* 2020학년도 사관학교 수학 가형 30번.

$f(x) = x^3 + \cdots,$

$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{|t|+1}\,dt$, $\therefore g(0)=0$

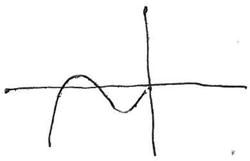
$g'(2)=0$, $(x \in R)$ $g(x) \geq 0$

$$g(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{f(t)}{t+1}\,dt & (x>0) \\ \int_0^x \frac{f(t)}{-t+1}\,dt & (x<0) \end{cases} \quad g'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x+1} & (x>0) \\ \frac{f(x)}{-x+1} & (x<0) \end{cases}.$$

$\therefore g'(2) = \frac{f(2)}{2+1} = 0$. $\therefore$ $f(2)=0$.

$g(x) \geq 0$ 이므로 $(x<0)$ 에서 $g'(x)<0$, $\therefore$ $g'(0)=0$, $f(0)=0$

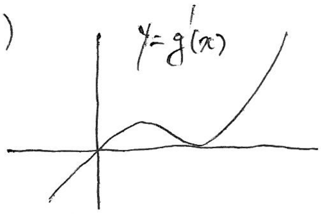
그렇지 않을 경우 (즉, $\int_0^x \frac{f(t)}{-t+1}\,dt \geq 0$ 인데, $g'(x) \geq 0$ 부분이 존재한다면 $g'(x)$의 개형이



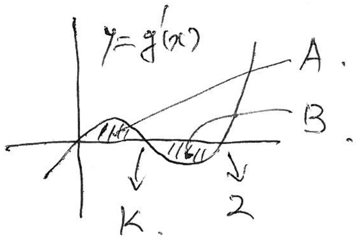
$\rightarrow$ $f(x)$는 3차이므로 $f(2)=0$ 이 불가하다.

따라서 $g'(x)$의 가능한 개형을 정리하면 다음과 같다.

(i)



(ii)



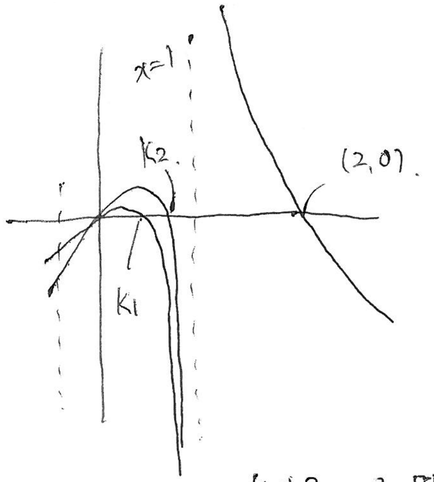
$(A \geq B)$.

$g''(x)$가 존재하는 상황이므로 $(k>2)$ 경우는 더 이상 고려할 필요가 없다. 또한 (i) 역시 (ii) 보다 $g'(-1)$의 값이 작다. (그래프를 통한 직관으로 이해하는 것이 좋다. but 그렇게 못하더라도 문제 조건에서 $f(-1)$의 값이 나와있으므로 (i)의 경우

$f(x) = x(x-2)^2$, $g'(x) = \frac{x(x-2)^2}{x+1}$ $(x>0)$, $\frac{x(x-2)^2}{-x+1}$ $(x<0)$ 이므로 조건에 맞지 않는다는 점을 확인하고 (ii) 경우를 살펴도 된다)

* k값에 따른 $g'(x)$의 변화 ($(x<0)$에서만 의미있고, $(x>0)$에서는 다른 함수식임에 주의)

$k_1 < k_2 < 1$



즉, k값이 0에 가까워질수록 $g'(-1)$의 값은 커진다.

동시에 $g(x) \geq 0$ $(x \in R)$을 만족시키려면

$\int_0^2 \frac{f(t)}{t+1} dt \geq 0$ 되어야 하므로, 두 조건을

동시에 만족시키는 k는 $\int_0^2 \frac{f(t)}{t+1} dt = 0$이 될 때의

k이고, 그 때의 $g'(-1)$의 값이 최대가 된다.

$\int_0^2 \frac{x(x-k)(x-2)}{x+1} dx = 0$, ∴ x축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동하면 (분모부분을 간단히 하기위해)

$$\int_1^3 \frac{(x-1)(x-(k+1))(x-3)}{x} dx = \int_1^3 \frac{(x^2-4x+3)(x-(k+1))}{x} dx$$

$$= \int_1^3 \frac{x^3-(k+5)x^2+(4k+7)x-3(k+1)}{x} dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 - \left[\frac{(k+5)x^2}{2}\right]_1^3 + \left[(4k+7)x\right]_1^3 - \left[3(k+1)\cdot \ln|x|\right]_1^3$$

$$= \left(9-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{9}{2}k+\frac{45}{2}-\frac{k}{2}-\frac{5}{2}\right) + (8k+14) - 3k\ln 3 - 3\ln 3$$

$$= 4k - 3k\ln 3 + \frac{26}{3} - 6 - 3\ln 3 = 0. \quad \therefore (4-3\ln 3)k = 3\ln 3 - \frac{8}{3}.$$

$\therefore k = \frac{3\ln 3 - \frac{8}{3}}{4-3\ln 3}$. $f(x) = x\times(x-k)\times(x-2)$에서 $f(-1) = 3\times(-1-k) = -3-3k$.

$$\therefore -3-3\times k = -3(1+k) = -3\times\left(\frac{4-3\ln 3+3\ln 3-\frac{8}{3}}{4-3\ln 3}\right) = -3\times\frac{\frac{4}{3}}{4-3\ln 3}$$

$= \frac{-4}{4-3\ln 3}$. ∴ $m=4$, $n=-4$. 따라서 $|m\times n| = |-16| = 16$ //

* 2020학년도 사관학교 수학 나형 30번.

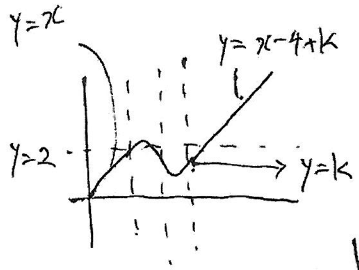
이차함수 $f(x)$, $g(x)$

$$h(x) = \begin{cases} x & (0 \le x < 2) \\ f(x) & (2 \le x < 3) \\ g(x) & (3 \le x < 4) \end{cases}$$

(가) $\forall x \in R$, $h(x) = h(x-4) + k$.

(나) $\forall x \in R$, $h(x)$는 미분가능.

(다) $\int_0^4 h(x)\,dx = 6$.



$f(x)$는 최고차항의 계수가 음수, 대칭축이 $(2, 3)$에 존재하고,
$g(x)$는 최고차항의 계수가 양수, 대칭축이 $(3, 4)$에 존재하는 개형이다.

$h(x)$가 실수전체에서 미분가능하므로

$a(x-2)^2 = f(x) - x$, $b(x-4)^2 = g(x) - x + 4 - k$

$2a(x-2) = f'(x) - 1$, $2b(x-4) = g'(x) - 1$.

이차함수와 접선인 일차함수의 연립을 이용.

