1회차

지수함수와 로그함수

2005년 9월 평가원 나형 5번

세 수 $A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}$, $B=\sqrt{5}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt{28}}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은? [3점]

거듭제곱근의 성질	지수의 대소
$a, b>0$이고 m, n이 2이상의 자연수일 때, ① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ③ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$	밑이 같으면 지수로 비교 지수가 같으면 밑으로 비교

풀이

$A=\sqrt[3]{\sqrt{10}}=\sqrt[6]{10}$, $B=\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3}$, $C=\sqrt[3]{\sqrt{28}}=\sqrt[6]{28}$ 이므로

$\sqrt[6]{10}$, $\sqrt[6]{5^3}$, $\sqrt[6]{28}$ 의 대소 관계를 비교하면

$B>C>A$

2004년 3월 교육청 고3 나형 20번

어떤 전자레인지로 피자 n조각을 굽는 데 걸리는 시간 t(분)는 $t=1.2\times n^{0.5}$으로 주어진다고 한다. 이 전자레인지로 피자 8조각을 굽는 데 걸리는 시간은 피자 2조각을 굽는 데 걸리는 시간의 몇 배인가? [4점]

지수법칙
$a, b>0$이고 m, n이 실수일 때, ① $a^m a^n=a^{m+n}$ ② $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ③ $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$ ④ $(ab)^m=a^m b^m$

풀이

피자 8조각을 굽는 데 걸리는 시간 $t_8=1.2\times 8^{0.5}$

피자 2조각을 굽는 데 걸리는 시간 $t_2=1.2\times 2^{0.5}$

$t_8=t_2\times\square$를 만족하는 $\square$를 구하면

$1.2\times 8^{0.5}=1.2\times 2^{0.5}\times\square$

$8^{0.5}=2^{0.5}\times\square$

$\square=\dfrac{8^{0.5}}{2^{0.5}}=\left(\dfrac{8}{2}\right)^{0.5}=4^{0.5}=\left(2^2\right)^{0.5}=2$

2009년 9월 평가원 1번

$2^{2\log_3 9}$의 값은? [2점]

로그의 성질
$a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때 ① $\log_a 1=0$ ② $\log_a a=1$ ③ $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$ ④ $\log_a \dfrac{N}{M}=\log_a N-\log_a M$ ⑤ $\log_{a^t} M^k=\dfrac{k}{t}\log_a M$

풀이

$2^{2\log_3 9}=2^{2\log_3 3^2}=2^{4\log_3 3}=2^4=16$

2006년 6월 평가원 23번

해저에서 발생한 지진이 지진해일을 일으킬 때, 지진해일의 높이가 $H(m)$이면 지진해일의 규모 M은 다음과 같다고 한다.

$$M = \log_8 H$$

어떤 지점에서 지진해일의 높이가 $a\,m$인 지진해일의 규모는 지진해일의 높이가 $9m$일 때의 지진해일의 규모의 1.5배이다. a의 값을 구하시오. [3점]

로그의 성질
$a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$일 때 ① $\log_a 1 = 0$ ② $\log_a a = 1$ ③ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ ④ $\log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M$ ⑤ $\log_{a^t} M^k = \frac{k}{t}\log_a M$

풀이	지진해일의 높이가 $a\,m$인 지진해일의 규모 $M_a = \log_8 a$ 지진해일의 높이가 $9m$인 지진해일의 규모 $M_9 = \log_8 9$ $M_a = M_9 \times 1.5$이므로 $\log_8 a = \log_8 9 \times 1.5$ $\log_8 a = \log_8 9^{1.5}$ $a = 9^{1.5} = (3^2)^{1.5} = 3^3 = 27$

2009년 수능 나형 6번

$a = \log_2 10,\ b = 2\sqrt{2}$일 때, $a\log b$의 값은? [3점]

