

질문이 자주 들어오는 내용입니다. (킬러 잘 푸는 방법 / 기출 킬러 분석법)
칼럼에 예시를 하나 들어서 설명하면 괜찮을 것 같아서
제 인생 첫 수학 칼럼을 써봅니다.

아이러니하게도

191130은 킬러치고는 빠르고 깔끔한 풀이가 거의 전무한 문제입니다. (WTF?)

대부분의 풀이법이 비슷하고, 빠른 풀이가 거의 없다고 봐도 무방합니다.
(물론 그래도 킬러 중 가장 노잼인 20학년도 6 9 수능 30번보다는 할 이야기가 많습니다.)

제가 올리는 풀이가 다른 분들의 풀이와 크게 다르진 않을 것 같아요.
(제 실력이 아직 부족해서,,)

이번 칼럼의 핵심은

킬러 풀이를 최대한 깔끔하고, 불필요한 계산을 줄이는 형태로 푸는 방법입니다.

그래서 이번 칼럼의 예상 독자를 2~4등급으로 설정했고, 설명도 매우 디테일하게 했습니다.

잡소리는 여기까지하고, 이제 시작해보겠습니다.

191130의 풀이를 매우 디테일하게 나눠서 총 6개의 토픽으로 설명드릴건데, 그 토픽들을 먼저 간단히 소개하겠습니다.

(1 2 3 4 5번은 좀 중요한데, 6번은 매우 디테일한 부분에서 도움이 되는 내용이라서 그닥 쓸모있지는 않습니다.)

이러한 토픽들은 독학서 or 기출분석 or 실전개념 강의 or 과외 등을 통해서 알 수 있습니다.

저와 같은 지식을 가진 상태에서 191130을 풀게 하는 것이 제 목적이기 때문에
대부분은 알고 계실 내용이지만, 혹시 모르는 분들이 있을 것 같아서 ㅎㅎ

1. 항등식을 다루는 방법
2. 합성함수의 극대 극소 판정
3. 케이스 분류 및 모순 찾기 (이건 그냥 별 내용 없고 글자 그대로입니다.)
4. 삼각함수의 단위원 해석
5. 도함수의 정적분과 원함수 극값 차의 관계
6. 합성함수의 미분계수 깔끔하게 구하는 방법

이에 대한 내용을 먼저 간략히 설명하고 191130 풀이에 들어가겠습니다.

1. 항등식을 다루는 방법

항등식을 다루는 방법은 총 4가지입니다.

대입, 미분, 적분, 합성

(대신 미분을 하려면 미분가능이, 적분을 하려면 연속이 전제되어 있어야겠죠?)

다른 말로 이 내용을 해석하면

-> “저 4가지 중 무조건 하나 이상은 쓰인다.”입니다.

또한, 문제 조건 or 구해야 하는 값에 알맞게 저 4가지의 방법 중 가장 적합한 것을 사용하면 됩니다. 간단하죠?

2. 합성함수의 극대 극소 판정

(f, g 는 미분가능한 함수)

$h(x) = f(g(x))$ 라 할 때, $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 입니다.

따라서 다음과 같이 이해할 수 있습니다.

① $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극값을 가지면, $h(x)$ 는 $g(x)=a$ 가 되는 모든 x 에서 극값을 갖는다.

(이 내용은 극값의 정의로도 설명 가능합니다.)

② $g(x)$ 가 $x=b$ 에서 극값을 가지면, $h(x)$ 는 $x=b$ 에서 극값을 갖는다.

즉, 합성함수가 극대 극소가 되는 순간은

$f(x)$ 가 극값을 가질 때와, $g(x)$ 가 극값을 가질 때 이 두 경우밖에 없습니다.

매우 당연한 소리죠.

간단한 예시로 $\sin^2 x$ 를 들어보겠습니다.

$\sin^2 x = x^2 \circ \sin x$ 이므로, $\sin^2 x$ 가 극값을 갖는 상황은 $\sin x = 0$ 일 때와 $\sin x$ 가 극값을 가

질 때 (-> $x = \frac{\text{홀수}}{2}\pi$ 일 때)입니다.

$\sin x = 0$ 이면 $x = n\pi$ 이므로, (단, n 은 정수)

종합해보면, $\sin^2 x$ 는 $x = \frac{n}{2}\pi$ 일 때 극값을 갖겠네요.

미분을 하지 않고 바로 알아내는 것이 이 내용의 핵심입니다.

쉽죠?