(나)에 의해 $f(2) = 2$, $f'(2) = 1$, $f(3) = g(3)$, $f'(3) = g'(3)$, $g(4) = k$, $g'(4) = 1$

($h(x)$가 미분가능하므로 $\lim_{x \to 3-} f'(x)$ 등을 그냥 $\lim$ 없이 표현가능)

$f(3) = a + 3 = g(3) = b - 1 + k$.

$f'(3) = 2a + 1 = g'(3) = -2b + 1$.

$\therefore a = -b$, $2a + 4 = k$.

$\int_0^2 x\,dx = 2$ 이므로 $\int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 g(x)\,dx = 4$.

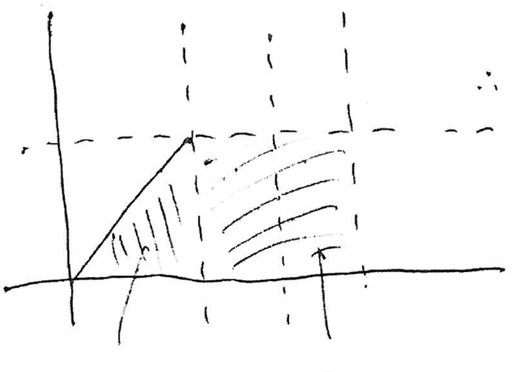
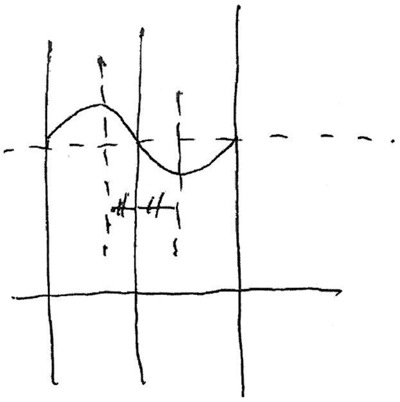
$\therefore \int_2^3 \{a(x-2)^2 + x\}\,dx = \int_0^1 (ax^2 + x + 2)\,dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{5}{2}$

$\int_3^4 \{-a(x-4)^2 + x - 4 + k\}\,dx = \int_{-1}^0 (-ax^2 + x + k)\,dx = \left[-\frac{ax^3}{3} + \frac{x^2}{2} + kx\right]_{-1}^0 = -\left(\frac{a}{3} + \frac{1}{2} - k\right)$

$\therefore 2 + k = 4$, $k = 2$, $a = -1$, $b = 1$.

$\therefore h\left(\frac{13}{2}\right) = h\left(\frac{5}{2}\right) + 2 = f\left(\frac{5}{2}\right) + 2 = -(x-2)^2 + x\Big|_{x=\frac{5}{2}} + 2 = \frac{9}{4} + 2 = \frac{17}{4}$ //

* $\int_0^6 h(x)\,dx = 6$.

2. 4.

최고차항의 계수의 크기가 같으면 위와 같아야 한다.

* $f(x) = ax^2 + bx + c$,

$g(x) = px^2 + qx + r$.

계산하면

$$\begin{cases} f(x) = ax^2 + (1-4a)x + 4a \\ g(x) = -ax^2 + (1+8a)x - 14a \end{cases}$$

와 같이 정리된다. 실전에서 차함수 활용이 떠오르지 않으면 이렇게라도 풀 수 있어야 한다.

⇒ 연습과 체득은 가능한 다양한 방법으로, 시험장에서는 먼저 떠오르는 방법으로.

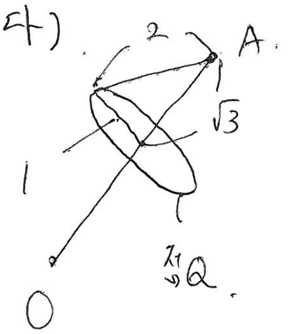
* 2020학년도 사관학교 수학 가형 29번.

구 C : $x^2+y^2+(z+2)^2=2$, 위의 점 P, $|\overrightarrow{AQ}|=2$

점A (0, 3, 3), $\Rightarrow$ 구 $x^2+(y-3)^2+(z-3)^2=2^2$ 위의 점 Q.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}=3\sqrt{6}$. $|\overrightarrow{AO}|=3\sqrt{2}$ 이므로 구 위의 점들 중 직선 AO에 정사영시켰을 때,

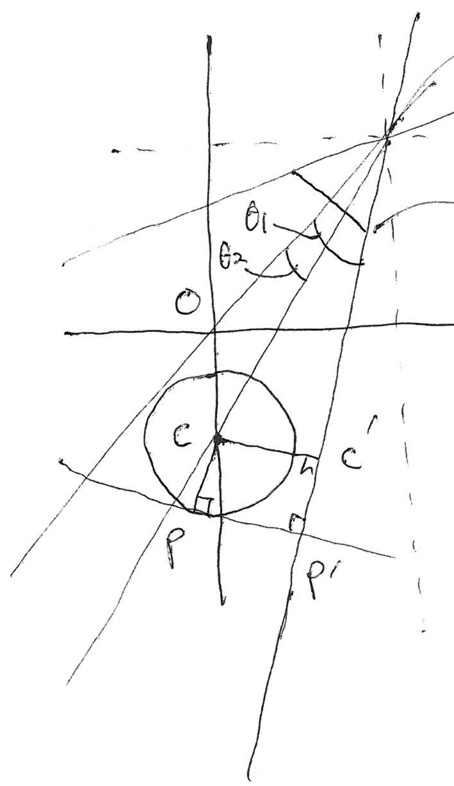
정사영된 점과 점A와의 거리가 $\sqrt{3}$인 점이 Q가 된다. (원으로 나타난다)



이 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$는 점Q가 회전할 때, 점P도 회전하고,

내적값이 정해진 상태에서는 점P와 점Q가 같이 회전하므로

점P, 점Q를 모두 하나의 평면(ex, yz평면)에서 계산한다. → (일반성은 유지된다)



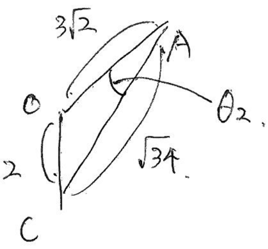
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최댓값은 $\overline{AQ}\times\overline{AP'}$이다.

$\angle OAQ=\theta_1$, $\angle OAC=\theta_2$.