지수의 확장(유리수)	로그의 성질	로그의 밑 변환
$a>0,\ m, n\,(n \geqq 2)$이 정수일 때, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$일 때 ① $\log_a 1 = 0$ ② $\log_a a = 1$ ③ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ ④ $\log_a \frac{N}{M} = \log_a N - \log_a M$ ⑤ $\log_{a^t} M^k = \frac{k}{t}\log_a M$	$a>0,\ a\neq 1,$ $b, c>0\,(c\neq 1)$일 때 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

풀이	$\log b = \log 2\sqrt{2} = \log\sqrt{2^3} = \log 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log 2$이므로 $a\log b = \log_2 10 \times \frac{3}{2}\log 2 = \frac{3}{2} \times \log_2 2 \times \log 10 = \frac{3}{2}$

2005년 7월 교육청 고3 22번

외부 공기의 온도를 T_0, 어떤 물체의 처음 온도를 T_1, t분 후의 이 물체의 온도를 T라 할 때, 다음 관계식이 성립함이 알려져 있다.

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)10^{-0.02t}\text{(온도의 단위는 }{}^oC\text{)}$$

외부 공기의 온도가 20^oC, 이 물체의 처음 온도가 120^oC일 때, 이 물체의 온도가 25^oC가 되는 것은 $\square$분 후이다. $\square$ 안에 알맞은 수를 구하시오. (단, 외부 공기의 온도는 변하지 않는다고 가정하고, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.) [3점]

로그의 성질
$a>0$, $a \neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때 ① $\log_a 1 = 0$ ② $\log_a a = 1$ ③ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ ④ $\log_a \dfrac{N}{M} = \log_a N - \log_a M$ ⑤ $\log_{a^t} M^k = \dfrac{k}{t}\log_a M$

풀이

$25 = 20 + (120-20)10^{-0.02t}$

$25 - 20 = 100 \times 10^{-0.02t}$

$5 = 100 \times 10^{-0.02t}$

$\dfrac{1}{20} = 10^{-0.02t}$

$\log\dfrac{1}{20} = \log 10^{-0.02t}$이고

$\log\dfrac{1}{20} = \log 1 - \log 20 = 0 - \log(2\times 10) = -(\log 2 + \log 10) = -(0.3+1) = -1.3$이므로

$-1.3 = -0.02t$

$t = \dfrac{1.3}{0.02} = \dfrac{130}{2} = 65$

2005년 6월 평가원 나형 6번

함수 $y = 5^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시켰더니 함수 $y = 25 \times 5^{2x} + 2$의 그래프가 되었다. $m+n$의 값은? [3점]

지수법칙	평행이동
$a, b > 0$이고 m, n이 실수일 때, ① $a^m a^n = a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ③$(a^m)^n = a^{mn}$ ④$(ab)^m = a^m b^m$	x축의 방향으로 m만큼 평행이동 x대신 $x-m$ y축의 방향으로 n만큼 평행이동 y대신 $y-n$

풀이

$y = 5^{2x}$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시키면 $y = 5^{2(x-m)} + n$이고, $y = 25 \times 5^{2x} + 2 = 5^{2x+2} + 2 = 5^{2(x+1)} + 2$이므로

$m = -1$, $n = 2$

따라서 $m + n = -1 + 2 = 1$

2008년 6월 평가원 나형 22번

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 그래프가 함수 $y=\log_b x$의 그래프가 점 $(9,2)$에서 만날 때, $10a+b$의 값을 구하시오. [4점]

평행이동	로그의 정의	로그화
x축의 방향으로 m만큼 평행이동 x대신 $x-m$ y축의 방향으로 n만큼 평행이동 y대신 $y-n$	$\log_a b$가 정의 되려면 $0<a<1$ 또는 $a>1$ $b>0$	$\log_a b=c$이면 $c=\log_a a^c$

