Get 독 · 설 · 해

29. [주예지T 3월 Stage 모의고사 29번]

$f(1)=0$이고 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$가

$$\left\{\int_{-1}^{k} f(t)\,dt\right\}^2 + \int_{-1}^{k} f(t)\,dt = 0 \quad (k=1,\ 2)$$

를 만족시킬 때, $f(11)$의 값을 구하시오.

1st Step **독해**	**[조건]** ① $f(1)=0$: 등식 1개 ② 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$: 등식 3개 필요, 여차하면 계산 ③ $\left\{\int_{-1}^{k} f(t)\,dt\right\}^2 + \int_{-1}^{k} f(t)\,dt = 0 \ (k=1,\ 2)$: 등식 2개가 나와야 한다. **[구하는 값]** ④ $f(11)$ 의 값 : $f(x)$를 결정해야 한다.
2nd Step **설계**	② ①에 의해 $f(x)=a(x-1)(x-p)\ (a>0)$이라 할 수 있다. 이때, $p>1$, $p=1$, $p<1$의 세 가지 경우로 이차함수의 개형을 분류할 수 있다. ③ $\left\{\int_{-1}^{k} f(t)\,dt\right\}^2 + \int_{-1}^{k} f(t)\,dt = \int_{-1}^{k} f(t)\,dt \times \left\{\int_{-1}^{k} f(t)\,dt + 1\right\} = 0$이므로 $\int_{-1}^{k} f(t)\,dt = -1$ 또는 $\int_{-1}^{k} f(t)\,dt = 0$ 이어야 한다. $k=1$, 2이므로 가능한 경우는 총 4가지가 있다. 이때, 이차함수 $f(x)$가 결정되려면 등식 2개가 더 필요하므로 4가지 경우 중 1가지만 조건을 만족시킬 것을 예상할 수 있다. 이제 정적분이 포함된 식을 어떻게 다룰지 결정해야 하는데 **정적분의 기하적 의미** 중 넓이의 관점으로 보는 것과 **정적분으로 나타내어진 함수**의 관점으로 보는 것이 모두 가능한 상황이다.

〈 Solution 1 〉

3rd Step
해결

③ 먼저 정적분의 기하적 의미를 활용하여 주어진 조건을 해석해보자.
넓이의 관점으로 해석을 하려면 이차함수 $f(x)$의 그래프를 그려야 하므로 p의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 생각하자.

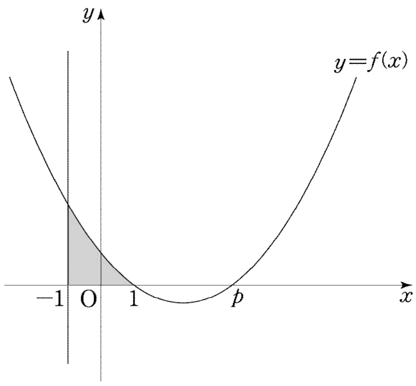
ⅰ) $p=1$인 경우

함수 $f(x)=a(x-1)^2$이므로 $\int_{-1}^{k} f(t)\,dt>0\ (k=1,\ 2)$이다.

따라서 주어진 조건에 모순이다.

ⅱ) $p>1$인 경우

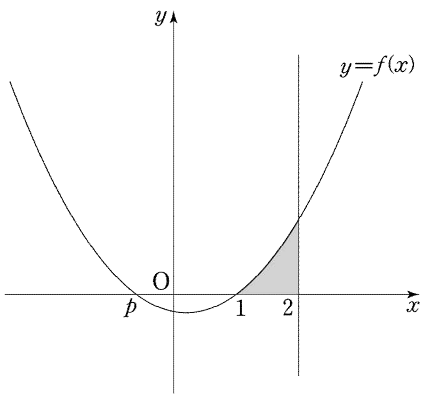
함수 $f(x)=a(x-1)(x-p)$의 그래프는 다음과 같다.



그림과 같이 $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt>0$이므로 주어진 조건에 모순이다.

ⅲ) $p<1$인 경우

함수 $f(x)=a(x-1)(x-p)$의 그래프는 다음과 같다.



주어진 조건을 만족시키기 위해 $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt=-1,\ \int_{-1}^{2} f(t)\,dt=0$이어야 한다.

따라서 등식 2개로 이차함수 $f(x)=a(x-1)(x-p)$를 결정할 수 있고,

계산해보면 $a=\frac{3}{4},\ p=-1$이므로 $f(11)=\frac{3}{4}\times 10\times 12=90$이다.

〈 Solution 2 〉

3rd Step

해결

③ $g(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ 라 하면 $g(-1)=0$, $g'(x)=f(x)$, $g'(1)=f(1)=0$ 이다.

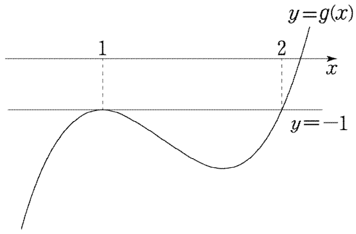
또한, 삼차함수 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시켜야 한다.

$$\int_{-1}^{k} f(t)\,dt=-1 \text{ 또는 } \int_{-1}^{k} f(t)\,dt=0 \quad (k=1,\ 2)$$

$$\Leftrightarrow\ g(k)=-1 \text{ 또는 } g(k)=0 \quad (k=1,\ 2)$$

ⅰ) $g(1)=-1$, $g(2)=-1$ 인 경우

삼차함수 $g(x)$ 가 $g(-1)=0$, $g(1)=-1$, $g'(1)=0$, $g(2)=-1$ 을 만족시켜야 한다.



그런데 위의 그림과 같이 $g(1)=-1$, $g'(1)=0$, $g(2)=-1$ 일 경우 $g(-1)<0$ 이므로 네 조건을 동시에 만족시키는 삼차함수 $g(x)$ 는 존재하지 않는다. 마찬가지로 $g(1)=g(2)=0$ 인 삼차함수 $g(x)$ 가 존재하지 않는다는 것을 알 수 있다.

ⅱ) $g(1)=-1$, $g(2)=0$ 인 경우

삼차함수 $g(x)$ 가 $g(-1)=0$, $g(1)=-1$, $g'(1)=0$, $g(2)=0$ 을 만족시켜야 한다. $g(1)=-1$, $g'(1)=0$ 이므로 $g(x)=a(x-1)^2(x-p)-1$ 이라 하면

$$g(-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4a(-1-p)-1=0$$
$$g(2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad a(2-p)-1=0$$

이다. 따라서 $a=\frac{1}{4}$, $p=-2$ 이다. 즉, $g(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2(x+2)-1$ 이다.

(참고) 삼차함수의 그래프의 비율 관계 중 $1:2$ 를 활용하면

$$g(x)=a(x+1)^2(x-2),\ g(1)=-1$$

임을 쉽게 파악할 수 있다.

ⅲ) $g(1)=0$, $g(2)=-1$ 인 경우

삼차함수 $g(x)$ 가 $g(-1)=0$, $g(1)=0$, $g'(1)=0$, $g(2)=-1$ 을 만족시켜야 한다. $g(1)=g'(1)=0$, $g(-1)=0$ 이므로

$$g(x)=a(x-1)^2(x+1) \quad (a>0)$$

이다. 그런데 $g(2)=3a=-1$ 이므로 $a>0$ 에 모순이다.

(참고) 이는 그래프를 통해서도 쉽게 관찰할 수 있다.

따라서 삼차함수 $g(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2(x+2)-1$ 이므로 $g'(11)=f(11)=90$ 이다.