$\overline{AC'}=\overline{AC}\times\cos(\theta_1-\theta_2)$

$\cos\theta_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin\theta_1=\dfrac{1}{2}$.



$$\cos\theta_2=\frac{18+34-4}{2\times3\sqrt{2}\times\sqrt{34}}=\frac{48}{12\sqrt{17}}=\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

(제2코사인 법칙)

$$\sin\theta_2=\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 최댓값은 $\overline{AQ}\times(\overline{C'P'}+\overline{AC'})=2\times\left(\sqrt{2}+\overbrace{\sqrt{34}}^{\sqrt{2}\times\sqrt{17}}\times\dfrac{4\sqrt{3}+1}{2\sqrt{17}}\right)$

$$=2\times\left(\sqrt{2}+\frac{4\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)=2\times\left(\frac{4\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}+4\sqrt{6}.\quad\therefore\ p+q=7\,//$$

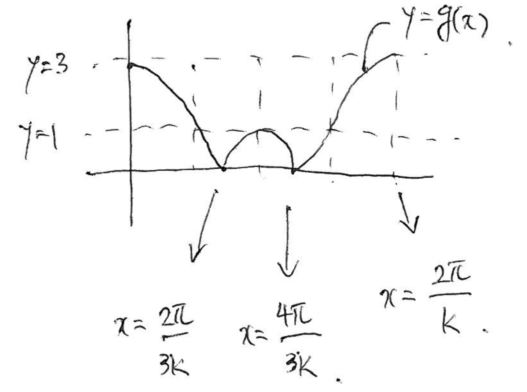
* $\cos(\theta_1-\theta_2)=\dfrac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{17}}+\dfrac{1}{2\sqrt{17}}=\dfrac{4\sqrt{3}+1}{2\sqrt{17}}$.

* 2020학년도 사관학교 수학 가형 21번.

$f(x) = 4\sin\frac{\pi}{6}x$.

$g(x) = |2\cos kx + 1|$

$0<x<2\pi$, $h(x) = f\circ g(x)$.



$g(0)=3. \rightarrow h(0)=4.$

$g(\frac{\pi}{2k})=1 \rightarrow h(\frac{\pi}{2k})=2.$

$g(\frac{2\pi}{3k})=0. \rightarrow h(\frac{2\pi}{3k})=0.$

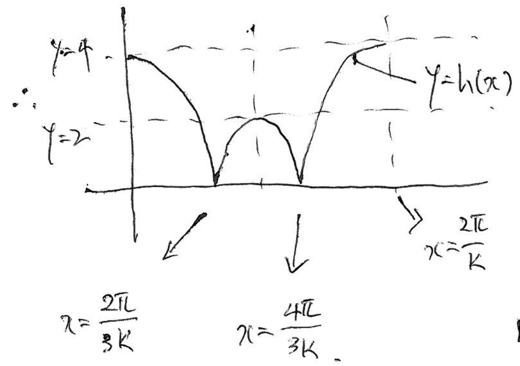
$g(\frac{\pi}{k})=1 \rightarrow h(\frac{\pi}{k})=2.$

$g(\frac{4\pi}{3k})=0 \rightarrow h(\frac{4\pi}{3k})=0.$

+ $g(\frac{3\pi}{2k})=1.$ $\rightarrow h(\frac{3\pi}{2k})=2.$

$g(\frac{2\pi}{k})=3.$ $\rightarrow h(\frac{2\pi}{k})=4.$

∴



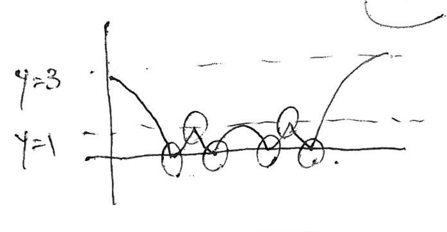
ㄱ. k=1이면 $x=\frac{2}{3}\pi$, $x=\frac{4\pi}{3}$에서 미분불가. → True.

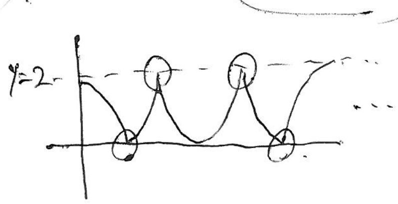
ㄴ. k=2이면 좌측그래프가 한 번 더 나타나므로

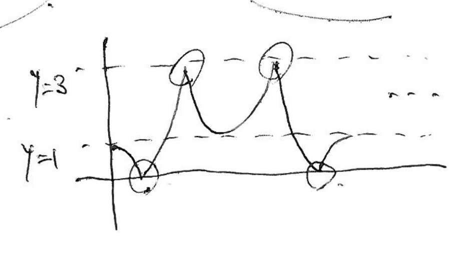
$0<x<2\pi$ 에서 서로 다른 실근의 개수는 6이다. → True.

ㄷ. ㄴ에서 얻은 정보를 활용하면 k값에 따라 한 세트의 주기가 $0<x<2\pi$에서 k번 등장.

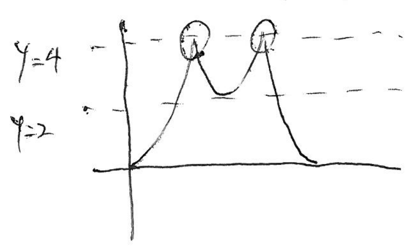
∴ (k=1) → $a_1=6$. (k=2) → $a_2 = k\times4 = 8$ (k=3) → $a_3 = k\times4 = 12$







(k=4) → $a_4 = k\times2 = 8$.



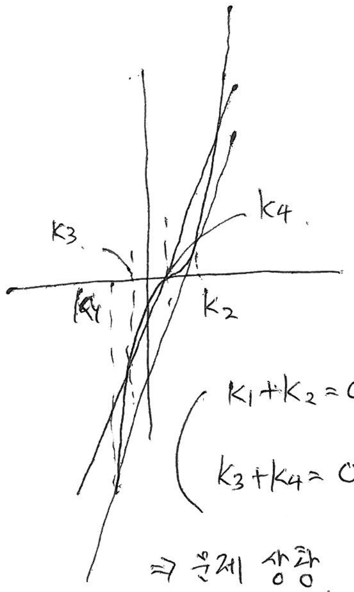
∴ ㄷ. $\sum_{k=1}^{4} a_k = 6+8+12+8 = 34$ → True.

* 2020 학년도 사관학교 수학 나형 21번.

$$f(x) = (x-2)^3$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (|x| < a) \\ mx+n & (|x| \geq a) \end{cases} \quad (a>0).$$

$\forall x \in R$, $g(x)$는 연속.



$\left(\begin{matrix} k_1+k_2=0. \\ k_3+k_4=0. \end{matrix} \right)$.

⇒ 문제 상황.

$g(x)$가 연속이므로 $(a, f(a))$, $(-a, f(-a))$를 잇는

직선이 $mx+n$ 이다.

$$\therefore m = \frac{(a-2)^3-(-a-2)^3}{a-(-a)} = \frac{(a-2)^3+(a+2)^3}{2a}$$

$$= \frac{a^3-8-6a(a-2)+a^3+8+6a(a+2)}{2a} = \frac{2a^3+12a+12a}{2a} = \frac{2a^3+24a}{2a} = a^2+12$$

ㄱ. $a=1$ 일 때 $m = a^2+12 \big|_{a=1} = 13$ → True.

ㄴ. $f'(a)=m$ 일 때 $m=48$. $\quad (f'(x) = 3(x-2)^2)$.

$3(a-2)^2 = a^2+12$. $\therefore 2a^2-12a = 2a(a-6)=0$. $\therefore a=6$.

$a=6$일 때 $m = a^2+12 \big|_{a=6} = 36+12 = 48$. → True.

ㄷ. $f(a)-2af'(a) > n-ma$

$(a, f(a)) = (a, ma+n) \quad \therefore n = f(a)-ma$.

