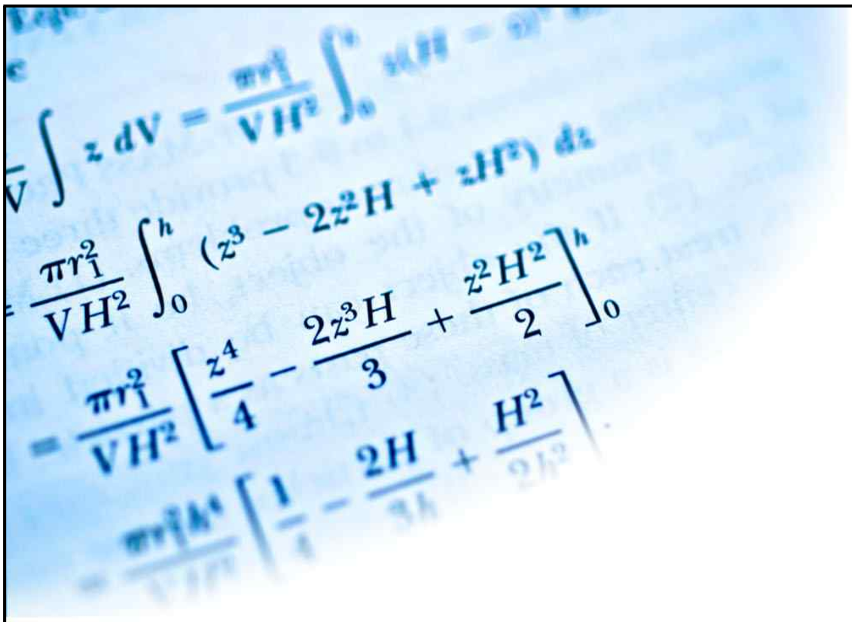
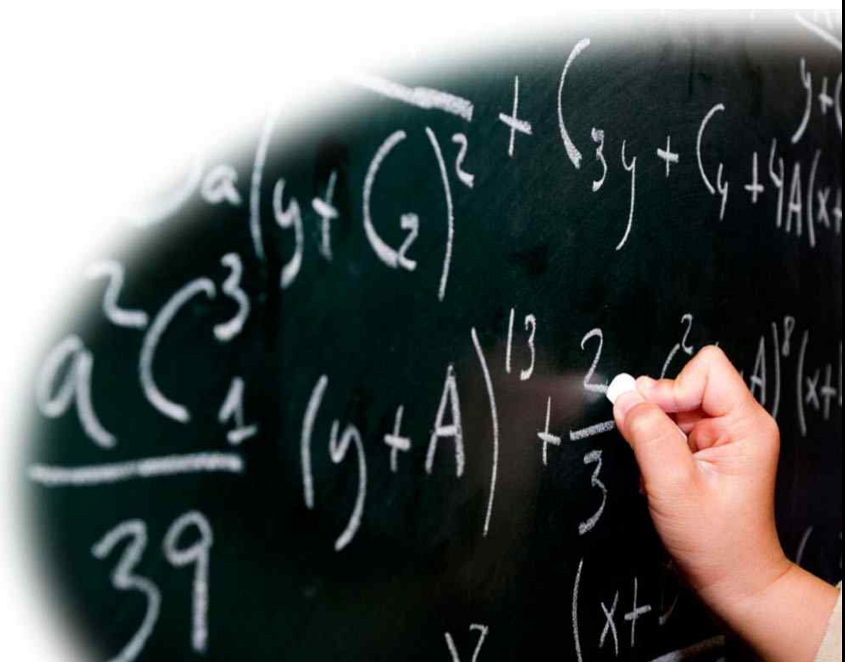


수학 시험의 기술

- 4월 모의고사, 그리고 수능



MediVa

들어가기

* 시험기간 때문에 3월 모의고사 분석을 완성하지 못했는데, 4월 모의고사가 다가오니 차라리 4월 모의고사 대비 자료를 만드는 것이 나을 것 같아서 내용을 바꿨습니다. 역시 연재 형식으로 갈 것이며, 이 파일의 내용은 『수학 시험의 기술』(쏠티북스 출간예정) 내용에 근거해서 만들어진 것임을 밝힙니다.
* 이 자료는 수리(나)형에 초점이 맞추어져 있습니다. 하지만 수리(가)형에도 해당하는 내용이므로 (가)형 분들도 참고하셔도 좋습니다.

