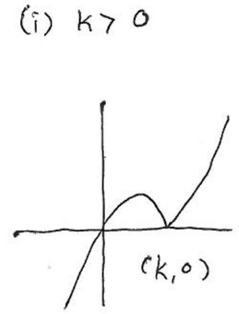
* 2019학년도 사관학교 수학 나형 21번.

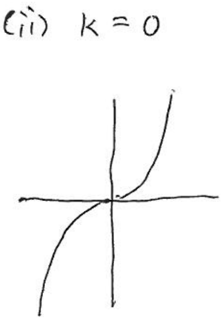
$f(x) = x|x-k|$

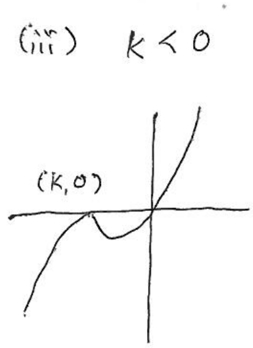
1) $x \in R$ 2) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

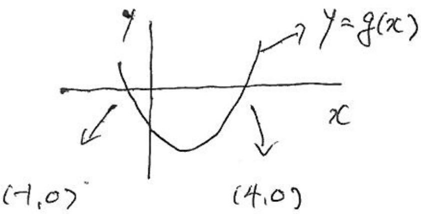
3) $(0,0)$, $(k,0)$







$g(x) = x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$



$h(k)$는 $g \circ f(x)$와 x축과의 교점의 개수.

→ 방정식 $g \circ f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수.

$g(\triangle) = 0$에서 $\triangle = -1$ or 4. $\therefore$ $f(x) = -1$ or 4의 서로 다른 실근의 개수 $\Rightarrow h(k)$

$f(x)$에서 대칭축을 먼저 확인한다. ($\because$ 대칭축 주변에서 y값의 변화방향이 달라지므로 먼저 정리)

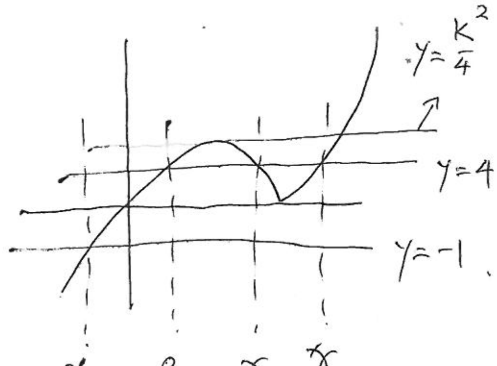
(i) $k>0$, 꼭짓점은 $\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{4}\right)$, (ii) $k=0$, 꼭짓점 없음. (iii) $k<0$, 꼭짓점은 $\left(\frac{k}{2}, -\frac{k^2}{4}\right)$

$\therefore$ (i)-1. $f(x) = -1$. → 실근 1개.

(i)-2. $f\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{k^2}{4} > 4$ → 서로 다른 실근 3개. → ex)

$= 4$ → 〃 2개.

< 4 → 〃 1개.



$\therefore$ $k>4$, $h(k)=4$, $k=4$, $h(k)=3$, $0<k<4$. $h(k)=2$.

(ii) $f(x)=-1$, $f(x)=4$ → 각각 실근 1개씩. $\therefore$ $k=0$, $h(k)=2$.

(iii)-1, $f(x)=4$ → 실근 1개.

(iii)-2, $f\left(\frac{k}{2}\right) = -\frac{k^2}{4} > -1$ → 서로 다른 실근 1개

$= -1$ → 〃 2개.

