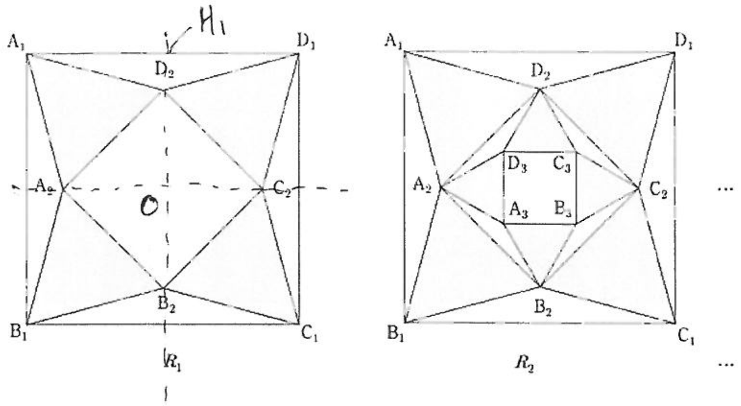
* 2019학년도 사관학교 수학 나형 19번.



1) $n: 4 \to 4$. ∴ $n=1$.

정사각형의 중심을 O라 하고, $\overline{A_1D_1}$의 중점을 H_1이라 하고, $\overline{H_1D_2}=a$라 하자.

이 때, $\triangle A_1D_2D_1$은 이등변삼각형,

$\triangle A_2OD_2$는 직각이등변삼각형이므로 $\angle(A_1D_2H_1)=75^\circ$, $\angle(A_2D_2O)=45^\circ$.

∴ $\angle A_2D_2A_1=60^\circ$, $\angle D_2A_2A_1=60^\circ$. ∴ $\triangle A_1A_2D_2$는 정삼각형이다.

$\overline{D_2O}=\overline{A_2O}=1-a$, ∴ $\overline{A_2D_2}=(1-a)\cdot\sqrt{2}$, $\overline{A_1D_2}=\sqrt{\overline{A_1H_1}^2+\overline{H_1D_2}^2}=\sqrt{1+a^2}$.

$\overline{A_2D_2}=\overline{A_1D_2}$이므로 $2(1-a)^2=2-4a+2a^2=1+a^2$에서 $a^2-4a+1=0$.

∴ $a=\dfrac{4\pm\sqrt{12}}{2\cdot 1}$에서 $a=2-\sqrt{3}$ (∵ $a<1$)

2) $l: 2 \to (1-a)\sqrt{2}$ ∴ $l_r=\dfrac{\sqrt{2}\times(\sqrt{3}-1)}{2}$, $S_r=\dfrac{2\times(4-2\sqrt{3})}{4}=2-\sqrt{3}$.

3) 초항 a는 한 변의 길이가 $(1-a)\sqrt{2}=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)=\sqrt{6}-\sqrt{2}$인 정삼각형 4개의

넓이이므로 $4\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2=\sqrt{3}\times(8-4\sqrt{3})=8\sqrt{3}-12$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r\times n}=\frac{8\sqrt{3}-12}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{4(2\sqrt{3}-3)}{\sqrt{3}-1}=\frac{4(2\sqrt{3}-3)(\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$=\frac{4}{2}\times(6-3+2\sqrt{3}-3\sqrt{3})=2\times(3-\sqrt{3})=6-2\sqrt{3}\ //$$