3월 모의고사가 끝난 지 얼마 된 것 같지도 않은데 4월 모의고사다. 수능이 다가오는 소리가 들리는가? 곧 6월 모의고사라는 거대한 장벽이 기다리고 있겠지만, 그 앞에 있는 교육청 모의고사라고 해서 그리 만만하지만은 않을 것이다.

일단 명심해 둘 것은, **수능을 출제하는 교육과정평가원과 이 모의고사를 출제하는 교육청은 서로 다른 기관**이라는 것을 알아 두자. 다시 말하면, 올해 수능을 예측하고 전국에서의 내 위치를 알아보기 위한 지표로 가장 적합한 것은 교육과정평가원에서 출제하는 "6월 모의평가"와 "9월 모의평가"이며, 평가원이 아닌 교육청에서 출제하는 나머지 모의평가는 자신의 위치를 가늠하는 잣대로 사용해서는 안 된다는 것이다.

4월 모의고사를 대비한다는 것은 사실 큰 의미가 없다. 어차피 수능을 대비하는 입장에서 우리의 최종 목표는 수능이지 모의고사가 아니기 때문이다. 하지만 반대로 생각하면 4월 모의고사를 대비하는 것은 수능을 대비하는 것이나 다름없기 때문에, 4월 모의고사는 다른 의미에서 중요하다고 볼 수도 있다.

이 대비 자료에서는 2012년 수능을 치른 수험생들이 봤던 <2011년 고3 4월 모의고사>의 기출문제와 수능·평가원 기출문제를 함께 살펴보면서 4월 모의고사와 시험을 동시에 대비할 수 있도록 할 생각이다. 당장 눈앞에 닥친 시험을 생각하기보다 우리의 1년 끄트머리에 있는 마지막 최종보스, 수능을 생각하며 중간 과정 하나하나에 성실하게 임해 보도록 하자.

기출 확인하기

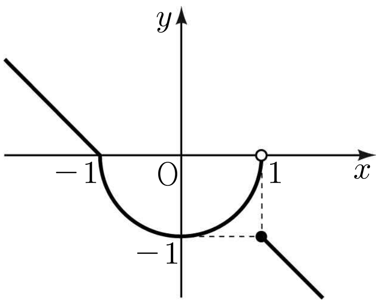
1. 함수의 극한과 연속성 그래프 해석하기 [2011년 4월 모의고사 21번]

2. 행렬의 성질 정오 판별하기 [2011년 4월 모의고사 11번]

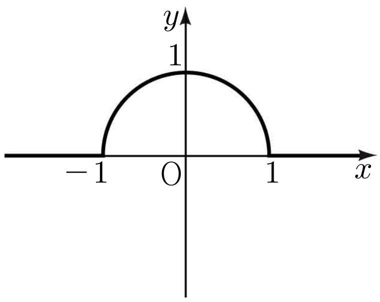
3. 처음 보는 수열의 규칙 찾기 [2011년 4월 모의고사 27번]

* 공략할 기출은 변동이 있을 수 있습니다.

21. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



$y=f(x)$



$y=g(x)$

〈보 기〉

ㄱ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $(f \circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $(g \circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

미통기가 처음으로 출제범위에 포함된 2012년 수능에서는 비교적 쉬운 좌극한과 우극한 문제가 출제되었다. 2011년 4월 모의고사에서도 볼 수 있듯이 함수의 극한과 연속 문제는 어느 시험에든 빠지지 않고 등장하는 유형이다. 쉽게 나오면 한없이 쉽게 나오지만, 변형은 얼마든지 가능하므로 긴장을 늦추지 않아야 한다. 시험에 자주 출제되는 함수의 극한과 연속 + 그래프 유형은 다음 세 가지로 압축할 수 있다. 이 내용은 우리의 군주 평가원님께서 출제하고자 하는 바에 따라 우주전쟁급 문제가 될 수도 있고, 평온한 문제가 될 수도 있다. 하나하나 살펴보자.