따라서 주 식은 $f(a)-2af'(a) > f(a)-2ma \quad \therefore m > f'(a)$.

$\therefore a^2+12 > 3(a-2)^2 \rightarrow 2a^2-12a < 0$. $\therefore 0<a<6$.

a가 자연수라면 $a=1, 2, 3, 4, 5$. → True.

→ 미지수 a, m, n을 연립방정식을 통해서 하나의 미지수로 설명할 수 있는가?

※ 2020학년도 사관학교 수학 나형 29번.

$a_1 = a$ 가 자연수. n는 자연수. $a_n < 0$인 자연수 n의 최솟값을 m, $(m \geq 3)$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - d & (a_n \geq 0) \\ a_n + d & (a_n < 0) \end{cases} \quad (d\text{는 자연수}) \quad \rightarrow \begin{cases} a_{m-1} = a_{m+1} = a_{m+3} = \cdots \\ a_m = a_{m+2} = a_{m+4} = \cdots \end{cases}$$

(가) $a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = 3a_{m-1} = 3$. $\therefore a_{m-1} = 1$. $(\because d \geq 2)$

(a_1에서 a_m까지는 초항이 a_1이고, 공차가 $-d$인 등차수열로 볼 수 있다 → 등차중항)

(나) $a_1 + a_{m-1} = a + 1 = -9(a_m + a_{m+1}) = -9(a_m + a_{m-1}) = -9(a_m + 1)$

$= -9(1 - d + 1)$ $(\because a_m = a_{m-1} - d = 1 - d)$

$\therefore a = 9d - 19$. $\therefore d > 2$, 또한 (다)에 의해 $a \leq 44$. $\therefore d \leq 7$

(다) $\sum_{k=1}^{m-1} a_k = 45$. $\rightarrow \therefore d = 3$ or 4 or 5 or 6 or 7.

(i) $d = 3$. $-2, 1, 4, 7, 10, 13, 16$ $\rightarrow \Sigma \neq 45$

(ii) $d = 4$. $-3, 1, 5, 9, 13, 17$. $\rightarrow \Sigma = 45$.

(iii) $d = 5$ $-4, 1, 6, 11, 16, 21$ $\rightarrow \Sigma \neq 45$.

(iv) $d = 6$ $-5, 1, 7, 13, 19, 25$ $\rightarrow \Sigma \neq 45$

(v) $d = 7$. $-6, 1, 8, 15, 22$ $\rightarrow \Sigma \neq 45$.

$\therefore d = 4$.

$a_1 = 17$. $m = 6$.

따라서 $a_1 = 17$ //

$\{a_n\} = 17, 13, 9, 5, 1, -3, 1, -3, 1, -3, \cdots\cdots$

* 2020학년도 사관학교 수학 가형 19번.

$f(x) = xe^{2x} - (4x+a)e^x$

$x = -\frac{1}{2}$ 일 때 극대, $f(x)$의 극솟값은?

1) $x \in R$.

2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (e^{2x} 부분만 살펴봐도 된다)

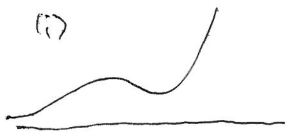
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0(-) - 0(-) = 0(+)$

→ a가 상수이므로 $\underbrace{\left|\frac{x}{e^{-2x}} = \frac{-\infty}{\infty} = 0(-)\right| < \left|\frac{4x}{e^{-2x}} = 0(-)\right|}$.

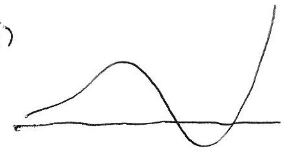
로피탈 정리로 증명.

∴ $f(x)$의 개형은

(i)



(ii)



$f(x) = xe^{2x} - (4x+a)e^x$

$f'(x) = (1+2x)e^{2x} - (4+4x+a)e^x = e^x \times \{(2x+1)e^x - (4x+4+a)\}$

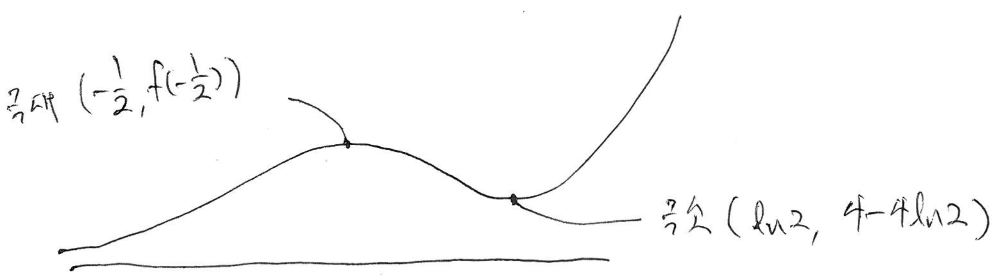
$f'(-\frac{1}{2}) = 0$ 이므로 $2+a=0$ 에서 $a=-2$.

따라서 $f'(x) = e^x \times \{(2x+1)e^x - (4x+2)\} = e^x \times (2x+1) \times (e^x - 2)$

$\therefore f'(-\frac{1}{2}) = 0,\ f'(\ln 2) = 0,\quad (-\frac{1}{2} < \ln 2)$

극솟값은 $f(\ln 2) = \ln 2 \times e^{2\ln 2} - (4\ln 2 - 2)e^{\ln 2} = 4\ln 2 - 8\ln 2 + 4 = 4 - 4\ln 2$ //

따라서 $f(x)$의 개형은 다음과 같다.



* 2020학년도 사관학교 수학 가형 20번.

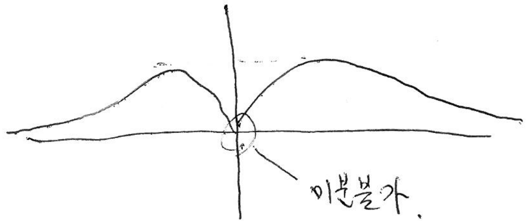
$f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$ 1) $x \in R$, 2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0(+)$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0(+)$.

3) $(0, 0)$. $f(x) = f(-x)$ → 절대값 기호 때문에 쉽게 와닿지 않을 수 있는데,

$|x| = \sqrt{x^2}$ 을 생각하면 된다.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-(x^2-1)}{(x^2+1)^2} & (x \ge 0) \\ \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & (x < 0) \end{cases}$$

∴ $f(x)$의 개형은



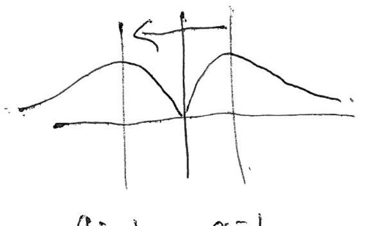
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < a) \\ f(b-x) & (x \ge a) \end{cases}$$ 미분가능.

∴ $a < 0$. (∵ $f(x)$에서 $(x<a)$에서 미분불가능한 부분이 없어야 한다).

