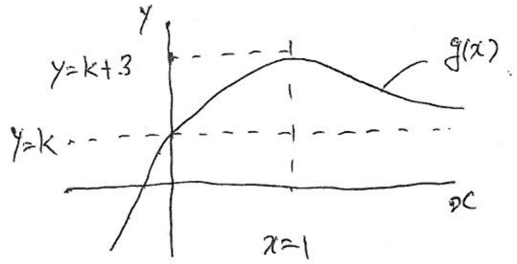
* 2019년 3월 시행 교육청 고3 수학 가형 30번.

$f(x) = x^4 + \cdots$

(가) $f(1)=0$, $f'(1)=0$

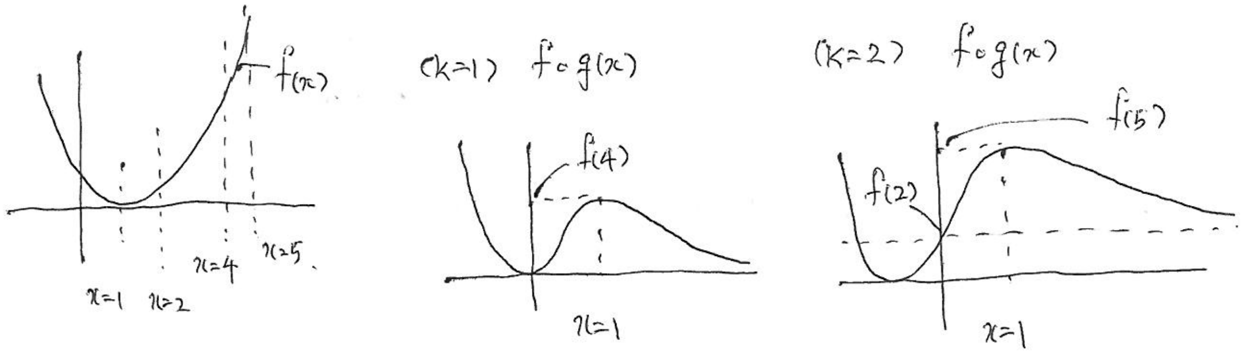
(나) 방정식 $f(x)=0$ 의 해집합의 원소는 10 이하의 자연수.

$g(x) = \dfrac{3x}{e^{x-1}} + k$ (k는 자연수) $= 3ex \cdot e^{-x} + k$.



(다) $|f \circ g(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 자연수 k의 개수는 4.

절대값 기호가 있으므로 우선 $f(x) \geq 0$ 인 예를 기준으로 생각.



결과적으로 $f(x) \geq 0$ 이면 $f \circ g(x) \geq 0$ 이고 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,

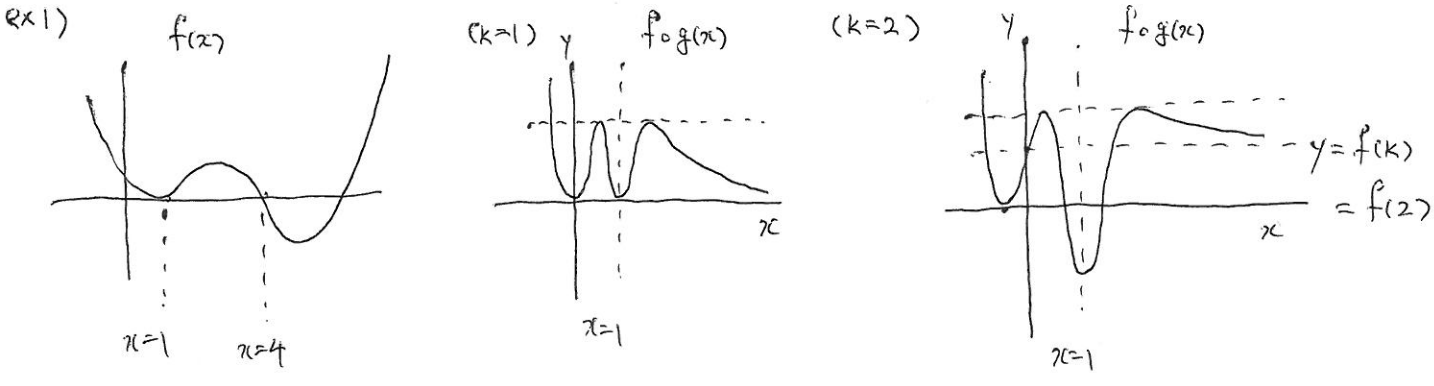
$|f \circ g(x)|$ 역시 마찬가지이므로 이 때 자연수 k의 개수는 무한하다.