풀이	$y=\log_2 x$를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시키면 $y=\log_2(x-a)$이고 $(9,2)$를 지나므로 $2=\log_2(9-a)$ $\log_2 2^2=\log_2(9-a)$ $4=9-a$, $a=5$ $y=\log_b x$가 $(9,2)$를 지나므로 $2=\log_b 9$ $\log_b b^2=\log_b 9$ $b^2=9$, $b=3\ (0<b<1$ 또는 $b>1)$ 따라서 $10a+b=50+3=53$

2007년 6월 평가원 나형 5번

정의역이 $\{x \mid 5 \leqq x \leqq 8\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)$의 최솟값이 -2일 때, a의 값은? [3점]

로그함수의 성질	지수의 확장(음의 정수)
$y=\log_a x$에 대해 $x>0$, y는 모든 실수 $0<a<1$일 때, x값이 증가하면 y값은 감소한다. $a>1$일 때, x값이 증가하면 y값도 증가한다. $(1,0)$을 지나고, 점근선은 $x=0$	$a\neq 0$이고 m이 양의 정수일 때, $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$

풀이	$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)$는 감소함수이므로 $x-a>0$일 때, x값이 클수록 최솟값을 가진다. $-2=\log_{\frac{1}{2}}(8-a)$ $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{2}}(8-a)$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=8-a$ $4=8-a$, $a=4$

2008년 수능 10번	
지수함수 $f(x) = a^{x-m}$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 두 점에서 만나고, 두 교점의 x좌표가 1과 3일 때, $a+m$의 값은? [3점]	
역함수와 교점	
$y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 교점은 $y=f(x)$가 증가함수일 때, $y=x$ 위에 있고. $y=f(x)$가 증가함수가 아닐 때, $y=x$와 그 외에 생긴다.	
풀이	교점이 2개이므로 $f(x)$는 증가함수이다. 증가함수의 역함수와의 교점은 $y=x$위에 있으므로 두 점의 좌표는 $(1,1)$, $(3,3)$이다. $f(1)=a^{1-m}=1$, $m=1$ 이므로 $f(3)=a^{3-m}=a^{3-1}=a^2=3$, $a=\sqrt{3}$ ($f(x)$는 증가함수) 따라서 $a+m=\sqrt{3}+1=1+\sqrt{3}$

2006년 6월 평가원 나형 18번	
방정식 $\log_4(\log_2 x)=1$을 만족시키는 x의 값을 구하시오. [3점]	
로그화	
$\log_a b = c$이면 $c=\log_a a^c$이므로 $b=a^c$	
풀이	$\log_4(\log_2 x)=1=\log_4 4$ $\log_2 x = 4 = \log_2 2^4$ $x=2^4=16$

2006년 9월 평가원 나형 3번		
부등식 $2^{x^2} < 4 \times 2^x$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은? [2점]		
지수함수의 성질		이차부등식
$y=a^x$에 대해 x는 모든 실수, $y>0$ $0<a<1$일 때, x값이 증가하면 y값은 감소한다. $a>1$일 때, x값이 증가하면 y값도 증가한다. $(0,1)$을 지나고, 점근선은 $y=0$		$(x-a)(x-b)<0$이면 $a<x<b$ $(x-a)(x-b)>0$이면 $x<a$ 또는 $x>b$ $(a<b)$
풀이	$2^{x^2} < 4 \times 2^x = 2^{x+2}$에 대해 $y=2^{x^2}$, $y=2^{x+2}$라고 보면 밑이 1보다 크므로 증가함수이다. 증가함수이면 x값이 클수록 y값이 크므로 $x^2 < x+2$ $x^2-x-2<0$ $(x-2)(x+1)<0$, $-1<x<2$ $\alpha=-1$, $\beta=2$이므로 $\alpha+\beta=-1+2=1$	

2010년 6월 평가원 나형 18번

방정식 $9^x - 3^{x+2} + 8 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $3^{2\alpha} + 3^{2\beta}$의 값을 구하시오. [3점]