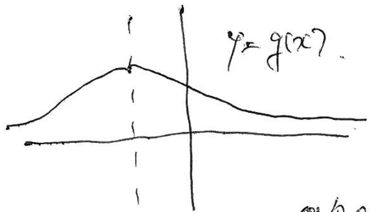
$f(x) \rightarrow f(-x) \rightarrow f(-(x-b)) = f(b-x)$

↓ 대칭이동 (차이없음) ↘ 평행이동 (x축의 방향으로 b 만큼)

→ $f(x)$의 그래프에서 $x = a$ $(a<0)$를 기준으로 $(x<a)$ 부분만 남긴다음, $(x \ge a)$ 부분은 $f(x)$를 평행이동시켜서 전구간에서 미분가능하도록 만든 함수가 $g(x)$이다.



⇒



∴ $b = -2$ (음의 방향으로 2).

($-1 < a < 0$ 이면 평행이동시켜서 연속은 가능하지만 미분불가능한 함수가 된다).

따라서 $\int_a^{a-b} g(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \dfrac{x}{x^2+1}dx = \int_2^{10} \dfrac{1}{2t}dt$.

↕

$x^2+1 = t$. $2xdx = dt$.

$x=1 \rightarrow t=2$.

$x=3 \rightarrow t=10$.

∴ $\left[\dfrac{1}{2}\ln|t|\right]_2^{10} = \dfrac{1}{2}\ln 5$ //

* 2020학년도 사관학교 수학 나형 20번.

$f(x) = x^4 + \cdots$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq a) \\ 2a - f(x) & (f(x) < a) \end{cases} \quad (a\text{는 상수})$$

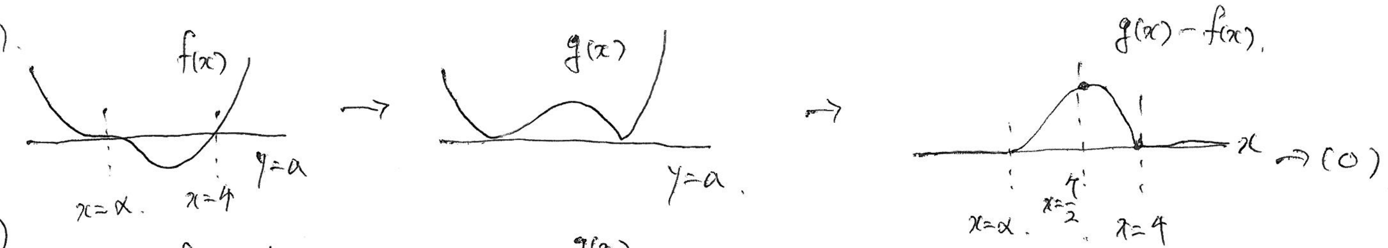
$g(x) = |f(x) - a|$

$g(x)$는 $y=a$를 기준으로 아래부분을 위로 접어올린 그래프이다.

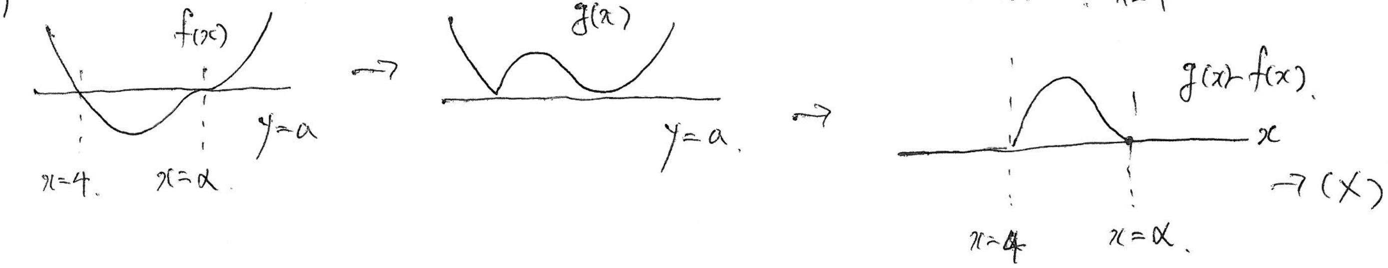
(가) $g(x)$는 $x=4$ 에서만 미분불가.

4차함수의 그래프를 특정 $y=a$ 에 대해서 접어올린 그래프가 한 점에서만 미분이 불가능하다면 다음 두 가지 경우이다. (삼중근의 형태를 띤다).

(i).



(ii)



$$f(x) - a = (x-\alpha)^3(x-4)$$

$$f'(x) = 3(x-\alpha)^2(x-4) + (x-\alpha)^3 = (x-\alpha)^2(3x-12+x-\alpha) = 4(x-\alpha)^2\left(x - \frac{\alpha+12}{4}\right)$$

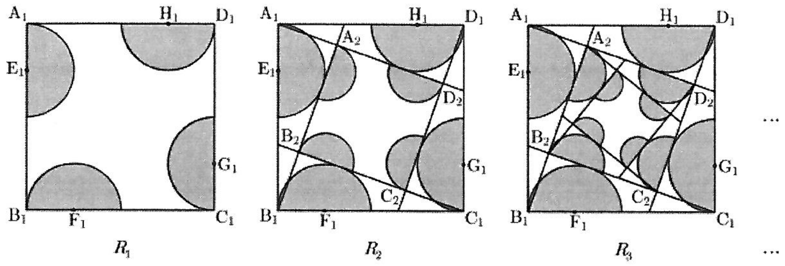
$f'\left(\frac{7}{2}\right) = 0$ 이므로 $\frac{\alpha+12}{4} = \frac{7}{2} = \frac{14}{4}$. $\therefore \alpha = 2$.

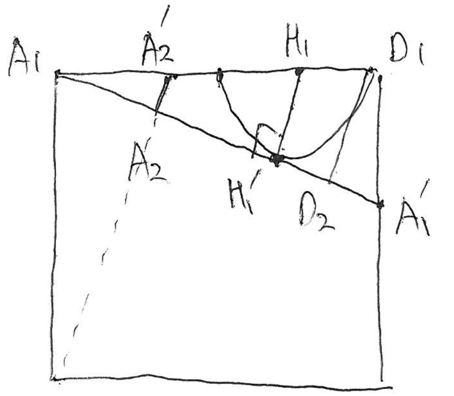
$\underbrace{a - f\left(\tfrac{7}{2}\right)}_{\text{거리개념.}} = g\left(\frac{7}{2}\right) - a$ 이므로 $g\left(\frac{7}{2}\right) = a + \left(a - f\left(\frac{7}{2}\right)\right)$

$\therefore g\left(\frac{7}{2}\right) - f\left(\frac{7}{2}\right) = 2a - 2f\left(\frac{7}{2}\right) = 2a$. $\therefore f\left(\frac{7}{2}\right) = 0$.

$\therefore f\left(\frac{7}{2}\right) = 0 = \left(\frac{7}{2}-2\right)^3\left(\frac{7}{2}-4\right) + a$ $\therefore a = \frac{27}{16}$. $\therefore f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{8} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{27}{16} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ //

* 2020학년도 사관학교 수학 나형 18번.





$\overline{A_1H_1} : \overline{A_1H_1'} = 3 : \sqrt{8}$ ∴ $\overline{A_1D_2} = \frac{4\sqrt{8}}{3}$. $\overline{D_1D_2} = \frac{4}{3}$.