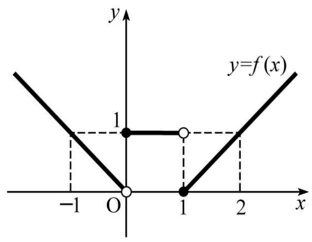
❶ 극한값 구하기
❷ 합성함수의 극한값 구하기
❸ 불연속점의 개수 구하기

❶ 극한값 구하기

개념 적용 예제 01

함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} -x & (x<0) \\ 1 & (0 \leq x < 1) \\ x-1 & (x \geqq 1) \end{cases}$로 정의되었다.

[2005 서울시교육청 10월 변형]



① $f(1)$　② $f(0)$　③ $f(-1)$

④ $\lim_{x \to 1+0} f(x)$　⑤ $\lim_{x \to 0+0} f(x)$　⑥ $\lim_{x \to -1+0} f(x)$

⑦ $\lim_{x \to 1-0} f(x)$　⑧ $\lim_{x \to 0-0} f(x)$　⑨ $\lim_{x \to -1-0} f(x)$

[풀이]

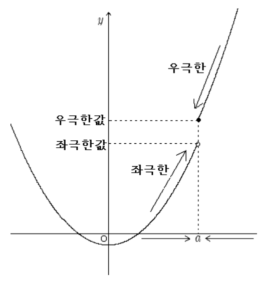
먼저 답을 공개한다. 함숫값이야 쉽게 구할 수 있었을 것이다.

함숫값 구하기 ➡ ① $f(1)=0$　② $f(0)=1$　③ $f(-1)=1$

좌극한 구하기 ➡ ④ $\lim_{x \to 1+0} f(x)=0$　⑤ $\lim_{x \to 0+0} f(x)=1$　⑥ $\lim_{x \to -1+0} f(x)=1$

우극한 극하기 ➡ ⑦ $\lim_{x \to 1-0} f(x)=1$　⑧ $\lim_{x \to 0-0} f(x)=0$　⑨ $\lim_{x \to -1-0} f(x)=1$

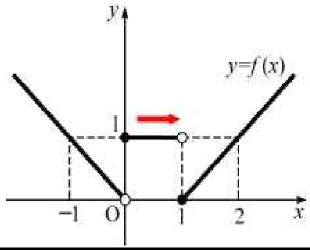
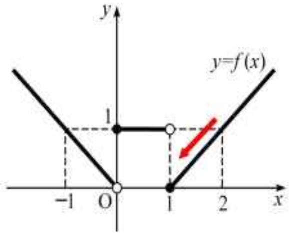
그렇다면 좌극한값과 우극한값을 어떻게 구하는가? 정의를 살펴보면 쉽게 알 수 있다.



① 좌극한 $\lim_{x \to a-0} f(x)=\alpha$: x가 a보다 작은 값($x<a,\ x \neq a$)을 가지면서 a에 한없이 가까이 갈 때의 극한값

② 우극한 $\lim_{x \to a+0} f(x)=\alpha$: x가 a보다 큰 값($x>a,\ x \neq a$)을 가지면서 a에 한없이 가까이 갈 때의 극한값

극한은 '한없이 가까워지는 것'이다. 너랑 너 여자친구가 가깝다고 해서 (너)=(너 여자친구)인 것이 아닌 것처럼 가까워 진다고해서 같은 것은 아니다.($x \neq a$) 다음 그림의 화살표처럼 a의 좌극한은 x가 a보다 작은 방향에서, a의 우극한은 x가 a보다 큰 방향에서 a에 가까워지는 것이다.

좌극한 $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 1$ 1의 왼쪽에서 1에 접근한다. 	**우극한** $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 1$ 1의 오른쪽에서 1에 접근한다. 