3. 케이스 분류 및 모순 찾기

말 그대로입니다. 케이스 분류 한 다음 모순 찾는 건 킬러에서 매우 필수적인 요소죠.

(물론 작년 평가원 30에는 그런 문제가 없었습니다. WTF?)

그럼 알아서 뭐해 어견 19학년도 30번어잖아 나무위키 꺼라

4. 삼각함수의 단위원 해석

삼각함수 $\cos$ $\sin$ 의 정의는 ‘단위원 위의 x , y 좌표’입니다.

정의대로 해석하는 것이 가장 정석적이고, 가장 효과적입니다.

특히 삼각함수에 대입되는 x 값이 커질수록

그래프보다는 단위원에서 생각하는 것이 좀 더 효율적입니다.

5. 도함수의 정적분과 원함수의 극값차의 관계

(이 내용은 제가 예전에 쓴 171130 마지막 계산 글에도 상세히 나와 있습니다.)

이 내용을 이번엔 좀 상세하게 다뤄보겠습니다.

최고차항의 계수가 k 인 삼차함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha, \beta$ 에서 극값을 갖는다고 하면

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx = f(\beta) - f(\alpha) \text{임은 자명하죠. 이 때, } f(\beta) - f(\alpha) \text{는 ‘극값의 차’입니다.}$$

이 때, $f'(x)$ 가 $x = \alpha, \beta$ 를 근으로 갖기 때문에,

잘 알려져 있는 이차함수의 적분 공식을 사용하면 다음과 같습니다.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx = 3k \times \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = f(\beta) - f(\alpha)$$

(삼차함수의 최고차항이 k 이므로, 이차함수의 최고차항은 $3k$ 입니다. 놓치기 쉬우므로 주의.)

따라서 다음과 같은 사실을 알 수 있습니다. (좀 특수한 상황이지만, 기출에서 너무 많이 다뤄진 주제라 이제 모르면 안 되는 내용입니다.)

“극값의 차, 극값 갖는 x 값의 차, 최고차항의 계수 중 두 개만 알면 나머지 하나를 반드시 구할 수 있다.”

171130 마지막 계산도 $\beta - \alpha$ 값을 알고, 최고차항의 계수도 알기 때문에

극값의 차를 반드시 구할 수 있게 됩니다.

문제에서 구하라고 하는 M 은 극값의 차의 절반이었죠.

6. 합성함수의 미분계수 깔끔하게 구하기

$f(g(h(x)))$ 의 $x = n$ 에서의 미분계수는?

$$f'(g(h(n))) \times g'(f(n)) \times f'(n) \text{이죠.}$$

연쇄법칙 (chain rule)으로 알려져 있는 내용입니다. 이거 모르시는 분은 없겠죠?

이제 예제를 하나 만들어 보겠습니다.

$$a(x) = \frac{2 - \sin b(x)}{2 + \sin b(x)}, \quad b(x) = \frac{\pi}{6}(x-2)^2 \quad \text{일 때, } a'(3) \text{의 값은?}$$

커탄수학이냐? 나무위키 끄라고

이런 문제 보시면 $a(x)$ 미분할 생각에 눈 앞이 캄캄해지는 분들이 있습니다.

$f'(g(h(n))) \times g'(f(n)) \times f'(n)$ 를 여기에 적용해 보겠습니다.

$$a(x) = \left(\frac{4}{x+2} - 1\right) \circ \sin x \circ b(x) \text{입니다. } b(3) = \frac{\pi}{6} \text{ 이니까 위의 방법을 그대로 적용하면}$$

$$-\frac{4}{\left(\frac{1}{2}+2\right)^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{3} \text{이 됩니다. (방금 만든 문제라서 답이 이렇게 끔찍할 줄은..)}$$

요지는, 합성함수의 미분계수는 “최소 단위로 찢어서 연쇄법칙으로 계산하는 게 깔끔하다.”라는 거죠. (별 거 없죠?)

내용 설명은 끝났습니다.

생각보다 별 거 없네? 라고 생각하시는 분들도 많을 것이라고 생각합니다.
어차피 수능 수학입니다.

생각보다 별 거 있네? 하면 그건 (미적분 한정) 171130 181130이 끝입니다. 그 이상은 없죠.

화려해보이고, 현학적인 스킬들도 결국
기본으로부터 파생된 실전개념과 같습니다.

또한, 위의 내용을 다 안다고 하더라도, 활용하는 게 자유롭지 못하면 아무 쓸데가 없죠.