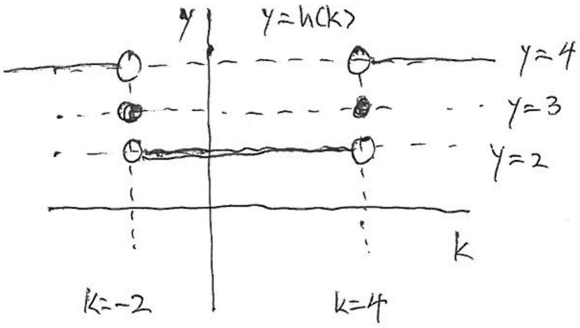
< -1 → 〃 3개.

$\therefore$ $k<-2$, $h(k)=4$

$k=-2$, $h(k)=3$,

$-2<k<0$. $h(k)=2$.

(i), (ii), (iii) 에 의한 함수 $h(k)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ) $h(2)=2$ → True.

ㄴ) $h(k)=4$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 5.

→ False.

ㄷ) $h(k)=3$을 만족시키는 모든 실수 k의 집합은

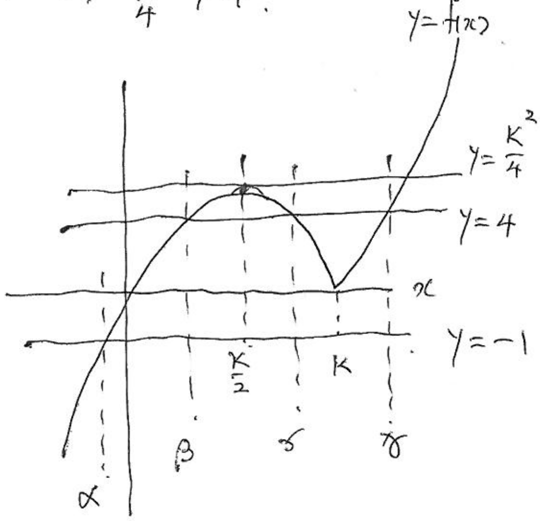
$\{-2, 4\}$. ∴ 그 합은 2. → True.

* 합성함수의 그래프를 (직접) 생각해 본다면 ......

$x \to f(x) \to g(x)$.

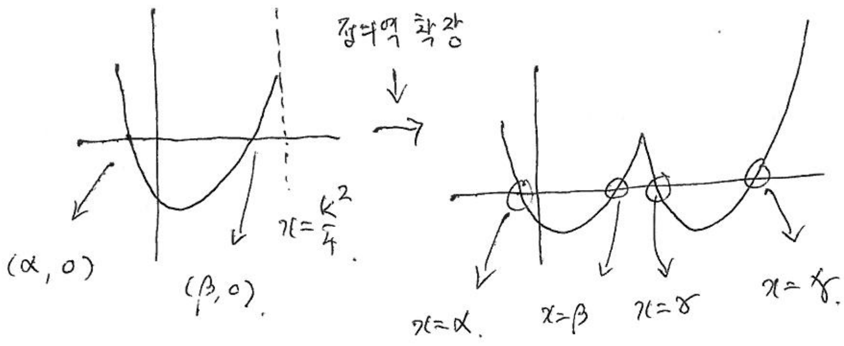
$(g(x)=(x+1)(x-4))$

(i)-1. $\frac{k^2}{4} > 4$.

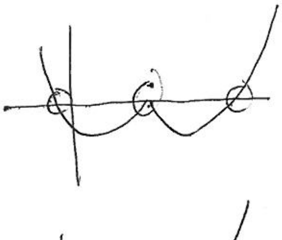


$(-\infty, \frac{k}{2})$ in x of $f(x)$ or in x under $f(x)$

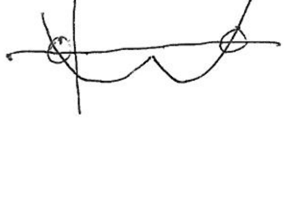
$\to (-\infty, \frac{k^2}{4})$ in x under $g(x)$.



(i)-2.



(i)-3



(ii), (iii)은 직접 해볼것.

합성함수 그래프는 $g(x)$의 개형만 유사할 뿐, 곡률은 많이 다를 수 있음에 주의.