화살표 따라가다 보면 좌극한은 흰 점으로, 우극한은 까만 점으로 접근한다. 그래서 1의 좌극한값은 1, 1의 우극한값은 0이다. 이때 흰 점의 경우, 함숫값은 존재하지 않지만 극한값은 존재한다는 것을 알아야 한다. 즉, 함숫값과 극한값은 별개인 것이다. 또한 좌극한값과 우극한값이 존재한다고 해서 극한값이 존재하는 것은 아니다. (좌극한값)=(우극한값)일 때 비로소 극한값이 존재한다. 그런데, 위의 예는 좌극한값과 우극한값이 서로 다르므로 극한값 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$는 존재하지 않는다.

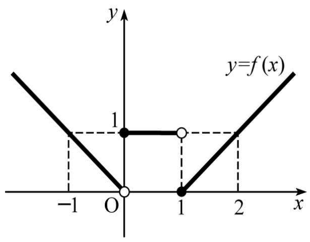
이를 정리하면 다음과 같다.

좌극한값과 우극한값이 존재하고 일치한다. ⇔ **극한값이 존재한다.** 즉, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$

❷ 합성함수의 극한값 구하기

개념 적용 예제 02

함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} -x & (x<0) \\ 1 & (0 \leqq x < 1) \\ x-1 & (x \geqq 1) \end{cases}$로 정의되었다.



[2005 서울시교육청 10월 변형]

① $f(f(1))$ ② $\lim_{x\to 1+0} f(f(x))$ ③ $\lim_{x\to 1-0} f(f(x))$

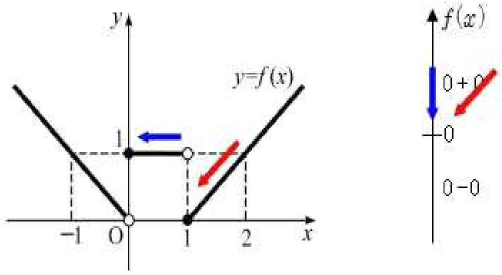
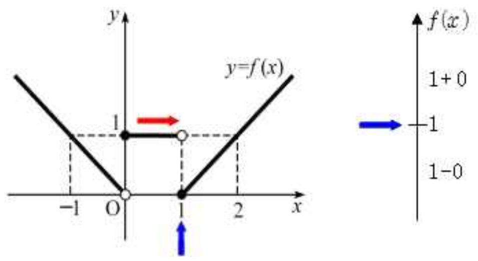
④ $f(f(f(1)))$ ⑤ $\lim_{x\to 1+0} f(f(f(x)))$ ⑥ $\lim_{x\to 1+0} f(f(f(x)))$

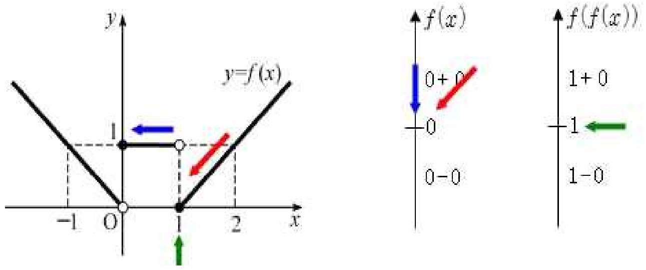
다음은 이 문제를 접했을 때 보일 수 있는 세 가지 반응이다. 님은 어떻게 반응했는가?

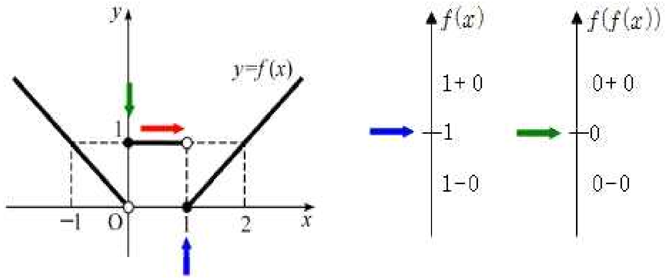
함숫값은 그냥 계속 대입하면 된다. 즉, $f(f(1))=f(0)=1$, $f(f(f(1)))=f(f(0))=f(1)=0$

항상 시험에 출제되는 유형이니 이번 기회에 확실히 이해하고 넘어가길 바란다.