$\overline{A_1A_1'} = \frac{12}{\sqrt{8}}$. ∴ $\overline{D_2A_1'} = \frac{12}{\sqrt{8}} - \frac{4\sqrt{8}}{3} = \frac{3\sqrt{8}}{2} - \frac{4\sqrt{8}}{3} = \frac{\sqrt{8}}{6}$.

$\overline{A_2A_2'} = \overline{D_2A_1'} = \frac{\sqrt{8}}{6}$. $\overline{A_1A_2} = \overline{D_1D_2} = \frac{4}{3}$.

∴ $\overline{A_2D_2} = \overline{A_1A_1'} - \overline{A_1A_2} - \overline{D_2A_1'} = \frac{12}{\sqrt{8}} - \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{8}}{6} = \frac{9\sqrt{8}-8-\sqrt{8}}{6} = \frac{8\sqrt{8}-8}{6}$.

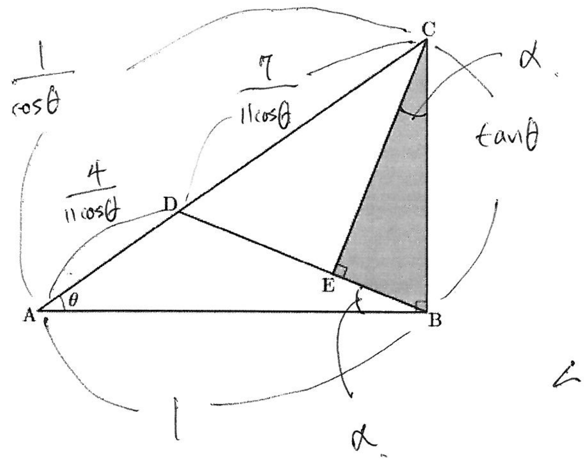
1) n : $4 \to 4$ (R_2에서 추가된 부분). ∴ $n = 1$.

2) l_r : $4 \to \frac{8\sqrt{8}-8}{6}$. ∴ $l_r = \frac{2\sqrt{8}-2}{6} = \frac{\sqrt{8}-1}{3}$. ∴ $S_r = \frac{9-2\sqrt{8}}{9}$.

3) a : $\left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \pi\right) \times 4 = 2\pi$.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2\pi}{1 - \frac{9-2\sqrt{8}}{9} \times 1} = \frac{\frac{2\pi}{1}}{\frac{2\sqrt{8}}{9}} = \frac{9\pi}{\sqrt{8}} = \frac{9\sqrt{8}}{8}\pi = \frac{9\sqrt{2}\pi}{4}$ //

* 2020 학년도 사관학교 수학 가형 28번.



$\angle DBA = \alpha$ 라 하면 $\angle ECB = \alpha$.

$\therefore \overline{EC} = \tan\theta \times \cos\alpha$.

$\overline{EB} = \tan\theta \times \sin\alpha$

$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \times \tan^2\theta \times \cos\alpha \times \sin\alpha$

$$\angle DCE = \frac{\pi}{2} - \theta - \alpha = \frac{\pi}{2} - (\theta + \alpha).$$

$$\therefore \overline{EC} = \overline{DC} \times \cos(\angle DCE) = \frac{7}{11\cos\theta} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta+\alpha)\right) = \frac{7}{11\cos\theta} \times \sin(\theta+\alpha)$$

$$= \frac{\sin\theta \cdot \cos\alpha}{\cos\theta} = \frac{7(\sin\theta \cdot \cos\alpha + \cos\theta \sin\alpha)}{11\cos\theta}$$

$$\therefore \frac{4}{11} \times \sin\theta \times \cos\alpha = \frac{7}{11} \times \cos\theta \times \sin\alpha. \qquad \therefore \frac{4}{7}\tan\theta = \tan\alpha.$$

$$1 + \tan^2\alpha = 1 + \frac{16}{49}\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad \therefore \cos\alpha = \sqrt{\frac{49}{49+16\tan^2\theta}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{16\tan^2\theta}{49+16\tan^2\theta}}$$

$\left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$

$\angle ADB > \frac{\pi}{2}$.

$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$.

$$\therefore \lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{1}{2} \times \frac{\tan^2\theta}{\theta^2} \times \frac{1}{\theta} \times \frac{28 \times \tan\theta}{49 + 16\tan^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{28}{49} = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}. \qquad \therefore 2 + 7 = 9$$

* 2020학년도 사관학교 수학 가형 18번 (나형 19번)

n은 자연수, $a+b+c=3n$ (a, b, c는 자연수)

$\therefore$ 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 ${}_3H_{3n-3} = {}_{3n-1}C_2 = \dfrac{(3n-1)(3n-2)}{2}$ (All).

A : $a>b$ 또는 $a>c$, A^c : $a \le b$ 그리고 $a \le c$,

$\therefore$ $a=1$, $1+b'+1+c'+1=3n$ $\therefore {}_2H_{3n-3} = {}_{3n-2}C_1$

$a=2$, $2+b'+2+c'+2=3n$ $\therefore {}_2H_{3n-6} = {}_{3n-5}C_1$

$a=3$, $3+b'+3+c'+3=3n$ $\therefore {}_2H_{3n-9} = {}_{3n-8}C_1$

$\cdots\cdots$

$a=k$, $k+b'+k+c'+k=3n$ $\therefore {}_2H_{3n-3k} = {}_{3n-3k+1}C_1$.

(단, $1 \le k \le n$) $= 3n-3k+1$

$$n(A^c) = \sum_{k=1}^{n} {}_{3n-3k+1}C_1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (3n-3k+1)$$

$$= 3n^2 - \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{3n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{n(A^c)}{All} = \frac{\frac{n(3n-1)}{2}}{\frac{(3n-1)(3n-2)}{2}} = \frac{n}{3n-2}$$

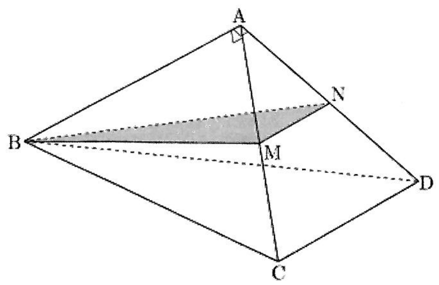
$$\therefore P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{n}{3n-2} = \frac{2n-2}{3n-2}.$$

따라서 박스 내용과 연결지으면

(가) $= \dfrac{(3n-1)(3n-2)}{2}$, (나) $= {}_{3n-3k+1}C_1 = 3n-3k+1$, (다) $= \dfrac{2n-2}{3n-2}$

$\therefore$ $p=10$, $q=21-6+1=16$, $r=\dfrac{6}{10}$. $\therefore p \times q \times r = 96$//

* 2020학년도 사관학교 수학 가형 26번.

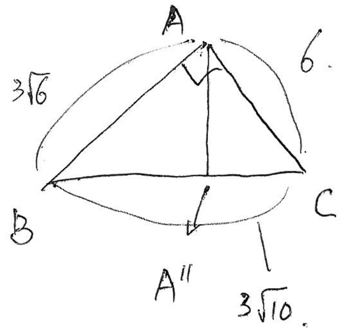


$\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{CD}=6$. $\overline{CD}$의 중점을 M이라 하자.

