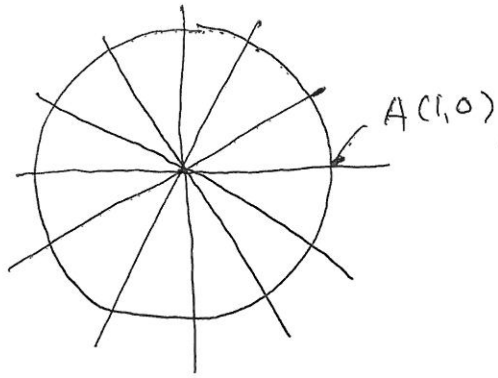
* 2019학년도 사관학교 수학 가형 28번.

전체 All : ${}_{11}C_2 = 55$.

$A(1,0)$, $B\left(\cos\frac{m}{6}\pi,\ \sin\frac{m}{6}\pi\right)$, $C\left(\cos\frac{n}{6}\pi,\ \sin\frac{n}{6}\pi\right)$

$(m<n)$.



$\overline{AB} = \overline{BC} \rightarrow (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10) \cdots$ ①

$\overline{AB} = \overline{AC} \rightarrow (1,11), (2,10), (3,9), (4,8), (5,7) \cdots$ ②

$\overline{BC} = \overline{AC} \rightarrow (2,7), (4,8), (6,9), (8,10), (10,11) \cdots$ ③

$\therefore \frac{13}{55}$ // $(m,n)=(4,8)$인 경우 정삼각형이 된다.

$$\Rightarrow \overline{AB}^2 = \left(\cos\frac{m}{6}\pi - 1\right)^2 + \left(\sin\frac{m}{6}\pi\right)^2 = 2 - 2\cos\frac{m}{6}\pi$$

$$\overline{AC}^2 = \left(\cos\frac{n}{6}\pi - 1\right)^2 + \left(\sin\frac{n}{6}\pi\right)^2 = 2 - 2\cos\frac{n}{6}\pi$$

$$\overline{BC}^2 = \left(\cos\frac{n}{6}\pi - \cos\frac{m}{6}\pi\right)^2 + \left(\sin\frac{n}{6}\pi - \sin\frac{m}{6}\pi\right)^2 = 2 - 2\cos\frac{n}{6}\pi\cos\frac{m}{6}\pi - 2\sin\frac{n}{6}\pi\sin\frac{m}{6}\pi = 2 - \cos\left(\frac{n}{6}\pi - \frac{m}{6}\pi\right)$$

(i) $\frac{m}{6}\pi = \frac{n}{6}\pi \rightarrow$ 없음 ($\because m<n$)

(ii) $\frac{m}{6}\pi = 2\pi - \frac{n}{6}\pi \rightarrow$ ②

(iii) $\frac{m}{6}\pi = \frac{n}{6}\pi - \frac{m}{6}\pi \rightarrow$ ①

(iv) $\frac{m}{6}\pi = 2\pi - \frac{n}{6}\pi + \frac{m}{6}\pi \rightarrow$ 없음.

(v) $\frac{n}{6}\pi = \frac{n}{6}\pi - \frac{m}{6}\pi \rightarrow$ 없음.

(vi) $\frac{n}{6}\pi = 2\pi - \frac{n}{6}\pi + \frac{m}{6}\pi \rightarrow$ ③

$\therefore$ 15개에서 정삼각형인 경우 3가지 중 2가지를 제외시키면 총 13가지.

$\therefore \frac{13}{55}$에서 $p+q=68$ //

← 삼각방정식의 일반해의 형태를 생각할 것.

(왜 (i) ~ (vi)로 분류했는가?)

* 삼각방정식의 일반해

임의의 정수 n에 대하여 다음 각 삼각방정식의 한 특수해가 α일 때 (일반적으로 방정식의 해 중에서 절댓값이 가장 작은 것을 α로 잡는다)

1) $\sin x = a \ (|a| \leq 1) \rightarrow x = n\pi + (-1)^n \alpha$

2) $\cos x = a \ (|a| \leq 1) \rightarrow x = 2n\pi \pm \alpha$

3) $\tan x = a \ (-\infty < a < \infty) \rightarrow x = n\pi + \alpha$

→ 원래 일반해는 주기에서 시작하므로 sine 함수, sine 방정식 역시 $2n\pi$로 정리되지만 특성상 $(-1)^n$을 활용하면 더 간단해지고, 일반적으로 sine 방정식의 일반해는 위와 같이 설명한다.

→ 문제에서 $1 \sim 11$ 까지이므로 cosine의 일반해를 활용할 때, $2n\pi \pm \alpha$에서 $n=0$일 때, $n=1$일 때로 나눠서 적용해야 한다.