다음 그림에서 화살표를 읽는 순서는 **빨간색**→**파란색**→**초록색**이다.

$\lim_{x\to 1+0} f(f(x))$	 ❶ $f(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓는다. ➡ 이젠 $\lim_{t\to\square} f(t)$의 극한값을 구하면 된다. ❷ $x\to 1+0$일 때 $f(x)=t$가 어떻게 움직이는지 확인한다. ➡ $t\to 0+0$ ❸ 결국, $\lim_{x\to 1+0} f(f(x)) \to \lim_{t\to 0+0} f(t)$가 되고 그 극한값은 1이다.
$\lim_{x\to 1-0} f(f(x))$	 ❶ $f(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓는다. ➡ 이젠 $\lim_{t\to\square} f(t)$의 극한값을 구하면 된다. ❷ $x\to 1-0$일 때 $f(x)=t$는 항상 1이다. ➡ $t=1$ ❸ 이때는 극한값이 아닌 $t=1$일 때의 $f(t)$의 함숫값을 구하면 된다. 즉, $f(1)=0$이다.

<table>
<tr>
<td>$\lim_{x\to1+0} f(f(f(x)))$</td>
<td>


❶ $f(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓는다. ➡ 이젠 $\lim_{t\to\square} f(f(t))$의 극한값을 구하면 된다.
❷ $x\to1+0$일 때 $f(x)=t$가 어떻게 움직이는지 확인한다. ➡ $t\to0+0$
❸ $\lim_{x\to1+0} f(f(f(x))) \to \lim_{t\to0+0} f(f(t))$가 된다.
❹ $f(f(t))$에서 $f(t)=k$로 놓는다. ➡ 이젠 $\lim_{k\to\square} f(k)$의 극한값을 구하면 된다.
❺ $t\to0+0$일 때 $f(t)=k$는 항상 1이다. ➡ $k=1$
❻ 이때는 극한값이 아닌 $k=1$일 때의 $f(k)$의 함숫값을 구하면 된다. 즉, $f(1)=0$이다.
</td>
</tr>
<tr>
<td>$\lim_{x\to1-0} f(f(f(x)))$</td>
<td>


❶ $f(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓는다. ➡ 이젠 $\lim_{t\to\square} f(f(t))$의 극한값을 구하면 된다.
❷ $x\to1-0$일 때 $f(x)=t$는 항상 1이다. ➡ $t\to1$
❸ 이때는 극한값이 아닌 $t=1$일 때의 $f(f(t))$의 함숫값을 구하면 된다.
즉, $f(f(1))=f(1)=1$이다.
</td>
</tr>
</table>

다음 역시 합성함수의 극한 문제이다. 그러나 아쉽게도 두 함수 중에서 하나의 함수는 그래프를 그려주지 않았다. 이때는 그려주지 않은 그래프를 그려 풀 수도 있지만 식만으로도 해결이 가능하다.

개념 적용 예제 03

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 다음 극한값을 구하여라. [2011 평가원 6월 변형]

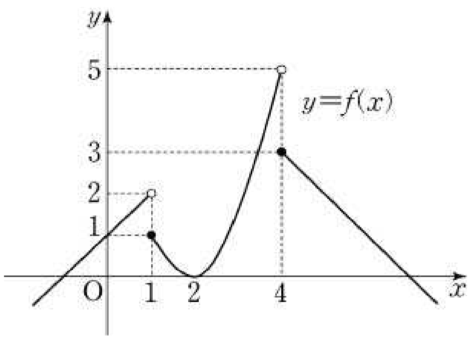
① $\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$

② $\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$

③ $\lim_{t\to0} f(t^2+1)$

④ $\lim_{t\to0} f(\cos t)$

⑤ $f(\lim_{t\to0} \cos t)$



[풀이]