지수법칙
$a, b > 0$이고 m, n이 실수일 때,
① $a^m a^n = a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ③ $(a^m)^n = a^{mn}$ ④ $(ab)^m = a^m b^m$

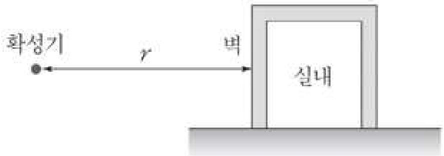
풀이	
	$3^x = t\,(t > 0)$라 하자. $9^x - 3^{x+2} + 8 = (3^x)^2 - 9 \times 3^x + 8 = t^2 - 9t + 8 = 0$ $(t-8)(t-1) = 0$, $t = 1$ 또는 $t = 8$이므로 $3^\alpha = 1$, $3^\beta = 8$ 또는 $3^\alpha = 8$, $3^\beta = 1$ $3^{2\alpha} + 3^{2\beta} = (3^\alpha)^2 + (3^\beta)^2 = 1^2 + 8^2 = 65$

2005년 수능 나형 15번

소리가 건물의 벽을 통과할 때, 일정 비율만 실내로 투과되고 나머지는 반사되거나 흡수된다. 이때, 실내로 투과되는 소리의 비율을 투과율이라 한다. 확성기의 음향출력이 W(와트)일 때, 투과율이 a인 건물에서 $r(m)$만큼 떨어진 지점에 있는 확성기로부터 실내로 투과되는 소리의 세기 P(데시벨)는 다음과 같다.

$$P = 10\log\frac{aW}{I_0} - 20\log r - 11 \ (\text{단, } I_0 = 10^{-12}(\text{와트}/m^2)\text{이고 } r > 1\text{이다.})$$

확성기에서 음향출력이 100(와트)인 소리가 나오고 있다. 투과율이 $\frac{1}{100}$인 건물의 실내로 투과되는 소리의 세기가 59(데시벨) 이하가 되게 할 때, 확성기와 건물 사이의 최소 거리는? (단 소리는 공간으로 골고루 퍼져나가고, 투과율 이외의 다른 요인은 고려하지 않는다고 가정한다.) [4점]



지수의 확장(음의 정수)	로그화	로그함수의 성질
$a \neq 0$이고 m이 양의 정수일 때, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$\log_a b = c$이면 $c = \log_a a^c$이므로 $b = a^c$	$y = \log_a x$에 대해 $x > 0$, y는 모든 실수 $0 < a < 1$일 때, x값이 증가하면 y값은 감소한다. $a > 1$일 때, x값이 증가하면 y값도 증가한다. $(1, 0)$을 지나고, 점근선은 $x = 0$

풀이

$$59 \geqq 10\log\frac{\frac{1}{100}\times 100}{10^{-12}} - 20\log r - 11$$

$$59 + 11 \geqq 10\log\frac{1}{10^{-12}} - 20\log r = 10\log 10^{12} - 20\log r = 120 - 20\log r$$

$$70 - 120 \geqq -20\log r$$

$$\log r \geqq \frac{50}{20} = \frac{5}{2}$$

$\log r \geqq \log 10^{\frac{5}{2}}$ 밑이 1보다 크므로

$r \geqq 10^{\frac{5}{2}}$, 최소거리는 $10^{\frac{5}{2}}$

삼각함수

2001년 수능 3번

$\left(2+2\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(2-\tan\frac{\pi}{3}\right)$의 값은? [3점]

일반각과 호도법	특수한 각의 삼각비
$30^o=\frac{\pi}{6}$, $45^o=\frac{\pi}{4}$, $60^o=\frac{\pi}{3}$, $90^o=\frac{\pi}{2}$, $180^o=\pi$	(see table below)

	$30^o=\frac{\pi}{6}$	$45^o=\frac{\pi}{4}$	$60^o=\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

풀이

$\sin\frac{\pi}{3}=\sin 60^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{\pi}{3}=\tan 60^o=\sqrt{3}$ 이므로

