※ 2019년 11월 시행 교육청 고2수학 가형 30번.

정수 l, m, 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$.

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 12+(n-1)l \\ b_n &= -10+(n-1)m \end{aligned}\right\} \quad \sum_{k=1}^{10} |a_k+b_k| = \sum_{k=1}^{10} (|a_k|-|b_k|) = 31$$

$a_k+b_k = 2+(n-1)(l+m)$ ∴ $|a_k+b_k|$의 값은 (i) $\nearrow$ 증가, (ii) $\xrightarrow{\text{동일}}$, (iii) $\searrow\nearrow$ 감소 후 증가

$(l+m>0)$ $(l+m=0)$ $(l+m<0)$

(i)의 경우 최소치의 값으로 계산하면 $2+3+4+\cdots+11 = 65 \neq 31$.

(ii)의 경우 $2+2+2+\cdots+2 = 20 \neq 31$

(iii)의 경우 $2+1+0+1+2+\cdots+7 = 31$. ∴ $|a_k+b_k|$의 값이 감소하다 증가하는 형태의 (iii)의 경우이고, $a_3+b_3=0$ 이다. ⇒ $l+m=-1$, $a_3+b_3=0$ ---- ①

① 에서 a_3과 b_3의 값으로 가능한 값들로 $\sum_{k=1}^{10}(|a_k|-|b_k|)=31$을 충족시켜야 한다.

(i) $a_3=14$, $b_3=-14$, $(l>0,\ m<0)$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 12, 13, 14, 15 \cdots \\ b_n &= -10, -12, -14, -16 \cdots \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &2+1+0+(-1)+\cdots+(-7) \\ &\neq 31. \end{aligned}$$

a_3 이후의 $|a_k|$가 $|b_k|$보다 작다.

∴ 조건을 만족시키려면 이 경우도 $2+1+0+1+2+\cdots+7$의 형태여야 한다.

(ii) $a_3=0$, $b_3=0$. (기준) → O.

a_n: 12, 6, 0, -6 ⋯

b_n: -10, -5, 0, 5, ⋯

(iii)-1. $a_3=2$, $b_3=-2$. → O

a_n: 12, 7, 2, -3 ⋯

b_n: -10, -6, -2, 2, ⋯

(iii)-2. $a_3=-2$, $b_3=2$ → O.

a_n: 12, 5, -2, -9, ⋯

b_n: -10, -4, 2, 8, ⋯

(iv)-1. $a_3=4$, $b_3=-4$ → ×.

a_n: 12, 8, 4, 0, ⋯

b_n: -10, -7, -4, -1, ⋯

(iv)-2. $a_3=-4$, $b_3=4$ → O.

a_n: 12, 4, -4, -12, ⋯

b_n: -10, -3, 4, 11, ⋯

∴ $a_3 = 0, 2, -2, -4, -6, -8, -10$ 일 때 가능

(l, m)은 $l+m=-1$이면서 a_3 값에 따라 고정된다.

∴ 순서쌍 (l, m)은 7가지가 가능하다.

* 2019년 11월 시행 교육청 고2 수학 가형 29번.

$f(x) = x^2 + \cdots$

$g(x) = (x^2 - x + a) f(x)$

(가) $g(1) = f(1)$, $g'(1) = f'(1)$ (나) $g'(1) \neq 0$. $\therefore f'(1) \neq 0$.

(다) $f(\alpha) = f'(\alpha)$, $g'(\alpha) = 2f'(\alpha)$ 인 실수 α 존재

$g(1) = af(1)$. $\therefore a = 1$. $g(x) = (x^2 - x + 1) f(x)$.

$g'(x) = (2x-1) f(x) + (x^2 - x + 1) f'(x)$. $\therefore g'(1) = f(1) + f'(1)$. $\therefore f(1) = 0$.

$g'(\alpha) = (2\alpha - 1) f(\alpha) + (\alpha^2 - \alpha + 1) f'(\alpha) = (\alpha^2 + \alpha) f'(\alpha)$. $\therefore \alpha^2 + \alpha - 2 = 0$ ($\because$ 조건(다)).

(i) $\alpha = -2$, $f(-2) = f'(-2)$. $\therefore f(x) = x^2 + px + q$ 라 하면 $f'(x) = 2x + p$ 이고

$f(1) = 1 + p + q = 0$, $f(-2) = 4 - 2p + q = f'(-2) = -4 + p$.

$\therefore$ $8 - 3p + q = 0$. 따라서 $-7 + 4p = 0$ 에서 $p = \frac{7}{4}$, $q = -\frac{11}{4}$.

$f(x) = x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{11}{4}$, $\alpha = -2$, $f'(1) \neq 0$, $g'(1) = f'(1) \neq 0$. → 조건 만족.

(ii) $\alpha = 1$, $f(1) = f'(1) = 0$. $\therefore$ $2 + p = 0$ 에서 $p = -2$. $q = 1$.