저 위의, 별 거 없는 것 같은 6가지 내용으로 191130을 깔끔하게 풀어보겠습니다.

30. 최고차항의 계수가 6π 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

함수 $g(x) = \frac{1}{2 + \sin(f(x))}$ 이 $x = \alpha$ 에서 극대 또는 극소이고,
 $\alpha \geq 0$ 인 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1 ,
 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$ 라 할 때, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1 = 0$ 이고 $g(\alpha_1) = \frac{2}{5}$ 이다.

(나) $\frac{1}{g(\alpha_5)} = \frac{1}{g(\alpha_2)} + \frac{1}{2}$

$g'\left(-\frac{1}{2}\right) = a\pi$ 라 할 때, a^2 의 값을 구하시오.

(단, $0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$) [4점]

sol)

구하는 것이 $g'(x)$ 의 값이므로, $f(x)$ 를 구해야 답을 알 수 있습니다.

우리는 이제부터 $f(x)$ 를 구하는 것이 최종 목적이 됩니다.

$g(x) = \frac{1}{2 + \sin(f(x))}$ 입니다. 분모가 0이 될 수 없으니 실수 전체에서 정의되는 함수네요.

$g(x)$ 가 극값을 갖는 $x > 0$ 인 x 좌표를 α_n 으로 정의했고, (가) 조건은 계산만 하면 될 것 같은

데, (나) 조건을 보니까 $\frac{1}{g(x)}$ 에 대한 정보가 나타나 있는데요? 저는 이 조건을 보고

1. 항등식을 다루는 방법 -> 합성이 생각났습니다.

(이 정도는 과한 발상이 아닙니다. 여러분들도 실력이 늘어나고 꽤 많은 문제를 풀면 이러한 전개는 충분히 가능합니다.)

(받아들여지지 않으시면 그냥 역수 취했다고 생각하시면 될 것 같습니다.)

$g(x) = \frac{1}{x+2} \circ \sin x \circ f(x)$ 인데 $\frac{1}{x+2}$ 의 역함수는 $\frac{1}{x} - 2$ 이므로 (고1때 공식으로 배우죠.)

함수 $g(x)$ 를 $\frac{1}{x} - 2$ 에 합성할 수 있습니다. ($\because g(x) \neq 0$)

$\frac{1}{g(x)} - 2 = \sin f(x) = h(x)$ 라고 하겠습니다.

$h(x)$ 가 극값을 갖는 x 좌표와 $g(x)$ 가 극값을 갖는 x 좌표가 동일한 것이 자명하니까 이렇게 놓고 푸는 것이 좀 더 편하겠죠?
(3합성 형태로 접근하면 복잡해지니까, 다르게 풀어볼까 하다가 이러한 생각이 떠오른거죠.)

이제 (가) (나) 조건을 $h(x)$ 에 대한 정보로 바꾸고, $h(x)$ 를 분석해봅시다.

(가) $\alpha_1 = 0, h(\alpha_1) = \frac{1}{2}$ (나) $h(\alpha_5) - h(\alpha_2) = \frac{1}{2}$ 원래의 조건보다 간단해졌네요.

2. 합성함수의 극대 극소 판정을 적용해봅시다.

$h(x) = \sin x \circ f(x)$ 입니다. $\sin x = \pm 1$ 일 때 $\sin x$ 가 극값을 갖기 때문에

$h(x) = \pm 1$ 이거나 $f(x)$ 가 극값을 가질 때만 α_n 이 생성됨을 알 수 있습니다.

흑백논리와 비슷하죠.

(이 내용이 제일 중요합니다. 밑으로 내려가면서 이 내용은 꼭 기억하시면서 읽으시길)

-> 문제 자체가 합성함수의 극대극소 판정에 관한 문제인데, 이 내용이 안 중요할 수가 없죠.

이제 (가) 조건을 볼까요? $h(\alpha_1) = \frac{1}{2}$ 이므로, $h(x)$ 가 ± 1 이 아니죠.

따라서 α_1 은 $f(x)$ 가 만들어낸 값입니다. -> $f(x)$ 는 $x = \alpha_1 = 0$ 에서 극값을 갖습니다.

문제 조건에서 $0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$ 라고 했으므로 $f(0) = \frac{\pi}{6}$ 입니다.

3. 케이스 분류 및 모순 찾기 (여기가 가장 빠셉니다. 집중해서 읽어주세요)

$f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 극대 / 극소 중 어느 것인지를 판단해야합니다.

