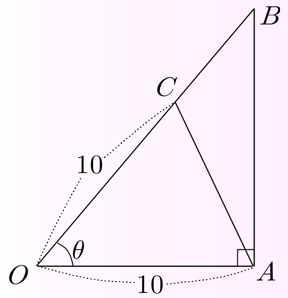
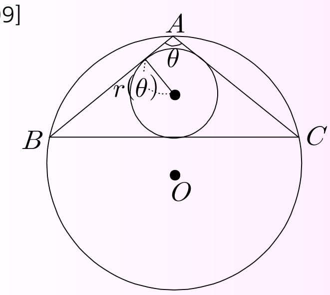
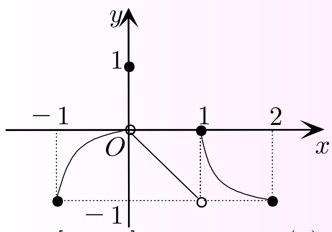
도형의 성질, 사인정리를 활용하여 식을 세워 극한값을 계산하라.

Critical Point 07	easy	difficult
문제	그림과 같이 양수 θ에 대하여 $\angle AOB=\theta$, $\angle OAB=\frac{\pi}{2}$, $\overline{OA}=10$인 직각삼각형 OAB가 있다. 변 OB 위에 있는 $\overline{OC}=10$인 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 둘레의 길이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오. [2009.6] 	반지름의 길이가 1인 원 O 위에 점 A가 있다. 그림과 같이 양수 θ에 대하여 원 O 위의 두 점 B, C를 $\angle BAC=\theta$이고 $\overline{AB}=\overline{AC}$가 되도록 잡는다. 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to\pi-0}\frac{r(\theta)}{(\pi-\theta)^2}=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [2009] 
풀이의 공통성 — **도형의 성질, 사인정리를 활용하여 식을 세워라.**	직각삼각형 OAB에서 삼각비를 활용하면 $\overline{AB}=10\tan\theta$, $\overline{OB}=10\sec\theta$이므로 $\overline{BC}=10(\sec\theta-1)$ 이등변삼각형 OAC의 O에서 변 AC에 수선의 발을 내리면 $\overline{AC}=20\sin\frac{\theta}{2}$이다. 따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $20\sin\frac{\theta}{2}+10\tan\theta+10(\sec\theta-1)$이다.	사인정리를 활용하면 $\overline{BC}=2\sin\theta$ 이등변삼각형 ABC에서 내접원의 중심을 O'라 하면 $\angle O'BC=\frac{\pi-\theta}{4}$이므로 $r(\theta)=\sin\theta\tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right)$
풀이의 공통성 — **극한값을 계산하라.**	$\lim\limits_{x\to+0}\frac{f(\theta)}{\theta}=$ $\lim\limits_{x\to+0}\frac{20\sin\frac{\theta}{2}+10\tan\theta+10(\sec\theta-1)}{\theta}=20$	$\lim\limits_{\theta\to\pi-0}\frac{r(\theta)}{(\pi-\theta)^2}=\lim\limits_{\theta\to\pi-0}\frac{\sin\theta\tan\left(\frac{\pi-\theta}{4}\right)}{(\pi-\theta)^2}=$ $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\sin t\tan\frac{t}{4}}{t^2}=\frac{1}{4}$
차이점과 관련 심화특강	1. 직각삼각형에서의 삼각비, 이등변삼각형의 성질을 활용하면 된다. 2. 극한값을 계산할 때, 근사를 이용하면 매우 빠르다. **[심화특강15: 0으로 가는 속도와 근사]**	1. 직각삼각형에서의 삼각비, 사인정리, 내접원의 반지름 구하기를 활용하면 된다. 여기서 사인정리를 활용해야하므로 easy문제보다 난이도가 훨씬 높다. 2. 극한값을 계산할 때, 근사를 이용하면 매우 빠르다. 직관을 활용해서 계산할 수도 있다. **[심화특강15: 0으로 가는 속도와 근사]** **[심화특강19: 직관적 극한의 논리적 서술법]**
풀이의 공통성을 확인해야하는 문제 (동일 CP 문항)	18~20, 22, 25~27, 29~34, 36	

저자의 조언

1. 대부분의 문제가 직각삼각형의 삼각비, 원주각 중심각의 성질, 이등변삼각형의 성질로 해결할 수 있다.
   사인 정리나 코사인 법칙이 활용되면 매우 어려운 문제로 구분할 수 있다.

정의를 활용하거나, 그래프를 그려서 극한값, 연속성을 확인하라.

<table>
<tr><th colspan="2">Critical Point 08</th><th>easy</th><th>difficult</th></tr>
<tr><td colspan="2">문제</td><td>함수 $f(x)$는 구간 $(-1, 1]$에서
$f(x)=(x-1)(2x-1)(x+1)$
이고, 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(x+2)$
이다. $a>1$에 대하여 함수 $g(x)$가
$g(x)=\begin{cases} x & (x \neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$
일 때, 합성함수 $(f \circ g)(x)$가 $x=1$에서 연속이다. a의 최솟값은? [2008.6]</td><td>폐구간 $[-1, 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.