$f(x) = x^2 - 2x + 1$, $\alpha = 1$, $g'(1) = f'(1) = 0$. ——→ 조건에 위배

$\therefore$ (i) 에서 $\alpha = -2$, $g(x) = (x^2 - x + 1) f(x)$, $f(x) = x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{11}{4}$.

$\therefore g(\alpha + 4) = g(2) = 3f(2) = 3 \times \left(4 + \frac{14}{4} - \frac{11}{4}\right) = 3 \times \frac{19}{4} = \frac{57}{4}$ //

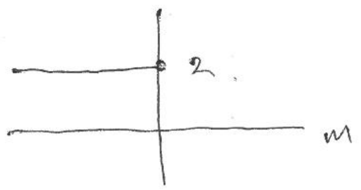
* 2019년 11월 시행 교육청 고2 수학 나형 30번.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & (x<m) \\ \frac{1}{4}(x-3)^2 & (x\ge m)\end{cases}$$, $y=mx$ 와의 교점의 개수 $g(m)$.

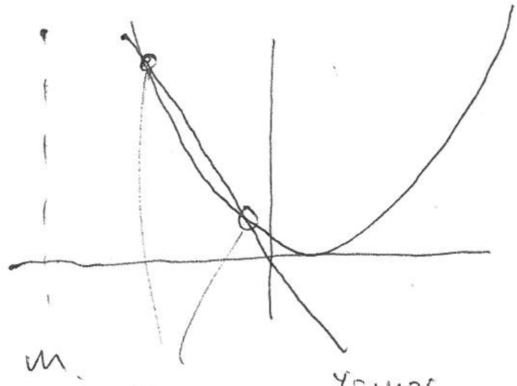
$m\le 0$ 에서 $g(m)$ 연속.

$\therefore$ m이 $\boxed{\text{특정 수준}}$ 이하로 내려가면 $g(m)=2$이다.

$\therefore$



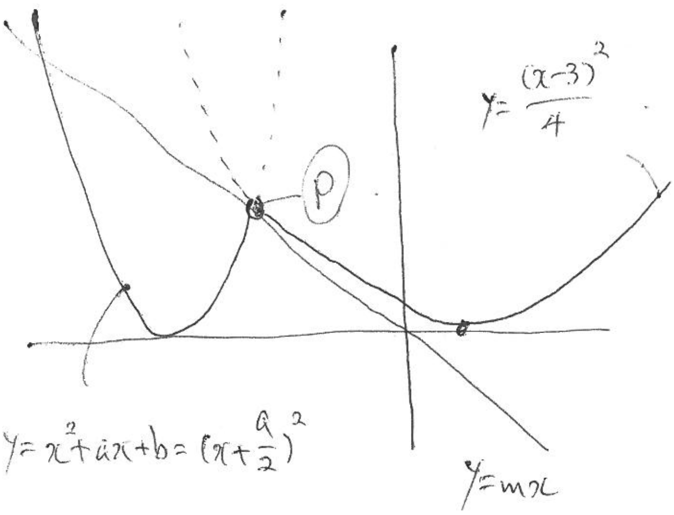
$\because$



$\therefore$ $m=0$일 때도 교점의 개수가 2여야 하므로

x^2+ax+b는 x축에 접해야 하고, 그 x축과 접하는 접점(=대칭축)의 x좌표는 m보다 작다.

$\therefore (x+\frac{a}{2})^2=x^2+ax+b$ 에서 $b=\frac{a^2}{4}$, $-\frac{a}{2}<m$



P 교점의 좌표를 $(t, \frac{(t-3)^2}{4})$이라 하면

접점이므로 (아직 m과 t의 관계를 모르므로)

또는 접점이라 하면

접선은 $y=\frac{(t-3)}{2}(x-t)+\frac{(t-3)^2}{4}$

$=\frac{(t-3)}{2}x+\frac{-2t^2+6t+t^2-6t+9}{4}$ 이

$(0,0)$을 지난다. $\therefore$ $t^2=9$에서 $t=-3$, 그 때 기울기 $-3=m$.

$\therefore (x+\frac{a}{2})^2$이 $(-3, \frac{(-3-3)^2}{4})$으로 극한연결이 되어야 한다.

$\lim_{x\to -3-}(x+\frac{a}{2})^2=9$. $\therefore$ $a=12$ $(a\ne 0)$. $\frac{a^2}{4}=b$ 이므로 $b=36$.

$\therefore$ $a+b=48$//

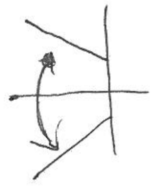
* 2019년 11월 시행 교육청 고2 수학 가형 21번.

$$f(x) = \begin{cases} -|2x+a| & (x<0) \\ x^2+bx+c & (x \ge 0) \end{cases}, \quad |f(x)|\text{는 연속},$$

$y=t$ 와 $\begin{cases} y=f(x) \text{ 와의 교점 개수} \rightarrow g(t) \\ y=|f(x)| \text{ 와의 교점 개수} \rightarrow h(t) \end{cases}$.

