Problem (행렬의 제곱근)**.** 성분이 모두 실수인 행렬

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

가 주어져 있을 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $p = a + d$ 와 $q = ad - bc$ 에 대하여, 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$A^2 = pA - qE.$$

Solution. 직접 대입으로부터,

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} \\ &= (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = pA - qE. \end{aligned}$$

□

(2) p, q 가 모두 양수라고 하자. 그리고 행렬 X 를

$$X = \frac{1}{\sqrt{p + 2\sqrt{q}}}(A + \sqrt{q}E)$$

로 두자. 그러면 다음이 성립함을 확인하여라.

(i) $AX = XA$

(ii) $X^2 = A$

(iii) $A = kE$ $(k > 0)$ 이면 $X = \sqrt{k}E$.

따라서 주어진 가정 하에서, A 의 제곱근을 $\sqrt{A} = X$ 로 정의한다.

Solution. (i) $X = xA + yE$ 꼴이므로 자명하다. 구체적으로,

$$XA = (xA + yE)A = xA^2 + yA = A(xA + yE) = AX$$

이므로 증명된다.

(ii) 제곱을 해 보면, (1) 로부터

$$X^2 = \frac{1}{p + 2\sqrt{q}}(A^2 + 2\sqrt{q}A + qE) = \frac{1}{p + 2\sqrt{q}}(pA + 2\sqrt{q}A) = A.$$

(iii) $A = kE$ 이면 $p = 2k$ 이고 $q = k^2$ 이므로,

$$X = \frac{1}{\sqrt{2k + 2\sqrt{k^2}}}(kE + kE) = \sqrt{k}E.$$

□

(3) 3. 행렬 A 에 대하여, $A > 0$ 인 것을 $p > 0$ 이고 $q > 0$ 인 것으로 정의하자. 그러면 다음을 보여라.

(i) $A > 0$ 이면 $A^2 > 0$ 이고 $\sqrt{A} > 0$ 이다. 또한 A 가 역행렬을 가지며, $A^{-1} > 0$ 이다.

이제 다음 사실을 증명 없이 받아들입시다.

Fact. *$A > 0$ 이면, 다음 조건을 만족시키는 행렬 X 가 유일하게 존재한다.*

(i) $AX = XA$,
(ii) $X^2 = A$,
(iii) $X > 0$.

그리고 다음 문제를 풀어보도록 합시다.

(ii) $A > 0$ 이면 $A = \sqrt{A^2}$ 이다.
(iii) $A > 0$ 이면 $\sqrt{A^{-1}} = (\sqrt{A})^{-1}$ 이다.

Solution. (i) 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 하자. 그러면 근과 계수의 관계로부터, $\alpha + \beta = p > 0$ 이고 $\alpha\beta = q > 0$ 이다. 따라서 α, β 는 모두 양수이다. 한편,

$$\operatorname{tr} A = p = a + d, \quad \det A = q = ad - bc$$

라고 정의하면, 간단한 산수로부터

$$\operatorname{tr}(A^2) = a^2 + 2bc + d^2 = p^2 - 2q = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 > 0$$

이고

$$\det(A^2) = (\det A)^2 > 0$$

이다. 마찬가지로,

$$\operatorname{tr} \sqrt{A} = \sqrt{p + 2\sqrt{q}} > 0, \quad \det \sqrt{A} = \sqrt{q} > 0$$

이므로 증명된다. 마지막으로, $ad - bc = q > 0$ 이므로, 1 로부터

$$A \cdot \frac{1}{q}(pE - A) = \frac{1}{q}(pE - A) \cdot A = E$$

가 성립한다. 따라서 A 는 역행렬을 갖고,

$$A^{-1} = \frac{1}{q}(pE - A) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{tr}(A^{-1}) = \frac{p}{q} > 0, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{q} > 0$$

이므로 증명이 완료된다.

(ii) 2 와 3.(i) 로부터, $A > 0$ 이면 $X = \sqrt{A}$ 는 위의 사실을 만족시키는 유일한 행렬임을 알 수 있다. 따라서 우리는 행렬의 제곱근을 위 사실을 만족시키는 유일한 행렬로 재정의할 수 있다. 이제 이 새로운 정의 하에서 행렬 A 가 $\sqrt{A^2}$ 의 정의를 만족함을 보이면 충분하다. 그런데

$$\text{(i) } A^2A = AA^2, \quad \text{(ii) } A^2 = A^2, \quad \text{(iii) } A > 0$$

이 자명하게 성립하므로, 원하는 바가 증명된다.

(iii) 행렬 $X = (\sqrt{A})^{-1}$ 이 $\sqrt{A^{-1}}$ 의 정의를 만족함을 보이자. 우선,

$$A^{-1}X = A^{-1}(\sqrt{A})^{-1} = (\sqrt{A}A)^{-1} = (A\sqrt{A})^{-1} = (\sqrt{A})^{-1}A^{-1} = XA^{-1}$$

이므로 (i) 번째 조건은 성립된다. 두 번째로,

$$X^2 = ((\sqrt{A})^{-1})^2 = ((\sqrt{A})^2)^{-1} = A^{-1}$$

이므로, (ii) 역시 만족된다. 마지막으로, $A > 0$ 이므로 $\sqrt{A} > 0$ 이며, 따라서 $(\sqrt{A})^{-1} > 0$ 이다. 따라서 모든 조건이 충족되었고, X 는 A^{-1} 의 제곱근이다.

□