$\left(2+2\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(2-\tan\frac{\pi}{3}\right)=\left(2+2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2-\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$

1999년 수능 2번

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ 일 때 $\sin x\cos x$의 값은? [2점]

삼각함수 사이의 관계
$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

풀이

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ 이고, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

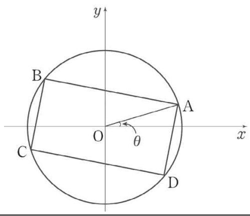
$(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$에 대해

$(\sqrt{2})^2=1+2\sin x\cos x$

$2=1+2\sin x\cos x$, $\sin x\cos x=\frac{1}{2}$

2001년 수능 인문, 예체능 5번

그림과 같이 직사각형 $ABCD$가 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접하고 있다. x축과 선분 OA가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos(\pi-\theta)$와 같은 것은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [3점]



삼각함수의 성질	삼각함수
① $\frac{a}{b}\pi$를 $c\frac{\pi}{2}+d$ 꼴로 (c: 정수, d:$+\frac{\pi}{6}$, $+\frac{\pi}{4}$, $+\frac{\pi}{3}$로) ② c가 짝수인지 홀수인지 판단 $\begin{cases}\text{짝수 : 그대로} \\ \text{홀수 : } \sin\to\cos, \cos\to\sin, \tan\to\cot\end{cases}$ ③ 몇 사분면인지 확인 $\begin{cases}\text{1사분면 : 다}+ \quad \text{2사분면 : } \sin\text{만 }+ \\ \text{3사분면 : } \cos\text{만 }+ \text{4사분면 : } \tan\text{만 }+\end{cases}$	$\sin\theta=\frac{y\text{좌표}}{\text{반지름}}$ $\cos\theta=\frac{x\text{좌표}}{\text{반지름}}$ $\sin\theta=\frac{y\text{좌표}}{x\text{좌표}}$

풀이

$\cos(\pi-\theta)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}-\theta\right)$에 대해 $\frac{\pi}{2}$가 짝수번 나왔으므로 그대로 cos

$\pi-\theta$는 제 2사분면의 각이므로 sin만 +

따라서 $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

선분 OA는 반지름이므로 $\overline{OA}=1$

따라서 점 A의 좌표를 (x,y)라 하면 $\cos\theta=\frac{x}{1}=x$, $\sin\theta=\frac{y}{1}=y$ 이므로

점 $A(\cos\theta,\sin\theta)$

원점이 직사각형 $ABCD$의 중심이므로 선분 AC는 원점을 지난다.

따라서 점 A와 점 C는 원점대칭이므로 점 C의 좌표는 $C(-\cos\theta,-\sin\theta)$.

$\cos(\pi-\theta)$는 점 C의 x좌표와 같다.

1997년 수능 인문 3번

이차방정식 $x^2-2\sqrt{3}x+2=0$의 두 근을 $\alpha, \beta\,(\alpha>\beta)$라고 할 때, $\tan\theta=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$를 만족하는 θ는? (단, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) [2점]

근과 계수의 관계

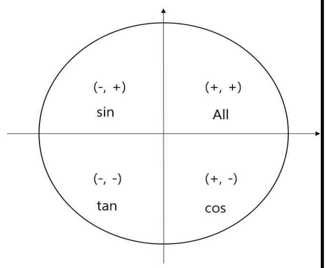
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

특수한 각의 삼각비

	$30^o=\dfrac{\pi}{6}$	$45^o=\dfrac{\pi}{4}$	$60^o=\dfrac{\pi}{3}$
sin	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
tan	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

삼각함수의 부호



풀이

$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=2\sqrt{3}$, $\alpha\beta=2$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(2\sqrt{3})^2-4\times2=12-8=4$

$\alpha-\beta=2\ \ (\alpha>\beta)$

$\tan\theta=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 θ는 제 1사분면이나 제 4사분면 각인데 $\tan\theta$가 양수이므로