이를 위해서 (나) 조건을 준 것이겠죠.

-> 이런 태도가 중요합니다. 이 조건이 문제에서 어떠한 기능을 하는지 파악할 수 있어야 킬러를 뇌정지 없이 한 컷에 풀 수 있습니다.

(나) $h(\alpha_5) - h(\alpha_2) = \frac{1}{2}$

if $x = 0$ 에서 극소

뭔가 답이 아닐 것 같은 상황입니다.

이 경우가 답이 되면 진짜 별 볼일 없는 문제가 되겠죠.

현장에서는 설마 평가원어 그렇겠어? 30번어잖아? 그럴 리가 없다는 합리적인 의심을 가지는 것도 좋습니다. (현장에서는 상당히 중요한 태도입니다.)

$f(x)$ 가 $x > 0$ 에서 증가하니까, $f(x)$ 가 만들어내는 α 값은 없습니다.

α_n ($n \geq 2$)는 모두 $\sin x$ 가 만들어 낼 것이고, 그러면 $h(\alpha_n) = \pm 1$ 만 가능합니다.

따라서 $h(\alpha_5) - h(\alpha_2)$ 로 가능한 값은 2, 0, -2입니다. 모순이죠.

$f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극대입니다.

그러면 자연스럽게 $f(x)$ 가 극소인 상황에 관심이 갑니다.

$h(\alpha_5) - h(\alpha_2) = \frac{1}{2}$ 인데, 위에서도 말했지만

α_5 와 α_2 모두 $\sin x$ 가 만들어낸 값이면 $h(\alpha_5) - h(\alpha_2)$ 는 결코 $\frac{1}{2}$ 이 될 수 없습니다.

ㅇㅎ? 그러면 α_5 와 α_2 중 하나는 $f(x)$ 의 극소를 만들어내는 값을 바로 알 수 있습니다.

둘 중 하나는 틀릴 것이니, 이 과정 역시

3. 케이스 분류 및 모순 찾기에 해당합니다.

어느 것을 먼저 가정하든 어차피 모순인 것을 찾아야 합니다.

if) $f(x)$ 가 $x = \alpha_2$ 에서 극소이면?

확실한 것은, α_5 를 $\sin x$ 가 만들어낸다는 것이죠. $h(\alpha_5) = \pm 1$ 입니다.

$f(x)$ 는 구간 $(0, \alpha_2)$ 에서 감소합니다. 이 때 $f(x) \leq -\frac{\pi}{2}$ 가 되면

$\sin f(x) = -1$ 인 상황이 발생하므로 α_2 가 $\sin x$ 가 만든 값이 됩니다.

(그렇게 되면 $f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 극소일 때와 같은 이유로 모순입니다.)

따라서 구간 $(0, \alpha_2)$ 에서 $-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{6}$ 이고, $-1 < h(\alpha_2) < \frac{1}{2}$ 입니다.

WTF? $h(\alpha_5) = h(\alpha_2) + \frac{1}{2}$ 이므로, 위에서 구한 범위에 의해 $-\frac{1}{2} < h(\alpha_5) < 1$ 입니다.

$h(\alpha_5) = \pm 1$ 가 될 수 없네요? 모순입니다.

-> $f(x)$ 는 $x = \alpha_5$ 에서 극소입니다. 자동으로 α_2 는 $\sin x$ 가 만든 값이 될 것이고,

$h(\alpha_2) = -1$ 이므로 $h(\alpha_5) = \sin f(\alpha_5) = -\frac{1}{2}$ 이 되어야합니다. 이제 $f(\alpha_5)$ 의 값을 찾아보죠.

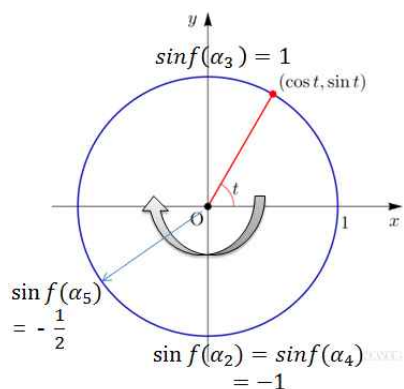
(사실 3. 케이스 분류 및 모순 찾기는 대부분의 경우가 그래프로 푸는 게 유리합니다. 저도 당연히 그래프 하나 그리고 암산으로 끝낼 수 있지만.. 칼럼의 특성상 그렇게 설명하는 것은 거의 불가능에 가깝기 때문에 최대한 간결하고 이해하기 편한 식으로 썼으니 양해를 ㅎㅎ)

4. 삼각함수의 단위원 해석

$\sin f(\alpha_1) = \frac{1}{2}$ 이고, $f(x)$ 는 (α_1, α_5) 에서 감소하므로

$\sin f(\alpha_2) = -1$, $\sin f(\alpha_3) = 1$, $\sin f(\alpha_4) = -1$ 임이 자명합니다.