폐구간 $[-1, 2]$에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를
$g(x)=\dfrac{f(x)+\lvert f(x)\rvert}{2}$,
$h(x)=\dfrac{f(x)-\lvert f(x)\rvert}{2}$
으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2009.6]
ㄱ. $\lim_{x \to 1} h(x)$는 존재한다.
ㄴ. 함수 $(h \circ g)(x)$는 폐구간 $[-1, 2]$에서 연속이다.
ㄷ. $\lim_{x \to 0} (g \circ h)(x)=(g \circ h)(0)$</td></tr>
<tr><td>풀이의 공통성</td><td>그래프를 그리거나 극한값, 연속의 정의에 따라 확인하라.</td><td>$x=1$에서 연속이 되어야 하므로 정의에 따라 $\lim_{x \to 1}(f \circ g)(x)=(f \circ g)(1)$을 확인하자.
$\lim_{x \to 1}(f \circ g)(x)=\lim_{x \to 1} f(x)=0$
$f(g(1))=f(a)$
따라서 $f(a)=0$이 되어야 한다. 즉 $a=\dfrac{5}{2}$</td><td>“[분석 및 해제]와 함께 보세요.”

먼저 $g(x)$와 $h(x)$의 그래프를 그리면
극한의 정의에 따라 ㄱ을 확인,
연속의 정의에 따라 ㄴ, ㄷ을 확인
하면 ㄴ만 참이 됨을 알 수 있다.</td></tr>
<tr><td colspan="2">차이점과 관련 심화특강</td><td>1. 그래프를 그릴 필요 없이 정의만으로 바로 해결할 수 있다.

2. 합성함수의 개형으로 해결할 수도 있다.
[심화특강22: 사칙연산 그래프의 논리]</td><td>1. 먼저 $g(x)$와 $h(x)$의 그래프를 그린 후 정의를 활용해서 문제를 해결해야 한다.
[심화특강04: 절댓값 그래프의 논리]

2. 합성함수의 개형으로 해결할 수도 있다.
[심화특강22: 사칙연산 그래프의 논리]</td></tr>
<tr><td colspan="2">풀이의 공통성을 확인해야하는 문제 (동일 CP 문항)</td><td colspan="2">01~05, 09~11, 14~16, 37</td></tr>
</table>

저자의 조언

1. 어려운 문제든 쉬운 문제든 항상 CP의 공통 알고리즘이 적용됨을 알 수 있고,
   이를 깨우치면 모든 수능 문제를 어렵지 않게 같은 원리로 해결할 수 있다.
2. 극한값의 존재성, 연속의 정의, 미분가능의 정의는 수능과 평가원 모의고사에 적어도 하나는 무조건 출제가 되니,
   확실하게 정의를 암기해둬야 한다.

모두 수렴하는 형태로 표현하여 극한의 성질을 적용하라.

Critical Point 09		easy	difficult
문제		$\lim_{\theta\to0}\frac{\sec2\theta-1}{\sec\theta-1}$의 값은? [2006]	연속함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^p}=q$이다. $p+q$의 값은? (단, $p>0$, $q>0$이다.) [2008.6]
풀이의 공통성	모두 수렴하는 형태로 표현하라.	$\lim_{\theta\to0}\frac{\sec2\theta-1}{\sec\theta-1}=$ $\lim_{\theta\to0}\left(\frac{1-\cos2\theta}{1-\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\cos2\theta}\right)=$ $\lim_{\theta\to0}\left\{\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right\}\left(\frac{\cos\theta}{\cos2\theta}\right)=$ $\lim_{\theta\to0}\left\{\frac{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2}{\left(\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}\left(\frac{\cos\theta}{\cos2\theta}\right)$	$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^p}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}\times\frac{1-\cos(x^2)}{x^p}=$ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}\times2\frac{\sin^2\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^p}$ $=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}\times2\frac{\left\{\frac{\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\left(\frac{x^2}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right)\right\}^2}{x^p}=$ $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}\times\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\left(\frac{x^2}{2}\right)}\right\}^2\left(\frac{x^4}{x^p}\right)$이 0이 아닌 값으로 수렴해야 하므로 $\left(\frac{x^4}{x^p}\right)$만 0이 아닌 값으로 수렴하면 lim를 분배할 수 있다. 따라서 $p=4$
	극한의 성질을 적용하라.	$\left\{\frac{(1)^2}{(1)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right\}\left(\frac{1}{1}\right)=4$	$2\times\left(\frac{1}{2}\right)\{1\}=1$
차이점과 관련 심화특강		1. 두 극한 모두 0으로 가는 근사를 통해 빠르게 해결할 수 있다. **[심화특강15: 0으로 가는 속도와 근사]**	
풀이의 공통성을 확인해야하는 문제 (동일 CP 문항)		01, 06~08, 12, 13, 17, 21, 23, 24, 28, 35	

저자의 조언

1. 기출 예제 02, 기출 예제 03 또한 함수의 극한의 성질을 적용하는 중요한 문제이니 함께 봐두자.
   (기출 예제 02는 극한의 성질을 적용해야하는 가장 어려운 문제로 손꼽힌다.)