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

2000년 수능 3번

$4\cos^2x+4\sin x=5$일 때, $\sin x$의 값은? [2점]

삼각함수 사이의 관계

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

풀이

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $4\cos^2x+4\sin x=5$에 대해

$4\cos^2x+4\sin x=4(1-\sin^2x)+4\sin x=-4\sin^2x+4\sin x+4=5$

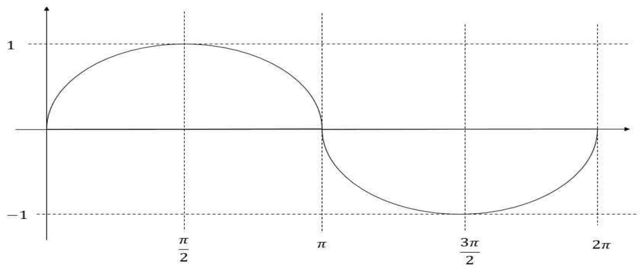
$4\sin^2x-4\sin x+1=0$

$(2\sin x-1)^2=0$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$

2002년 교육청 3월 고3 9번

삼각형 ABC에서 $A=30^{o}$, $\overline{AC}=8$, $\overline{BC}=4\sqrt{2}$일 때, 예각 $\angle C$의 크기는? [3점]

사인법칙	$y=\sin x$그래프
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라고 하면 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$	

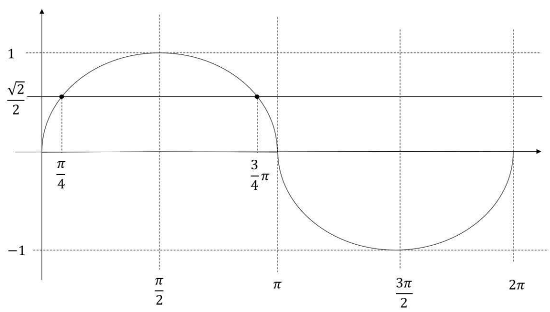
풀이

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sin 30^{o}}=\frac{8}{\sin B}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{8}{\sin B}$$

$$\frac{8\sqrt{2}}{1}=\frac{8}{\sin B}$$

$$\sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$B=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $B=\dfrac{3}{4}\pi$

$\angle C$는 예각이므로 $\angle B=\dfrac{3}{4}\pi$이고, $\angle C=15^{o}$

1995년 수능 22번

다음은 삼각형의 변의 길이와 각의 코사인 사이의 관계인 코사인법칙을 삼각형 ABC에서 $\angle A$가 둔각인 경우에 대하여 증명한 것이다.

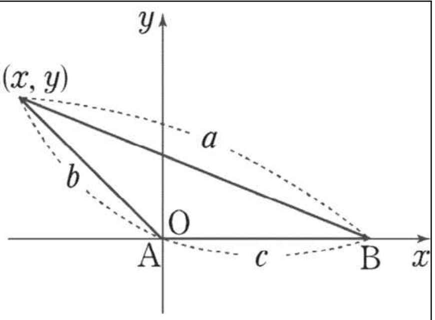
〈증명〉

오른쪽 그림과 같이 세변의 길이가 a, b, c인 삼각형 ABC를 좌표평면의 원점에 꼭짓점 A가 놓이도록 하자. 꼭짓점 C의 좌표를 (x, y)라 하면

$x = \boxed{(가)}$, $y = \boxed{(나)}$

이므로 피타고라스의 정리에 의하여 다음이 성립한다.

