정. $\therefore \overline{OP_2}=2$이다.

$(4,3)$에서 Q점이 형성되면 (즉, $P(1,3)$이면) 최댓값이 아니고 최솟값이 5가 된다.