* 2019학년도 사관학교 수학 가형 29번.

평면 α : $2x+y+2z-9=0$

구 S : $(x-4)^2+(y+3)^2+z^2=2=(\sqrt{2})^2$.

구의 중심을 C라 하면 $C(4,-3,0)$이고

평면과의 거리는 $\dfrac{|8-3+0-9|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{4}{3}\ (<\sqrt{2})$.

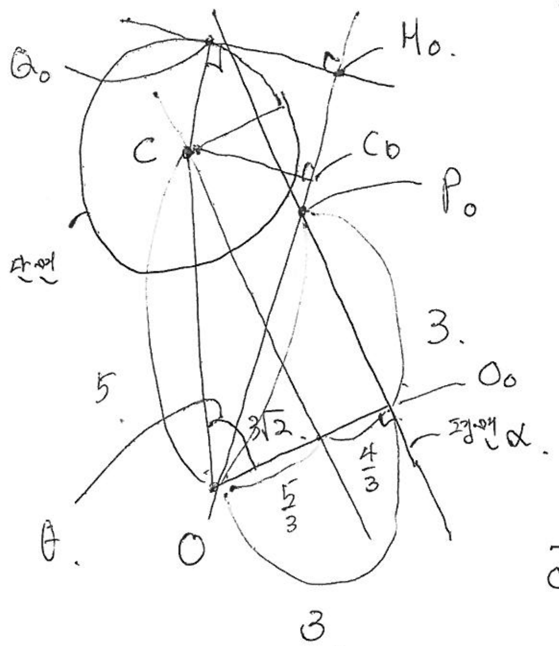
$|\overrightarrow{OP}|\le 3\sqrt{2}$인 α 위의 점 P, 구 위의 점 Q.

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{2}$.

$\overline{OC}=5$.

원점 O와 평면 α의 거리는 $\dfrac{|-9|}{3}=3$.

점 P는 평면 α 위에서 반지름 3인 원과 원 내부의 점으로 나타난다.



$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 값이 최대일 때 P를 P_0, Q를 Q_0라 하면

왼쪽 그림에서 P_0와 Q_0에 해당한다.

$\therefore\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overline{OP_0}\times\overline{OH_0}$.

$\angle COO_0=\theta$라 하면 $\left(\cos\theta=\dfrac{1}{3},\ \sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$\overline{OC_0}=5\times\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$. $\left(\because \angle H_0OO_0=\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$\overline{CQ_0}=\overline{C_0H_0}=\sqrt{2}$ 이므로

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\overline{OP_0}\times\overline{OH_0}=\overline{OP_0}\times(\overline{OC_0}+\overline{C_0H_0})$

$=3\sqrt{2}\times\left(5\times\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\right)$

$=3\sqrt{2}\times\left(5\times\left(\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\sqrt{2}\right)$

$=3\sqrt{2}\times\left(5\times\dfrac{(4+\sqrt{2})}{6}+\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2}\times\dfrac{20+11\sqrt{2}}{6}$

$=\dfrac{22+20\sqrt{2}}{2}=11+10\sqrt{2}$ //