∴ $f(x) < 0$ 부분이 존재해야 자연수 k의 개수가 유한하다.

→ $g(0)=k$, $g(1)=k+3$ 이 $f(x)$에서 변수값 3 만큼으로 적용되므로, $f(x)$ 에서

변수값 3 만큼의 구간에서 양수면 $f \circ g(x)$, $|f \circ g(x)|$ 가 미분가능하다. ···(i)

→ $f(x)$가 $x=1$ 에서 3중근의 형태를 나타낼 때도 생각해야 한다 ⇒ ★★★ ···(ii)

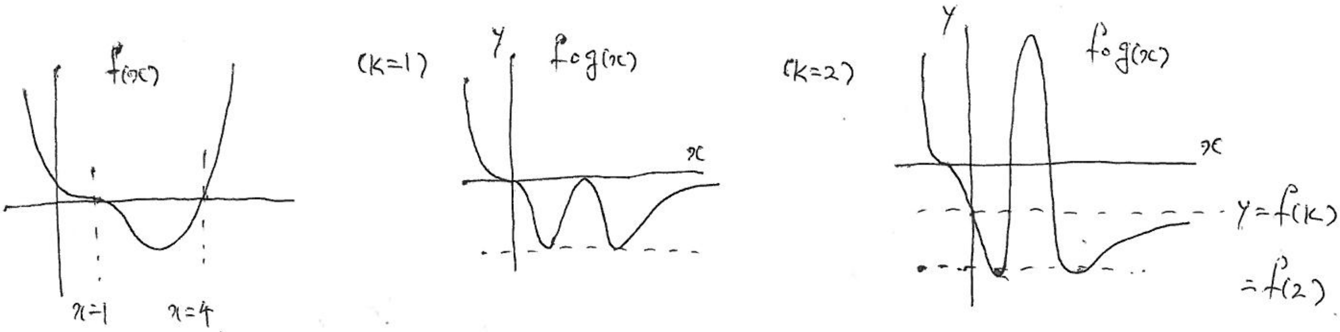


위의 ex1) 에서 (k=2) 라면 $|f \circ g(x)|$는 미분불가능이다.

즉, $f(x) = (x-1)^2(x-4)(x-\alpha)$ (단, α는 5 이상 10 이하의 자연수) 일 때 $|f \circ g(x)|$를 실수 전체의 집합에서 미분 가능하도록 하는 k는 k=1 뿐이다.

$\therefore f(x) = (x-1)^2(x-7)(x-\alpha)$ (단, α는 8이상 10이하의 자연수) 이어야 $|f \circ g(x)|$를 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 k의 개수가 4 (k=1, 2, 3, 4) 가 된다.

ex 2)



같은 맥락으로 $f(x) = (x-1)^3(x-4)$ 이면 $|f \circ g(x)|$가 실수전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 k는 k=1 뿐이다.

$\therefore f(x) = (x-1)^3(x-7)$ 이어야 k의 개수가 4가 된다.

따라서 조건에 부합하는 $f(x)$는 4가지가 나온다.

(i)-1 $f(x) = (x-1)^2(x-7)(x-8) \rightarrow f(0) = 56$

(i)-2 $f(x) = (x-1)^2(x-7)(x-9) \rightarrow f(0) = 63$

(i)-3 $f(x) = (x-1)^2(x-7)(x-10) \rightarrow f(0) = 70$

(ii) $f(x) = (x-1)^3(x-7) \rightarrow f(0) = 7$.

$\therefore f(0)$의 최댓값과 최솟값의 합은 $70 + 7 = 77$