<table>
<tr><th>문제</th><th colspan="2">구하는 과정</th><th>극한값</th><th>설명</th></tr>
<tr><td rowspan="2">① $\lim\limits_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)$</td><td>$k=\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$</td><td>$t\to\infty$</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="4">분수함수의 그래프를 그리는 대신 식을 변형하여 극한값을 구할 수 있다. 단, 부호를 고려하여 좌극한인지 우극한인지 살펴보아야 한다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$t>0$일 때 $-\frac{2}{t+1}<0$ ➡ $\lim\limits_{k\to1-0} f(k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">② $\lim\limits_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$</td><td>$k=\frac{4t-1}{t+1}=4-\frac{5}{t+1}$</td><td>$t\to-\infty$</td><td rowspan="2">3</td></tr>
<tr><td colspan="2">$t<0$일 때 $-\frac{5}{t+1}>0$ ➡ $\lim\limits_{k\to4+0} f(k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">③ $\lim\limits_{t\to0} f(t^2+1)$</td><td>$k=t^2+1$</td><td>$t\to0$</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="4">식을 변형하여 극한값을 구하기 어려우면 함수 $k=t^2+1$, $k=\cos t$의 그래프를 그려 확인하는 것도 하나의 방법이다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$t\neq0$일 때 $t^2>0$ ➡ $\lim\limits_{k\to1+0} f(k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">④ $\lim\limits_{t\to0} f(\cos t)$</td><td>$k=\cos t$</td><td>$t\to0$</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td colspan="2">$t\neq0$일 때 $\cos t<1$ ➡ $\lim\limits_{k\to1-0} f(k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">⑤ $f(\lim\limits_{t\to0}\cos t)$</td><td colspan="2">$\lim\limits_{t\to0}\cos t=1$</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">이 유형은 극한값의 함숫값을 구하는 경우로 조심하 필요가 있다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">f(정해진 값) ➡ $f(1)$</td></tr>
</table>

❸ 다양한 함수의 연속성 판단

(극한값)=(함숫값)이면 연속이므로, 극한값을 구할 수만 있다면 연속인가에 대한 판단은 식은 죽먹기다.

다음처럼 연속은 (좌극한값, 우극한값) → 극한값, 함숫값을 모두 구하여 판단해야 한다.

<table>
<tr><td>좌극한값</td><td>우극한값</td><td rowspan="2">함숫값</td></tr>
<tr><td colspan="2">(좌극한값)=(우극한값)이면 극한값이 존재한다.</td></tr>
<tr><td colspan="3">(극한값)=(함숫값)이면 연속이다.</td></tr>
</table>

연속성 문제가 어려운 이유는 연속성을 묻는 함수가 두 함수의 합, 차, 곱, 몫으로 이루어지거나 합성함수, 절댓값 기호를 포함한 함수처럼 매우 다양하기 때문이다. 여기서는 곱을 통한 변형만 다루도록 하자.

연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속이다.

$kf(x)$, $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}\,(g(a)\neq0)$

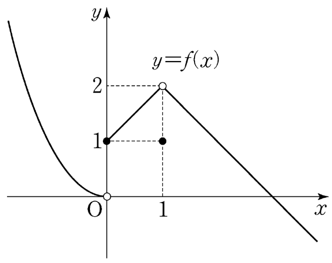
<두 함수의 곱으로 이루어진 함수>

어떤 점에서 두 함수가 연속이면 두 함수의 곱으로 만들어진 함수 역시 그 점에서 연속이다. 그러나 어떤 한 함수가 어떤 점에서 불연속이면 두 함수의 곱으로 만들어진 함수는 그 점에서 연속일 수도 있고 불연속일 수도 있다.

개념 적용 예제 04

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2012 수능]

ㄷ. 함수 $(x-1)f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.



[풀이]

$x=1$에서 함수 $y=f(x)$는 불연속이고 함수 $y=x-1$는 연속이다.

그러나 두 함수의 곱으로 이루어진 함수 $(x-1)f(x)$가 $x=1$에서 연속인지 아닌지는 $x=1$에서의 함숫값, 좌극한값, 우극한값을 모두 확인해 보아야 한다.

