* 2019년 4월 시행 교육청 고3 수학 가형 30번.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ (a, b는 정수)　　　$g(x) = e^{f(x)} - f(x)$ → $x=\alpha$, $x=-1$, $x=\beta$ 에서만 극값.

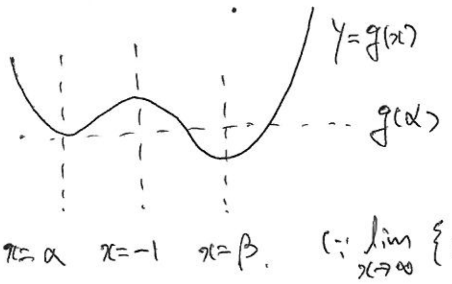
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$　　　　　　$(\alpha < -1 < \beta)$

$g'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)} - f'(x) = f'(x) \cdot \{e^{f(x)} - 1\}$.

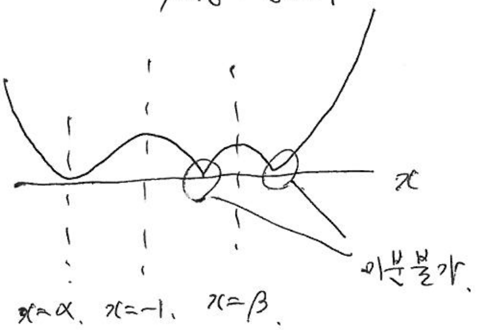
∴ 방정식 $f'(x)=0$ 또는 $f(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 실근은 $\alpha, -1, \beta$의 세 개이다. **

$|g(x)-g(\alpha)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수가 2이다.

∴ $g(x)$의 개형과 $|g(x)-g(\alpha)|$의 개형은 다음과 같다.



$(\because \lim_{x\to\infty}\{e^{f(x)} - f(x)\} = \infty(+))$

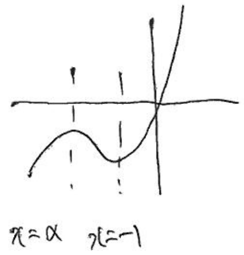


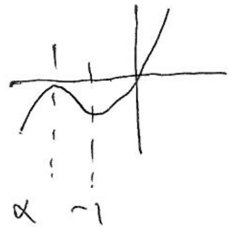
$f(0)=0$, $g(0)=1$, $g'(0)=0$,　∴ $\beta = 0$.

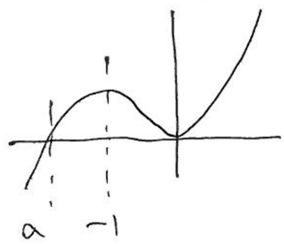
$g(\beta) < g(\alpha) < g(-1)$.　　→ (왜 그런지 생각할 것)

이 때 방정식 $f(x)=0$의 실근이 모두 서로 다르면 불가능. ($\because$ $g'(x)=0$을 만족시키는 x는 세 개)

그러므로 가능한 $f(x)$의 개형들을 살펴보면 다음과 같다.

(i)


(ii)


(iii)


$g(\beta) = g(0) = 1 < g(\alpha) = e^{f(\alpha)} - f(\alpha)$　⇒ ∴ $f(\alpha) \neq 0$.

∴ $f(x)$의 개형은 (i) 개형으로 고정된다.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$. → 방정식 $f(x)=0$ 은 실근 1개. $\therefore x(x^2+ax+b)$ 에서 $a^2-4b<0$

$f'(x) = 3x^2+2ax+b$. → 방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 실근 2개 ($x=\alpha, x=-1$). $\therefore a^2-3b>0$.

$f'(\alpha)=0$, $f'(-1)=0$. $\therefore 3-2a+b=0$. → $b=2a-3$.

$\alpha+(-1) = \alpha-1 = -\frac{2a}{3}$, $\alpha\times(-1) = -\alpha = \frac{b}{3}$.

따라서 $a^2-4b = a^2-8a+12 = (a-2)(a-6)<0$. $\therefore 2<a<6$.

$a^2-3b = a^2-6a+9 = (a-3)^2>0$. $\therefore a\neq 3$.

(가) $a=4$, $b=5$.

$f(x) = x^3+4x^2+5x$. $f(-1) = -1+4-5=-2$.

(나) $a=5$, $b=7$.

$f(x) = x^3+5x^2+7x$. $f(-1) = -1+5-7=-3$.

$f(-1) = -1+a+b$

$= -a+2$.

이 식을 사용할 수도 있음.

$\therefore \{f(-1)\}^2$의 최댓값은 $(-3)^2 = 9$ //