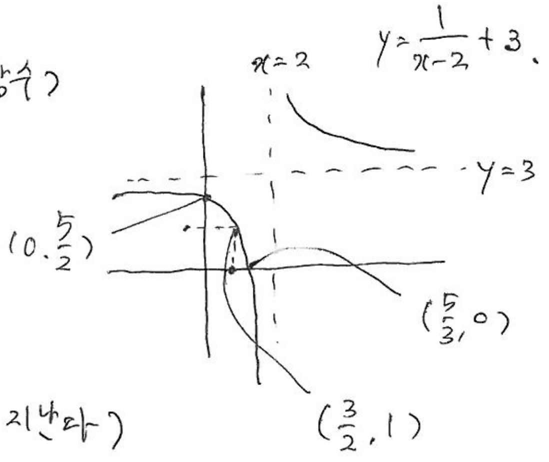
* 2019년 4월 시행 교육청 고3수학 나형 30번.

실수 a, b. $f(x) = ax+b$ (직선)

$$g(x) = \frac{1}{ax+b-2} + 3 = \frac{1}{f(x)-2} + 3 \quad (\text{유리함수})$$



(가) $x>0$, $1 < g(x) < 3$.

→ $x>0$, $-\infty < f(x) < \frac{3}{2}$ (∵ $y=\frac{1}{x-2}+3$ 에서 $(\frac{3}{2}, 1)$을 지난다)

∴ 직선 형태의 1차 함수가 $(x>0)$ 범위에서 $(-\infty, \frac{3}{2})$ 치역을 가지려면

$a<0$, $(0, \frac{3}{2})$을 지나야 한다. 또는 $(0, b)$에서 $b>0$.

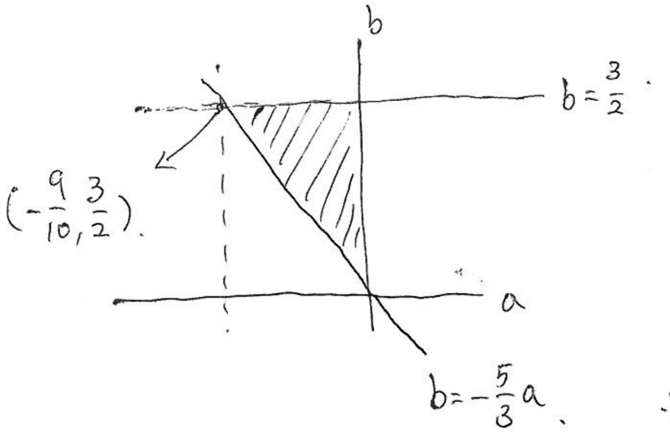
(나) → ($b \le 0$일 경우 $a<0$ 이므로 제4사분면에서 교점이 나온다.

∴ $a<0$, $0<b\le\frac{3}{2}$, ------ ①

또한 제4사분면에서 교점이 나오지 않으려면 $x=\frac{5}{3}$일 때 함숫값(직선인 1차)이 음수가 나오면 안된다. (주의: 사분면에 축은 포함되지 않는다)

∴ $f(\frac{5}{3}) \ge 0$ → $\frac{5}{3}a + b \ge 0$ ------ ②

①, ② 에 의하여 영역 R을 나타내면 다음과 같다.



a^2+b^2 은 원의 형태로 파악할 수 있으므로 왼쪽의 빗금친 부분에서 $(a, b)=(0, 0)$과의 거리의 최댓값은 $(-\frac{9}{10}, \frac{3}{2})$일 때이다.

$$\therefore M = \left(-\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{100} + \frac{9}{4}$$

$$= \frac{81}{100} + \frac{225}{100} = \frac{306}{100} \quad //$$