<table>
<tr><th></th><th>$f(x)$</th><th>$x-1$</th><th>$(x-1)f(x)$</th></tr>
<tr><td>함숫값($x=1$)</td><td>1</td><td rowspan="4">0</td><td rowspan="4">0</td></tr>
<tr><td>좌극한값($x\to1-0$)</td><td rowspan="3">2</td></tr>
<tr><td>우극한값($x\to1+0$)</td></tr>
<tr><td>극한값($x\to1$)</td></tr>
</table>

이렇게 표를 만들면 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속임을 쉽게 알 수 있다.

다음처럼 특정한 한 점이 아닌 **구간에서 연속**인지 아닌지를 물어보는 경우가 있다.

"ㄷ. 함수 $(x-1)f(x)$ 는 모든 실수에 대해서 연속이다."

이때는 모든 실수에 대해서 연속인지 물었기 때문에 정의역 안에 있는 '모든 불연속점'을 조사해야 한다.

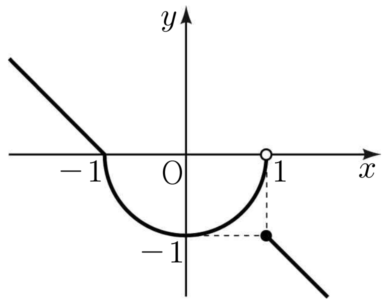
함수 $y=x-1$은 모든 실수에 대해서 연속이므로 불연속함수 $y=f(x)$의 $x=0$에서 연속인지 아닌지를 알아 보아야 한다.

<table>
<tr><th></th><th>$f(x)$</th><th>$x-1$</th><th>$(x-1)f(x)$</th></tr>
<tr><td>함숫값($x=0$)</td><td>1</td><td rowspan="3">-1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>좌극한값($x\to-0$)</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>우극한값($x\to+0$)</td><td>1</td><td>-1</td></tr>
</table>

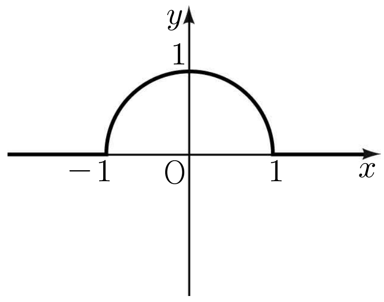
결국, $x=0$에서 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

따라서 함수 $(x-1)f(x)$는 모든 실수에 대해서 연속이 아니다.

21. 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



$y=f(x)$



$y=g(x)$

〈보 기〉

ㄱ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$ 에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $(f\circ g)(x)$는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=-1$ 에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 모두 $x=1$에서 연속이기 때문에, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$, $\lim\limits_{x\to1}g(x)=g(1)$을 만족한다.

$\lim\limits_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)=0$이므로 연속의 정의에 따라서 $x=1$에서 연속이다. → (참)

ㄴ. $x\to0$일 때, $g(x)\to1-0$이다. 따라서 $\lim\limits_{x\to0}f(g(x))=\lim\limits_{t\to1-0}f(t)$로 생각할 수 있다.

$\lim\limits_{t\to1-0}f(t)=0$이므로, $\lim\limits_{x\to}(f\circ g)(x)=0$이다.

한편 함숫값인 $f(g(0))=-1$이므로 $x=0$에서 연속이 아니다. → (거짓)

ㄷ. $x\to-1+0$일 때, $f(x)\to0-0$이고, $x\to-1-0$일 때, $f(x)\to0+0$이다. 따라서 경우를 나눠서 생각해야 한다.

x와 $f(x)$ 관계			t와 $g(t)$ 관계	
$x\to-1+0$	$f(x)\to0-0$	$f(x)=t$로 치환	$t\to0-0$	$g(t)\to1-0$
$x\to-1-0$	$f(x)\to0+0$		$t\to0+0$	$g(t)\to1-0$

결과적으로 $g(t)\to1$인 것이나 다름없으므로, $\lim\limits_{x\to-1}g(f(x))=1$이다.

$g(f(-1))=1$이므로 $\lim\limits_{x\to-1}g(f(x))=g(f(-1))=1$이다.

따라서 $x=-1$에서 연속이다. → (참)

답 : ③