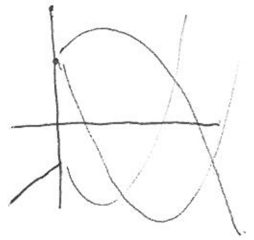
(가) $g(t)$의 치역은 $\{1, 2, 3, 4\}$:

A. $(x<0)$



(즉, $a<0$)

⇒

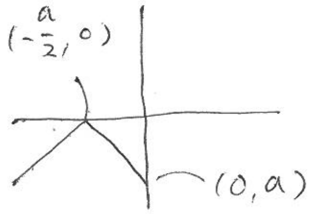


→ 교점의 개수가 4가 불가.

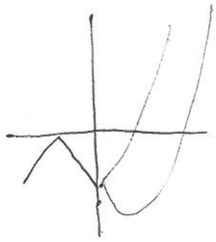
$\therefore a>0$ 이고

$(x<0)$ $f(x)$는

오른쪽과 같다.



B.

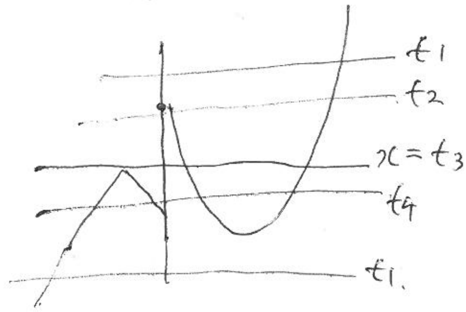


→ $c=a$ 이면

대칭축과 상관없이

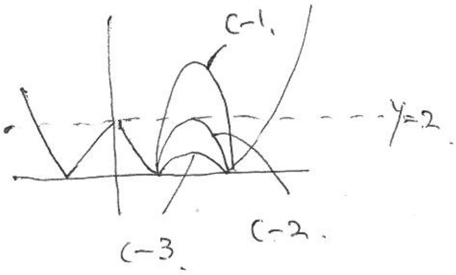
4가 치역의 원소 ×.

$\therefore$



(나) $\lim_{t\to 2-} h(t) \times \lim_{t\to 2+} h(t) = h(2-)\times h(2+) = 12$.

C.



(c-1) $h(2-)\times h(2+) = 6\times 4 = 24$.

(c-2) $h(2-)\times h(2+) = 6\times 2 = 12$.

(c-3) $h(2-)\times h(2+) = 4\times 2 = 8$.

→ $y=2$의 위치가 다른 경우도 생각해 볼 것.

$\therefore c=2,\ a=-2$. 그리고 $x^2+bx+\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{4}b^2+c = (x+\frac{b}{2})^2+c-\frac{1}{4}b^2$ 에서

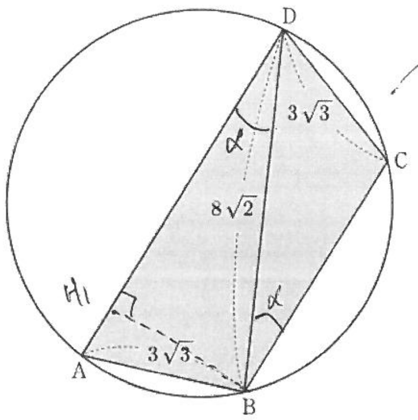
$c-\frac{1}{4}b^2 = -2$ $\therefore b^2=16$에서 $b=-4$ ($\because$ 대칭축의 위치가 양수이므로 $-\frac{b}{2}>0$)

따라서 $f(-2) = -|-4+2| = -2$

$f(6) = 6^2-4\times 6+2 = 14$

$\therefore -2+14=12$

* 2019년 11월 시행 교육청 고2 수학 가형 28번 (나형 29번)



$R=6.$

$\angle ADB$를 α라 하고, $\angle DBC = \angle ADB$ 이므로

(∵ 현 AB의 길이와 현 DC의 길이가 같으므로 호 AB의 길이와 호 DC의 길이도 같고, 원주각의 크기도 같다).

$\frac{\overline{DC}}{\sin\alpha}=2R$ 에서 $\frac{3\sqrt{3}}{12}=\sin\alpha$ ∴ $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{13}}{4}$

□ABCD는 등변사다리꼴이므로 □ABCD $= S = \overline{DH_1}\times\overline{BH_1}$ (단, 점 B에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 H_1이라 할 때)

$\overline{DH_1}=8\sqrt{2}\times\cos\alpha$, $\overline{BH_1}=8\sqrt{2}\times\sin\alpha$, ∴ $S=128\times\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{13}}{16}$

따라서 $\frac{S^2}{13}=\frac{(8\sqrt{3}\cdot\sqrt{13})^2}{13}=64\times3=192$

등변사다리꼴과 무관하게 두 삼각형 △ABD, △BCD의 합으로도 구해볼 것.

참고로 $\cos A=\frac{1}{3}$, $\cos C=-\frac{1}{3}$ 도 제2코사인 법칙으로 확인할 것.