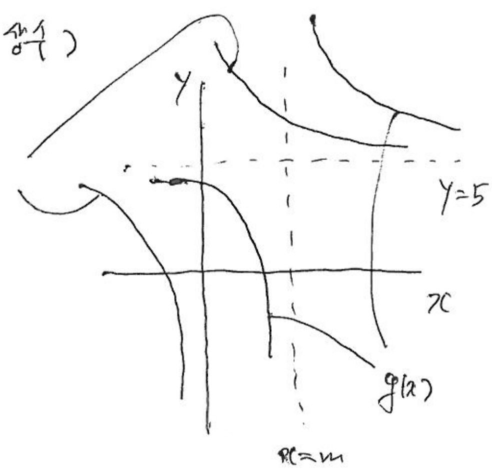
* 2018년10월 시행 교육청 고3수학 나형21번.

$f(x)=\frac{k}{x}+5$ ( $k>0$, $k$는 상수 ), $g(x)=\frac{k}{x-m}+5$ ( $m>0$, $m$은 상수 )




(가) $g(a)=b$, $g(b)=a$인 서로 다른 두 실수 $a$, $b$ 존재.

$\frac{k}{a-m}+5=b$, $\frac{k}{b-m}+5=a$.

$k=(b-5)(a-m)$, $k=(a-5)(b-m)$.

$a\neq b$, $a\neq m$, $b\neq m$ ( $a-m\neq b-m$ )

$\therefore\ \cancel{ab}-5a-bm+\cancel{5m}=\cancel{ab}-5b-am+\cancel{5m}$ 에서 $(a-b)m=5(a-b)$ $\therefore\ m=5$.

(나) 열린구간 $(0,m)=(0,5)$ 에서 정의된 함수 $\frac{1}{f(x)-g(x)}$의 $Max=\frac{5}{24}$이다.

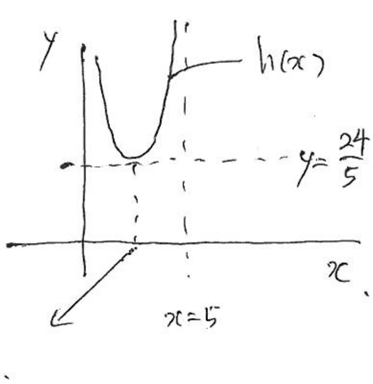
⇒ 열린구간 $(0,5)$에서 정의된 함수 $f(x)-g(x)$의 $min=\frac{24}{5}$이다.

$\therefore\ f(x)-g(x)=h(x)$라 할 때, $h(x)=\frac{k}{x}-\frac{k}{x-5}=\frac{-5k}{x(x-5)}$ ( 분자부분은 상수(고정), 분모부분은 변수 )

$\therefore$ $x(x-5)$가 열린구간 $(0,5)$에서 최솟값을 가질 때 $h(x)$가 최소가 된다. ( ∵ 분자부분 고정된 상수가 음수값 )

$\therefore\ x(x-5)=x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$ 에서 $x=\frac{5}{2}$ ( $0<\frac{5}{2}<5$ ) 에서 최솟값을 가지므로 $\frac{24}{5}=\frac{-5k}{\frac{5}{2}\times\left(-\frac{5}{2}\right)}=\frac{5k}{\frac{25}{4}}=\frac{4k}{5}$. $\therefore\ k=6$. $g(x)=\frac{6}{x-5}+5$. $g(9)=\frac{13}{2}$ //

* $h(x)=\frac{-5k}{x(x-5)}$




1) $x\in(0,5)$

2) $\lim_{x\to0+}h(x)=\frac{-5k}{0(-)}=\infty(+)$

$\lim_{x\to5-}h(x)=\frac{-5k}{0(-)}=\infty(+)$.

3) $\left(1,\frac{5k}{4}\right)$, $\left(2,\frac{5k}{6}\right)$, $\left(3,\frac{5k}{6}\right)$, $\left(4,\frac{5}{4}k\right)$ → $x=\frac{5}{2}$ 대칭.

이와 같이 구할 수도 있고, 접선의 기울기도 사용 가능하다.