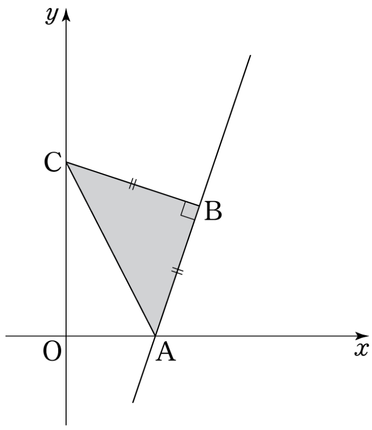
28. 자연수 n에 대하여 기울기가 3이고, 점 $\mathrm{A}\left(\frac{2}{3}n,\ 0\right)$을 지나는 직선이 있다. 이 직선 위에 있고 제1사분면에 있는 점 B와 y축 위의 점 C에 대하여

$$\angle \mathrm{ABC} = \frac{\pi}{2}, \quad \overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{BC}}$$

일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{13} S_k$의 값을 구하시오. [4점]



〈 Solution 1 〉

1st Step 독해

[조건]

① 기울기가 3, 지나는 점 $\mathrm{A}\left(\frac{2}{3}n,\ 0\right)$: 두 점 A와 B 사이의 관계를 파악할 수 있다.

② y축 위의 점 C

③ $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$: 두 점 B와 C 사이의 관계를 파악할 수 있다.

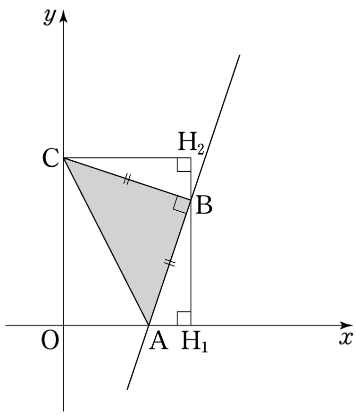
[구하는 값]

④ $\sum_{k=1}^{13} S_k$: 삼각형 ABC의 넓이를 n에 대한 식으로 나타내면 된다.

2nd Step 설계

① 두 점 A와 B 사이의 관계를 파악하기 위해
점 B에서 x축에 수선의 발 $\mathrm{H_1}$을 내리면 직각삼각형 $\mathrm{AH_1B}$를 만들 수 있다.

③ 두 점 B와 C 사이의 관계를 파악하기 위해
점 C에서 직선 $\mathrm{BH_1}$에 수선의 발 $\mathrm{H_2}$를 내리면 직각삼각형 $\mathrm{BH_2C}$를 만들 수 있다.



④ $\overline{\mathrm{AH_1}}$을 n에 대하여 표현하면 S_n을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

3rd Step 해결

① $\overline{\mathrm{AH_1}}=x_n$이라 하자. 이때, 직선 AB의 기울기가 3이므로
$\overline{\mathrm{BH_1}}=3x_n$, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{10}\,x_n$이다.

③ $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle\mathrm{ABH_1}=\angle\mathrm{BCH_2}$이다. 그런데 $\overline{\mathrm{BA}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로
두 삼각형 $\mathrm{AH_1B}$, $\mathrm{BH_2C}$는 서로 합동이다. (RHS 합동)
따라서 $\overline{\mathrm{CH_2}}=\overline{\mathrm{BH_1}}=3x_n$이다.

④ 원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{CH_2}}=\overline{\mathrm{OH_1}}$에서 $3x_n=\frac{2}{3}n+x_n$이 성립한다.

따라서 $x_n=\frac{n}{3}$이다. 즉, $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{10}}{3}n$이므로 $S_n=\frac{5}{9}n^2$이다.

그러므로 $\sum_{k=1}^{13} S_k=455$이다.

〈 Solution 2 〉

1st Step 독해	**[조건]** ① 기울기가 3, 지나는 점 $A\left(\frac{2}{3}n,\ 0\right)$: 직선의 모든 것을 알 수 있다. ② y축 위의 점 C ③ $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$: 직선 BC의 기울기가 $-\frac{1}{3}$임을 파악할 수 있다. ④ $\overline{BA}=\overline{BC}$: 삼각형 ABC가 직각이등변삼각형임을 알 수 있다. **[구하는 값]** ⑤ $\sum_{k=1}^{13} S_k$: 삼각형 ABC의 넓이를 n에 대한 식으로 나타내면 된다.
2nd Step 설계	① 점 B의 x좌표를 b_n이라 하면 $\overline{AB}$를 b_n으로 표현할 수 있다. ② ①, ③에 의해 점 C의 좌표를 b_n으로 표현할 수 있다. ④ 삼각형의 세 변의 길이를 b_n으로 표현할 수 있다. ⑤ b_n을 n에 대하여 표현하면 S_n을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.
3rd Step 해결	① 직선 AB의 방정식은 $y=3x-2n$이다. 이때, 점 B를 $(b_n,\ 3b_n-2n)$이라 하면 $\overline{AB}=\sqrt{10}\left(b_n-\frac{2}{3}n\right)$이다. ② 직선 BC의 방정식은 $y=-\frac{1}{3}(x-b_n)+3b_n-2n$이므로 점 C는 $\left(0,\ \frac{10}{3}b_n-2n\right)$이다. ④ $\overline{AC}=\sqrt{2}\times\overline{AB}$이므로 $\overline{AC}=\sqrt{5}\left(2b_n-\frac{4}{3}n\right)$이다. ⑤ 원점 O에 대하여 직각삼각형 AOC에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{OA}^2+\overline{OC}^2=\overline{AC}^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}n\right)^2+\left(\frac{10}{3}b_n-2n\right)^2=5\left(2b_n-\frac{4}{3}n\right)^2$ $\Leftrightarrow \frac{100}{9}b_n^2-\frac{40}{3}nb_n+\frac{40}{9}n^2=20b_n^2-\frac{80}{3}nb_n+\frac{80}{9}n^2$ $\Leftrightarrow \frac{80}{9}b_n^2-\frac{40}{3}nb_n+\frac{40}{9}n^2=0$ $\Leftrightarrow 2b_n^2-3nb_n+n^2=0$ $\Leftrightarrow (2b_n-n)(b_n-n)=0$ 이므로 $b_n=\frac{n}{2}$ 또는 $b_n=n$이다. 그런데 $b_n>\frac{2}{3}n$이므로 $b_n=n$이다. 따라서 $\overline{AB}=\frac{\sqrt{10}}{3}n$이므로 $S_n=\frac{5}{9}n^2$이다. 그러므로 $\sum_{k=1}^{13} S_k=455$이다.