$h(\alpha_5) = \sin f(\alpha_5) = -\frac{1}{2}$ 를 고려하여 이를 단위원에 표시함으로써 $f(\alpha_5)$ 값을 구해보면 ..



위의 그림과 같습니다. $f(x)$ 가 감소하므로 동경을 반대로 회전시켜야하겠죠.

$f(\alpha_5) = -2\pi - \frac{5}{6}\pi = -\frac{17}{6}\pi$ 임을 매우 쉽게 알 수 있습니다. $f(x)$ 의 극솟값은 $-\frac{17}{6}\pi$.

이제 다 왔습니다 ㅎㅎ

5. 도함수의 정적분과 원함수의 극값차의 관계

위에 적어드렸던 그 공식을 써서 $f(x)$ 를 완성시켜봅시다.

$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 $\frac{\pi}{6}$ 를 갖고, $x = \alpha_5$ 에서 극솟값 $-\frac{17}{6}\pi$ 를 갖습니다. 극값차는 3π .

$f(x)$ 의 최고차항 계수는 6π 이므로 $f'(x)$ 의 최고차항 계수는 18π 입니다.

$\int_0^{\alpha_5} f'(x)dx = 18\pi \times \frac{(\alpha_5)^3}{6} = 3\pi$ 이므로 매우 깔끔하게 $\alpha_5 = 1$ 이 나옵니다 크으 갓가원

이제 $f(x)$ 는 구했습니다. 남은 건 계산입니다.

6. 합성함수의 미분계수 깔끔하게 구하기

$g'(-\frac{1}{2})$ 를 구하라고 하네요. $g(x) = \frac{1}{x+2} \circ \sin x \circ f(x)$ 를 이용해서 바로 구해봅시다.

$f(x) = 6\pi(x + \frac{1}{2})(x-1)^2 - \frac{17}{6}\pi$ 이므로, (삼차함수의 비율관계)

$g'(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{(\sin f(\alpha_5) + 2)^2} \times \cos f(\alpha_5) \times f'(\alpha_5)$ 인데, 잘 생각해보면 우리는 단위원 분석에

서 $f(\alpha_5)$ 의 동경을 찾았기 때문에 바로 계산이 가능합니다. (이전 페이지 단위원 그림 참고)

(마지막 계산량을 최대한 덜어주는 평가원의 배려? 라고 볼 수도 있겠죠)

$$g'(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{(-\frac{1}{2} + 2)^2} \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \times \frac{27}{2}\pi = 3\sqrt{3}\pi$$

$$\therefore a^2 = 27$$

읽느라 고생하셨습니다. 나도 고생했다 칼럼 쓰거 개 힘드네

제가 지금까지 포만한에 올린 문항 해설 중 가장 자세하게 쓴 것 같네요 ㅋㅋㅋㅋ

아마도 191130 풀이 중에서는 꽤나 깔끔한 편에 속하지 않나... 라고 조심스럽게 생각해봅니다
다 ㅋㅋ (3번에서 그래프 못 그린게 한으로 남네요)

이 문제는 시간만 충분히 주어진다면, 어느 정도의 실력대에 있는 사람들은 다 풀 수 있습니다.

관건은 풀이가 얼마나 간결하냐 / 빠르냐겠죠. (간결한 풀이가 곧 풀이 속도를 높여줍니다.)

킬러 풀이 실력은 한 방에 쑥 오르지 않습니다.

어느 정도의 수학적 피지컬 + 여러 가지 계산 스킬 등이 잘 어우러질 때 느는 겁니다.

오늘 제가 알려드린 6가지 토픽이 매우 대단한 것인가요? 아니죠.

그냥 교과개념을 상황에 맞게 쓴 것에 불과합니다.

결국 교과개념과, 그로부터 파생된 실전개념 / 스킬을

가장 효율적인 형태로, 가장 알맞은 상황에 사용하면

그걸로 킬러 풀이는 끝입니다.

읽어주셔서 감사합니다.