$a^2 = \left(\boxed{(다)}\right)^2 + y^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

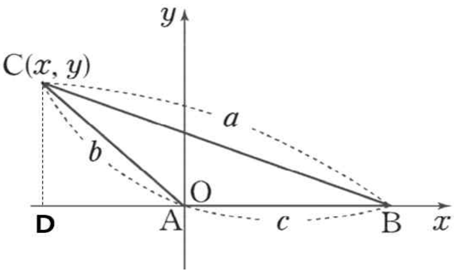


위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [1점]

삼각함수의 성질	삼각함수
① $\frac{a}{b}\pi$를 $c\frac{\pi}{2}+d$ 꼴로 (c: 정수, d:$+\frac{\pi}{6}$, $+\frac{\pi}{4}$, $+\frac{\pi}{3}$로) ② c가 짝수인지 홀수인지 판단 $\begin{cases} \text{짝수 : 그대로} \\ \text{홀수 : } \sin\to\cos, \cos\to\sin, \tan\to\cot \end{cases}$ ③ 몇 사분면인지 확인 $\begin{cases} \text{1사분면 : 다} + \quad \text{2사분면 : } \sin\text{만} + \\ \text{3사분면 : } \cos\text{만} + \text{4사분면 : } \tan\text{만} + \end{cases}$	$\sin\theta = \frac{y\text{좌표}}{\text{반지름}}$ $\cos\theta = \frac{x\text{좌표}}{\text{반지름}}$ $\sin\theta = \frac{y\text{좌표}}{x\text{좌표}}$

풀이

점 C에서 내린 수선의 발을 D라 하자.



$\cos(\pi - A) = \cos\left(2\times\frac{\pi}{2} - A\right) = \frac{x}{b}$에 대해

$\frac{\pi}{2}$가 짝수번 나왔으므로 그대로 cos

$\pi - A$는 제 1사분면의 각(A는 둔각)이므로 모두 +

따라서 $\cos(\pi - A) = \cos A = \frac{x}{b}$이므로 $x = b\cos A = $(가)

$\sin(\pi - A) = \sin\left(2\times\frac{\pi}{2} - A\right) = \frac{y}{b}$에 대해 $\frac{\pi}{2}$가 짝수번 나왔으므로 그대로 sin

$\pi - A$는 제 1사분면의 각(A는 둔각)이므로 모두 +

따라서 $\sin(\pi - A) = \sin A = \frac{y}{b}$이므로 $y = b\sin A = $(나)

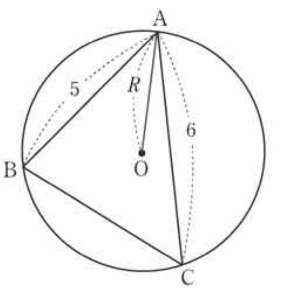
피타고라스 정리에 의해

$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = (\overline{AB} - x)^2 + y^2$이므로

$a^2 = (c - x)^2 + y^2$, (다)$= c - x$

2007년 3월 교육청 고2 27번

그림과 같이 반지름의 길이가 R인 원 O에 내접하는 삼각형 ABC가 있다.



$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$, $\cos A=\dfrac{3}{5}$일 때, $16R$의 값을 구하시오. [4점]

코사인법칙	사인법칙
삼각형 ABC에서 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$	삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라고 하면 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

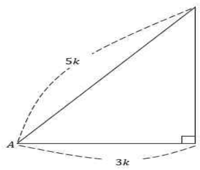
풀이

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A=5^2+6^2-2\times5\times6\times\dfrac{3}{5}=25$

$\overline{BC}^2=25$, $\overline{BC}=5$

삼각형 ABC의 외심이 삼각형 내부에 있으므로 삼각형ABC는 예각삼각형이다.

따라서 $\cos A=\dfrac{3}{5}$에 대해 다음이 성립하므로



$(5k)^2=(3k)^2+(\text{높이})^2$

$25k^2-9k^2=16k^2=(\text{높이})^2$

$\text{높이}=4k$ $(k>0)$

따라서 $\sin A=\dfrac{4k}{5k}=\dfrac{4}{5}$이므로

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{5}{\frac{4}{5}}=\dfrac{25}{4}=2R$

$16R=50$