기출문제의 분석이란..

수능 시험장에서 치는 시험과 기출문제의 가장 큰 차이점은,
"풀어봤던 문제인가 안 풀어 봤던 문제인가?"
입니다.
대부분 당해년도 수능은 고2 학생들이 겨울방학 이내로 한 번 씩은 풀어봅니다.
그런데, 여기서 고2 학생들이 수능시험을 풀어놓고, 풀 때의 힘겨움은 생각하지 않습니다.
(대부분 시간을 재고 푸는 것이 아닌, 배운 부분까지 적당히 풀 수 있는 문제대로 풀기 때문이죠)
그리고 인터넷 강의를 통하여 해설 강의를 듣습니다.
그리고 2~3개월쯤 시간이 흐릅니다.
문제 풀이의 핵심 아이디어, 혹은 풀이 알고리즘 중 일부가 희미하게 기억이 납니다.
처음 문제 풀었을 때에는

$$A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to H \to I \to J \to K$$

와 같은 과정으로 풀었다면, 3개월쯤 지나면

$$B \to G \to K$$

정도만 기억에 남습니다.
그리고 그 이후에 기출문제를 풀 때에는 $B \to G \to K$ 의 과정으로 문제를 풀게 됩니다.
사람들은 B를 생각 못해서, G를 생각 못해서 시험장에서는 못 풀었다고 합니다.
$A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to H \to I \to J \to K$ 가 복잡 했던 것은 생각하지 않고,
머릿속에 남은 풀이과정이 $B \to G \to K$로 푸는 것이라서 쉽다고 느껴지는 것뿐입니다.
이걸 뒷북수학이라 합니다.
수험생들은 어떻게 하면 $B \to G \to K$처럼 풀어볼까 고민만 할 뿐입니다.
그렇게 되면, 한번 풀어봤던 킬러문제는 쉽게 느껴집니다.
알고리즘이 짧게 느껴집니다.
결국 가장 중요한건 $B \to G \to K$가 아니고, $B \to G$ 사이의 C~F까지의 풀이과정이고,
결국 다음번에 시험에 낼 때에는 $B \to G \to K$로 절대 내지 않습니다.

$$A \to B \to C \to D \to E \to X \to Y \to Z$$

와 같이 변형하거나,

$$X \to Y \to Z \to G \to H \to I \to J \to K$$

와 같은 방식으로 변형하게 됩니다.

따라서 기출문제의 잔상이 수능시험에서는 하등의 도움이 되지 않는 것입니다.
기출문제의 분석이란, 기출문제 풀이과정 속에서

$$A \to B \to C \to D \to E \to F \to G \to H$$

$$A \to B \to C \to D \to E \to X \to Y \to Z$$

의 **공통성을 찾고 그 공통성을 체화하여 다음번 시험 때에 $A \to B \to C \to D \to E$ 를 추론하는 것**에
시간을 최소화하는 것이지, $B \to G \to K$를 기억하는 것이 아닙니다.
반드시 기억하시기 바랍니다.
2011수능으로 예를 들어본다면,
사차함수의 $|f(x)-t|$가 $y=t$에서 접어 올린다는 것을 기억하고,
사차함수의 개형이 UU임을 기억하고, 식을 $y=(x-a)^2(x-b)^2$ 꼴로 세우는 것이
$B \to G \to K$에 해당하는 풀이입니다. 사실 그 사이에는 엄청나게 많은 미분 이야기들이 숨어 있는데 말입니다.
즉, $|f(x)-t|$가 $y=t$에서 접어 올린다는 말을 무심코 넘기지 마시고, 어떻게 그렇게 되었는지에 대해 추론하는 연습을 해봐야 합니다. 그 추론과정을 이해하는 데에는 문제를 처음 만났을 때의 사고과정을 통해 얻어가야 합니다.
그리고 그 반복성을 타 평가원 기출문제를 통해 찾아내는 것. 그것이 기출분석입니다.

(pnmath.com의 포카칩's source를 인용했습니다.)

이 글은 기출문제의 핵심 분석방법을 담고 있는 매우 좋은 글 입니다.
이 글의 $A \to B \to C \to D \to E$이 한완수의 Critical Point에 해당합니다. 이제까지 기출문제를 잘 못 공부하고 있던 분들은 지금이라도 방법을 바꾸시길 바랍니다.