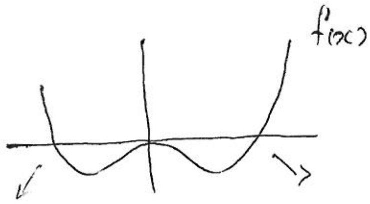
* 2019년 7월 시행 교육청 고3 수학 나형 20번.

$f(x)=ax^4+bx^2+c$ (a, b, c는 상수, $a>0$) → y축 대칭 (∵ 홀수차 x항 존재 X)

(가) 방정식 $f(x)=0$의 모든 실근이 α, β, γ ($\alpha<\beta<\gamma$)

→ 총 4개의 실근은 α, $\beta(=0)$, β, $\gamma(=-\alpha)$ 가 되고,

4차 함수의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



($\alpha<0$, $\beta=0$, $\gamma=-\alpha>0$)

(나) $f(1)=-\frac{3}{4}$, $f'(-1)=1$.

$c=0$ (∵ $\beta=0$) 이므로 $f(x)=ax^4+bx^2$, $f'(x)=4ax^3+2bx$ 에서

$$\left.\begin{aligned} f(1)&=a+b=-\tfrac{3}{4} \Rightarrow 4a+4b=-3 \\ f'(-1)&=-4a-2b=1 \end{aligned}\right\} \therefore 2b=-2 \text{ 에서 } b=-1,\ a=\tfrac{1}{4}.$$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2=\underbrace{x^2\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{2}x-1\right)}_{(\alpha=-2,\ \gamma=2)}$, $f'(x)=\underbrace{x^3-2x}_{x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}$.

ㄱ. $f(0)=0$ → True.

ㄴ. $f'(\alpha)=f'(-2)=-8+4=-4$. → True.

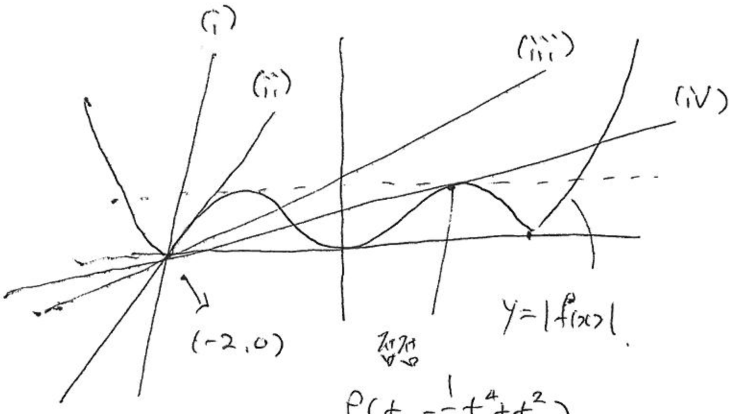
ㄷ. $|f(x)|=k(x-\alpha)=k(x+2)$

직선의 형태를 (i)~(iv) 라 하면

서로 다른 실근의 개수가 3이 되려면

(iii)의 경우이므로 그 직선의 기울기는

(ii)보다 작고, (iv)보다 커야 된다.



그러므로

(ii)에서 $|f'(-2)|=f'(2)=4$

(iv)에서 접점을 $P(t, -\frac{1}{4}t^4+t^2)$라 하면 접선은 $y=(-t^3+2t)(x-t)-\frac{1}{4}t^4+t^2$

$=(-t^2+2t)x+\frac{3}{4}t^4-t^2$ 이고 $(-2, 0)$을 지나므로 $\frac{3}{4}t^4+2t^3-t^2-4t=0$ 에서

$t\times(3t^3+8t^2-4t-16)=t(t+2)(3t^2+2t-8)=t(t+2)^2(3t-4)$ 에서 $t=\frac{4}{3}$ ($0<t<\sqrt{2}$)

$\therefore$ (iv)에서 $\left|f'\left(\frac{4}{3}\right)\right|=\left|\frac{64}{27}-\frac{8}{3}\right|=\left|\frac{64}{27}-\frac{72}{27}\right|=\frac{8}{27}$. $\therefore \frac{8}{27}<k<4$ → True.