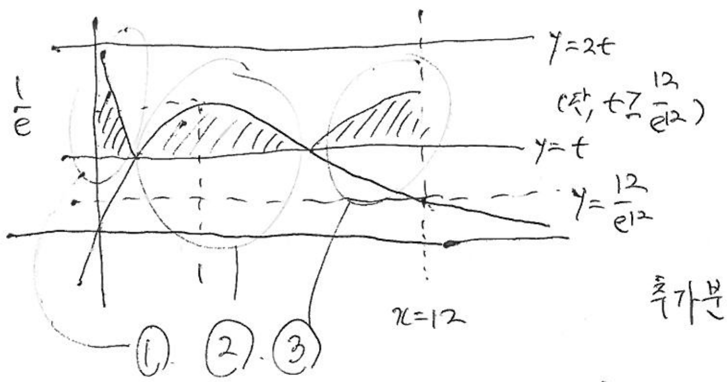
* 2019학년도 사관학교 수학 가형 30번.

$f(x) = \frac{x}{e^x} = xe^{-x}$

$\left(t \geq \frac{12}{e^{12}} \right)$, $g(t) = \int_0^{12} |f(x) - t|\, dx$

적분함수 $g(t)$는 t에 대한 함수.

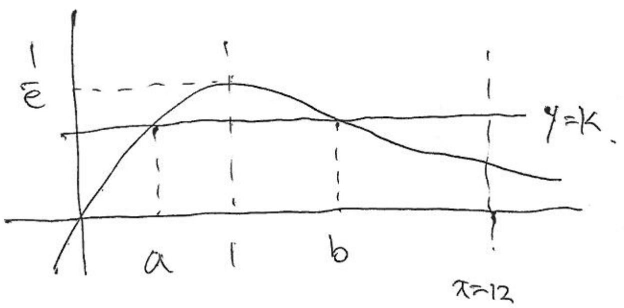
적분 $\int_0^{12} |f(x) - t|\, dx$는 x에 대한 적분.



$g(t)$는 왼쪽 그림에서 빗금친 부분을 의미.

$\left(\frac{12}{e^{12}} < t < \frac{1}{e} \right)$ 에서는 ①, ③ 부분에서 증가분이 나타나고, ② 부분에서 감소분이 나타난다.

→ 증가분 = 감소분 : 극값. (pot: 극소!)



그러므로 증가분은 $(a-0)+(12-b) = 12+a-b$ 이고, 감소분은 $b-a$ 이다. 따라서 $g'(t)=0$ 인 경우는 $12+a-b = b-a = 6$ 인 경우이다.

(pot: 미분가능!)

$(0 < a < 1 < b < 12)$

$\therefore \frac{a}{e^a} = k$, $\frac{b}{e^b} = k$, $b = a+6$ 이므로 $\frac{b}{e^b} = \frac{a+6}{e^{a+6}} = \frac{a}{e^a}$. $\therefore a = \frac{a+6}{e^6}$.

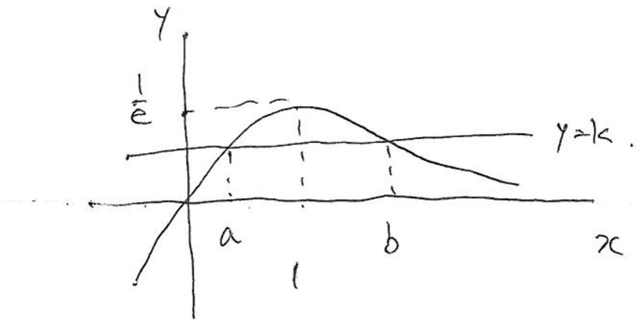
$e^6 \cdot a = a+6$ 에서 $a = \frac{6}{e^6 - 1}$. $\therefore \frac{6}{a} = e^6 - 1$ 이고 $\ln\left(\frac{6}{a}+1\right) = \ln e^6 = 6$.

$\left(t > \frac{1}{e}\right)$ 에서 $g(t) = \int_0^{12} \{t - f(x)\}\, dx = \int_0^{12} t\, dx - \int_0^{12} f(x)\, dx = 12t - \int_0^{12} f(x)\, dx$.

$\therefore g'(t) = 12$. ($\int_0^{12} f(x)\, dx$는 상수).

(그래프를 통해 $t > \frac{1}{e}$ 에서 증가·감소되는 부분은 $(0 \leq x \leq 12)$ 부분으로 생각할 수도 있다).

$\therefore g'(1) + \ln\left(\frac{6}{a}+1\right) = 12 + 6 = 18$//



* $b-a=6$ 을 그래프가 아니고 식으로 찾을 때.

$(0 \le x < a)$ $g(t)=\int_0^a \{t-f(x)\}dx \rightarrow g'(t)=a$

$(a \le x < b)$ $g(t)=\int_a^b \{f(x)-t\}dx \rightarrow g'(t)=-b+a$

$(b \le x \le 12)$ $g(t)=\int_b^{12} \{t-f(x)\}dx \rightarrow g'(t)=12-b$.

$\therefore g'(t)=12+2a-2b$.

$\therefore g'(t)=12+2a-2b=0$ 에서 $b-a=6$. $\therefore \frac{a}{e^a}=\frac{b}{e^b}=k$.

($12-2(b-a)$ $(=g'(t))$ 에서 $b-a=6$ 을 기준으로 부호가 바뀐다).