$\overline{BC}=3\sqrt{10}$, $\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$. $\overline{BM'}=\sqrt{90-9}=9$.

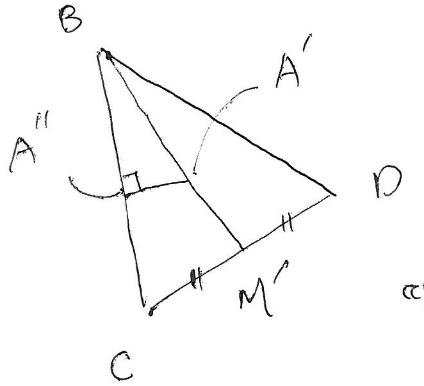
$\triangle BCD$는 이등변삼각형.

점A가 평면 BCD 위에 정사영 되는 점을 A', 변BC에 정사영 되는 점을 A''이라 하자.



$\frac{1}{2}\times 3\sqrt{6}\times 6=\frac{1}{2}\times\overline{AA''}\times 3\sqrt{10}$ 에서 $\overline{AA''}=\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$.

$36=\frac{216}{10}+\frac{144}{10}$ 이므로 $\overline{A''C}=\frac{12}{\sqrt{10}}$, $\therefore\ \overline{BA''}=\frac{18}{\sqrt{10}}$

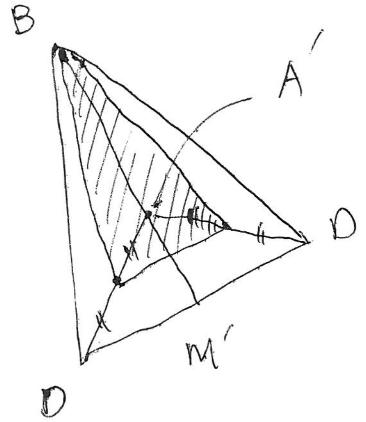


$\triangle CMB$와 $\triangle A'A''B$는 닮음꼴이므로

$3\sqrt{10} : 9=\overline{A'B} : \frac{18}{\sqrt{10}}$. $\therefore\ \overline{A'B}=6$.

따라서 삼각형 BMN의 평면 BCD 위로의 정사영은

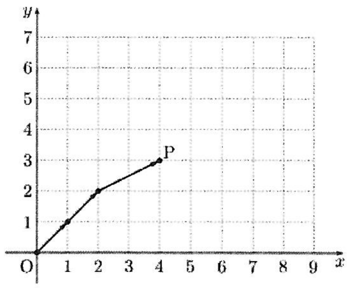
다음과 같다.



$\therefore\ S=\frac{1}{2}\times 3\times\left(6+3\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3\times 15}{4}$

$\therefore\ 40S=45\times 10=450$//

* 2020학년도 사관학교 수학 가형 27번.



버튼 ㉠ 대각점프 (우상), $\sqrt{2}$

버튼 ㉡ 대각점프 (우우상), $\sqrt{5}$

(0,0)에 있던 점 P가 A(5,5), B(6,4) 중 어느 점도 지나지 않고, 점 C(9,7)로 이동하는 경우의 수?

1) y좌표값은 버튼을 누른 총 횟수를 의미한다.

2) y좌표값은 x좌표값보다 같거나 작다.

3) 점A에서 점B로 또는 그 반대로 이동하는 경우는 없다.

→ [P→C] − [P→A→C] − [P→B→C] 계산 가능.

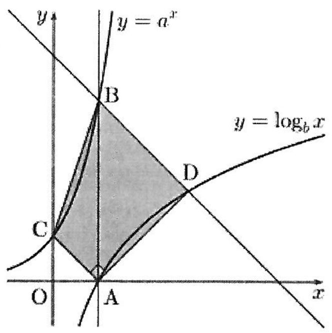
$\therefore$ [P→C] : $\dfrac{7!}{2!5!} = {}_7C_2 = 21$

[P→A→C] : $\dfrac{5!}{5!} \times \dfrac{2!}{2!} = 1$

[P→B→C] : $\dfrac{4!}{2!2!} \times \dfrac{3!}{3!} = {}_4C_2 \times 1 = 6$

$\therefore 21 - 1 - 6 = 14$

* 2020학년도 사관학교 수학 가형 16번.



$A(1, 0)$, $B(1, a)$, $C(0, 1)$

직선 AC와 직선 BD의 기울기 $= -1$.

$\therefore$ 직선 BD : $y = -(x-1)+a = -x+1+a$ } 교점 D

직선 AD : $y = x-1$. ($\because AC \perp AD$) $\left(1+\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

$(a>1, b>1)$.

$\therefore \frac{a}{2} = \log_b\left(1+\frac{a}{2}\right)$ ······ ①

$\square ADBC = \triangle ABC + \triangle ADB$

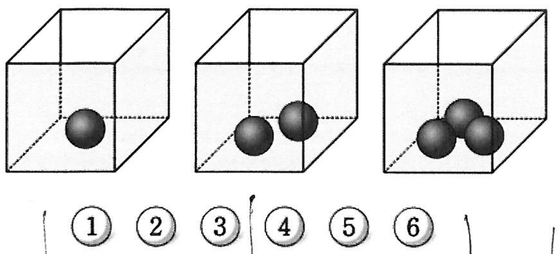
$= \frac{1}{2}\times a\times 1 + \frac{1}{2}\times a\times\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} = 6$

$\therefore a^2+2a-24 = (a+6)(a-4) = 0$ 에서 $a=4$ ··· ② ($\because a>1$)

① 에서 $2 = \log_b 3$ 이 성립하므로 $b = \sqrt{3}$ ········ ③

$\therefore a\times b = 4\sqrt{3}$ //

* 2020학년도 사관학교 수학 나형 28번.



2개	1개	0개
5개	4개	3개
8개	7개	6개
...	...	....

박스 안의 공의 개수가 3의 배수가 되도록 추가되는 공의 개수 조건들.

∴ (2개, 4개, 0개) or (2개, 1개, 3개) or (5개, 1개, 0개) 의 경우들에서 조건을 만족시킬 수 있다.

∴ (i) ${}_6C_2 \times {}_4C_4 \times {}_0C_0 = 15$

(ii) ${}_6C_2 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3 = 60$

(iii) ${}_6C_5 \times {}_1C_1 \times {}_0C_0 = 6$.

∴ $15+60+6=81$

* 2020학년도 사관학교 수학 나형 16번.

서로 이웃하는 두 카드에 적힌 수가 모두 홀수인 경우를 제외하면 된다.

⇒ 홀수들을 서로 이웃하지 않게 배열한다.

∴ 1, 3, 5~6 (2가지)

└→ ${}_2H_2$

└→ ${}_2H_3$

홀수 배열할 자리 결정 ${}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$

∴ $4 \times 3!$ (홀수 배열) $\times 3!$ (짝수 배열) $= 144$

주의: 카드에 적힌 숫자가 아니고 배열되는 자리를 의미한다.

