* 2019년 3월 시행 교육청 고3 수학 가형 20번.

$f(x) = x^2 + ax + b \ (0 < b < \frac{\pi}{2})$,

$g(x) = \sin(f(x))$.

$g'(x) = f'(x) \times \cos(f(x))$.

$(k, g(k))$가 변곡점, $2k\,g(k) = \sqrt{3}\,g'(k)$.

$g'(-x) = -g'(x)$

$\because g'(x) = (2x + a) \times \cos(x^2 + ax + b)$

$g'(-x) = (-2x + a) \times \cos(x^2 - ax + b)$

$-g'(-x) = (2x - a) \times \cos(x^2 - ax + b)$

$\therefore$ $(x=0)$을 대입하면, $a\cos b = -a\cos b$. $\therefore a = 0$ ($\because \cos b \neq 0$)

(직관적으로 $a=0$일 때 등호가 성립함을 볼 수 있는 것이 좋다. $\because$ 모든 실수 x에 대하여)

$\therefore f(x) = x^2 + b$, $g(x) = \sin(x^2 + b)$, $g'(x) = 2x\cos(x^2 + b)$

$g''(x) = 2\cos(x^2 + b) - 4x^2\sin(x^2 + b)$.

$\rightarrow$ ($\triangle\cos\bigcirc - \square\sin\bigcirc = 0$ 이라면 $g''(x) = 0$인 x에서 부호가 바뀌므로 변곡점이다)

$\therefore g''(k) = 2\cos(k^2 + b) - 4k^2\sin(k^2 + b) = 0$.

(나)에서 $2k\sin(k^2 + b) = \sqrt{3} \cdot 2k\cos(k^2 + b)$

$= \sqrt{3} \times k \times 4k^2\sin(k^2 + b)$

$= 4\sqrt{3}k^3\sin(k^2 + b)$.

(i) $\sin(k^2 + b) = 0$이면

$\cos(k^2 + b) = \pm 1$ 이므로

$g''(k) \neq 0$.

$\therefore k = 0$ or $k^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

(ii) $k = 0$이면 $g''(0) = 2\cos b \neq 0$.

조건에 위배. $\therefore k^2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

따라서 $g''(k) = 0$에서 $2\cos\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + b\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + b\right) = 0$.

$$\therefore \sqrt{3} = \frac{\sin\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + b\right)}{\cos\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + b\right)} = \tan\left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + b\right) = \tan\frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < b < \frac{\pi}{2}).$$

$\therefore b = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

$a + b = 0 + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ //