* 2018년 10월 시행 교육청 고3수학 가형 21번.

$f(x) = -\dfrac{kx^3}{(x^2+1)}$ $(k>1)$

1) $x \in R$

2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

3) $(0,0)$

$\to$ 3중근 형태.

$f(x) = -f(-x)$

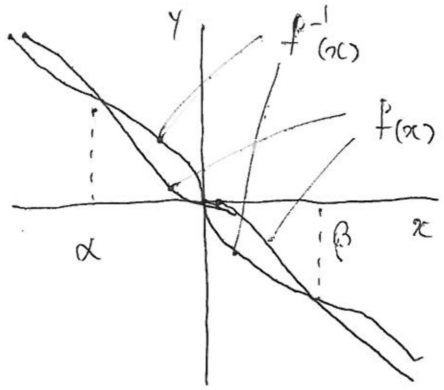
4)

개형추론.

5) $f'(x) = -\dfrac{(3kx^2(x^2+1) - 2kx^4)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-kx^4-3kx^2}{(x^2+1)^2} \leq 0$ $\to$ $f(x)$는 감소함수.

$$f''(x) = \frac{(-4kx^3-6kx)(x^2+1)^2 - (-kx^4-3kx^2)\cdot 4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{-4kx^5-4kx^3-6kx^3-6kx+4kx^5+12kx^3}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{2kx^3-6kx = 2kx(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$ $\to$ 변곡점 3개.



원점대칭이므로 $\alpha+\beta=0$ ······ ①

$(\alpha, f(\alpha)) = (\alpha, -f(-\alpha))$, $(\beta, f(\beta)) = (-\alpha, -f(-\beta))$

$\to (f(\alpha), \alpha)$

($\because$ $x=\alpha$, $x=\beta$는 원함수와 역함수의 교점의 x좌표)

각 점들을 연결한 직선은 동일하므로

$$\frac{\alpha+f(-\alpha)}{f(\alpha)-\alpha} = \frac{-f(-\beta)-f(\alpha)}{-2\alpha}$$

$$\therefore -(\overset{f(\alpha)}{f(-\beta)} + f(\alpha)) \times (f(\alpha)-\alpha) = -2\alpha(\alpha + \overset{-f(\alpha)}{f(-\alpha)})$$

$2f(\alpha)(f(\alpha)-\alpha) = 2\alpha(\alpha-f(\alpha))$ $\to$ $\dfrac{f(\alpha)}{\alpha} = \dfrac{\alpha-f(\alpha)}{f(\alpha)-\alpha} = -1$ ($\because$ $\alpha<0$, $f(\alpha)>0$, $f(\alpha)\neq\alpha$)

따라서 $f(\alpha)=-\alpha$, $f(\beta)=-\beta$, $\alpha<0$, $\beta>0$ ·········· ②

증가하는 함수인 경우 원함수와 역함수의 교점은 $y=x$ 위에 나타나고, 감소하는 함수인 경우 $y=-x+k$ 에서 나타난다. 이 문제의 경우 원점대칭이므로 바로 $(\alpha,-\alpha)$, $(\beta,-\beta)$ 형태로 교점을 설정할 수도 있다.

$f(x-2\beta)+2\alpha$ 의 역함수 $g(x)$ → 함수표현식이 복잡할 때는 새로운 형태로 설정한다.

$f(x-2\beta)+2\alpha = h(x)$. $\quad h'(x) = f'(x-2\beta)$

$h(g(x)) = g(h(x)) = x \quad$ ($f(x) = -f(-x)$ 이므로 $f'(x) = f'(-x)$)

$h'(g(x))\cdot g'(x) = g'(h(x))\cdot h'(x) = 1$. $\quad h'(\beta) = f'(-\beta) = f'(\beta)$

$h(\beta) = f(-\beta)+2\alpha = -f(\beta)-2\beta = -\beta = \alpha$

$f'(\beta) = 2g'(\alpha)$ 이므로 $\quad (h(\beta) = \alpha)$

$g'(h(\beta))\cdot h'(\beta) = 1$ 에서 $h'(\beta) = f'(\beta) = \dfrac{1}{g'(h(\beta))} = \dfrac{1}{g'(\alpha)} = 2g'(\alpha)$

$\therefore g'(\alpha) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $f'(\beta) = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ ($\because$ $f(x)$는 감소함수, $h(x)$는 감소함수, $g(x)$는 감소함수)

$$\left.\begin{array}{l} f(\beta) = -\beta \\ f'(\beta) = -\sqrt{2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} -\dfrac{k\beta^3}{\beta^2+1} = -\beta. \ \therefore \beta^3+\beta = k\beta^3,\ \beta^2+1 = k\beta^2\ (\beta\neq 0). \ \therefore \beta^2 = \dfrac{1}{k-1}\ (k>1) \\ \dfrac{-k\beta^4-3k\beta^2}{(\beta^2+1)^2} = -\sqrt{2}. \ \therefore \sqrt{2}(\beta^4+2\beta^2+1) = k\beta^4+3k\beta^2 \end{array}$$

$$\therefore \sqrt{2}\times\left(\frac{1}{(k-1)^2}+\frac{2}{k-1}+1\right) = \frac{k}{(k-1)^2}+\frac{3k}{k-1}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}k-2\sqrt{2}+\sqrt{2}k^2-2\sqrt{2}k+\sqrt{2}}{(k-1)^2} = \frac{k+3k^2-3k}{(k-1)^2}$$

$$\therefore \sqrt{2}k^2 = 3k^2-2k. \ \rightarrow (3-\sqrt{2})k^2-2k = \{(3-\sqrt{2})k-2\} = 0$$

따라서 $k = \dfrac{2}{3-\sqrt{2}} = \dfrac{2(3+\sqrt{2})}{7} = \dfrac{6+2\sqrt{2}}{7}$ //