* 2020 학년도 사관학교 수학 나형 27번.

모든 실수 x에 대하여 다항함수 $f(x)$

$$\int_1^x (2x-1)f(t)\,dt = x^3+ax+b.$$

$$\rightarrow (2x-1)\int_1^x f(t)\,dt = x^3+ax+b$$

(i) $(x=1)$. $1+a+b=0$.

(ii) $(x=\frac{1}{2})$. $\frac{1}{8}+\frac{a}{2}+b=0$.

$\therefore \frac{7}{8}+\frac{a}{2}=0$. $a=-\frac{7}{4}$. $b=\frac{3}{4}$.

양변 미분 ; $2\int_1^x f(t)\,dt + (2x-1)f(x) = 3x^2+a$.

$(x=1)$ $f(1)=3+a=3-\frac{7}{4}=\frac{5}{4}$. $\therefore 40\times f(1)=50$ //

* 2020 학년도 사관학교 수학 나형 15번.

$0<b<a$, $9^a=2^{\frac{1}{b}}$, $(a+b)^2=\log_3 64=6\log_3 2$

$2a=\log_3 2^{\frac{1}{b}}=\frac{1}{b}\log_3 2$. $\therefore 2ab=\log_3 2$ $\therefore a^2+b^2=5\log_3 2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=5\log_3 2-\log_3 2=4\log_3 2$.

$$\therefore \frac{a-b}{a+b}=\frac{\sqrt{4\log_3 2}}{\sqrt{6\log_3 2}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3} //$$

* 2020학년도 사관학교 수학 나형 14번.

수열 $\{a_n\}$, $a_1=4$. 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2-a_n} & (a_n>2) \\ a_n+2 & (a_n\le 2) \end{cases}$$

$\therefore a_1=4,\ a_2=-2,\ a_3=0,\ a_4=2,\ a_5=4,\ \cdots$

항 네 개가 한 세트로 반복되는 주기수열이다.

따라서 한 세트의 합은 4이므로 $S_4=4$, $S_8=8$, $S_9=S_8+a_9=12$.

$\therefore \sum_{k=1}^{m} a_k = S_m = 12$를 만족시키는 m은 9와 12가 있고, 최솟값은 9 //

* 2020학년도 사관학교 수학 나형 17번.

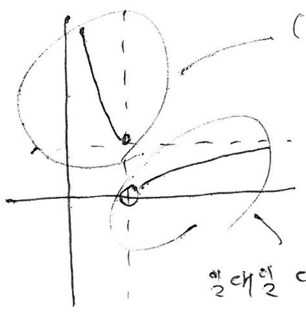
$(x>0)$ $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}+1 & (0<x\le 3) \\ -\dfrac{1}{x-a}+b & (x>3) \end{cases}$, $f(x)$는 일대일 대응.

$f: X \to X$.

→ { 일대일 함수: $x_1 \ne x_2 \Rightarrow f(x_1) \ne f(x_2)$, x는 임의의 정의역 원소,

일대일 대응: 일대일 함수 조건 + (치역 = 공역) → 동의어 (전단사 함수).

공역이 $(x>0)$ 이므로 치역도 $(x>0)$ 한다.



(확정).

$y=\frac{4}{3}$.

일대일 대응이 되기 위해서 결정되는 개형.

$\therefore -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $b\left(=\frac{4}{3}\right)$ 만큼 평행이동 한다.

(i) $-\frac{1}{x}+\frac{4}{3}$ 에서 x절편이 $\frac{3}{4}$ 이므로 $\left(\frac{3}{4}, 0\right) \to (3, 0)$ 이 되도록 평행이동. $\therefore a = 3-\frac{3}{4} = \frac{9}{4}$.

따라서 $a+b = \frac{9}{4}+\frac{4}{3} = \frac{27+16}{12} = \frac{43}{12}$ //

* 2020학년도 사관학교 수학 가형 17번.

정사각형의 한 변의 길이가 $\frac{3}{x}-\sqrt{\ln x}$ 이므로 구하는 입체도형의 부피는 $\int_1^3 \left(\frac{3}{x}-\sqrt{\ln x}\right)^2 dx$ 로

나타낼 수 있다. $\therefore \int_1^e \left(\frac{9}{x^2}-\frac{6\sqrt{\ln x}}{x}+\ln x\right)dx = \int_1^e \left(\frac{9}{x^2}+\ln x\right)dx - \int_1^e \frac{6\sqrt{\ln x}}{x}dx$

$= \left[-\frac{9}{x}+x\ln x-x\right]_1^e - \left[4x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$\ln x = t$, $x=1,\ t=0$, $x=e,\ t=1$. $\int_0^1 6t^{\frac{1}{2}}dt = \left[4t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$= \left(-\frac{9}{e}+e-e\right)-\left(-9+0-1\right)-(4)+(0)$

$= 6-\frac{9}{e}$ //

* 2020학년도 사관학교 수학 가형 15번.

$(b<0<a)$ 직선 : $\frac{x-a}{a}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{b}$

평면 : $2x-2y+z=0$

평행, 거리는 4. $\vec{d}=(a,-1,b)$, $\vec{n}=(2,-2,1)$

(i) $\vec{d}\circ\vec{n}=0$ 이므로 $2a+2+b=0$.

(ii) 직선 위의 임의의 점들 중 하나인 $(a,3,0)$과 평면 사이의 거리는 4이므로

$\frac{|2a-6|}{\sqrt{4+4+1}}=4$. $\therefore 2a-6=12$ or -12 에서 $a=9$ $(a>0)$

$\therefore b=-2-2a=-20$. $\therefore a-b=9+20=29$ //

※ 2020학년도 사관학교 수학 가형 14번.

이동한 거리 $\sim N(m, \sigma^2)$.

↳ 36명 추출 $X_1 \sim N(m, (\frac{\sigma}{6})^2)$ → 36명의 이동한 거리의 총합 $= 36m = 216$. $\therefore m = 6$

$\therefore X_1 \sim N(6, (\frac{\sigma}{6})^2)$

95% 신뢰구간 $(a+0.98-a)$이 0.98이므로 $\frac{\text{편도거리}=0.49}{\sigma_{X_1}=\frac{\sigma}{6}} = z(1.96)$

$\therefore \sigma = \frac{6\times 0.49}{1.96} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. 또한 편도거리는 $0.49 = a+0.98-m = m-a$ 이므로

$a = m - 0.49 = 6 - 0.49 = 5.51$. $\therefore a+\sigma = 5.51+1.5 = 7.01$ //

※ 2020학년도 사관학교 수학 나형 26번.

All : 동시에 던진 두 주사위의 눈의 최대공약수가 1일 때,

$(1, \triangle) \to 6$
$(\triangle, 1) \to 6$ } $\therefore$ 1 포함 경우 $= 11$. 1 포함하지 않으면 $(2,3)(2,5)(3,5)$
$(3,4)(4,5)(5,6)$

↳ $\therefore$ 1 미포함 $= 12$.

따라서 All : 23.

Target : $(3,5), (5,3) \to 2$. $\therefore \frac{2}{23}$ //