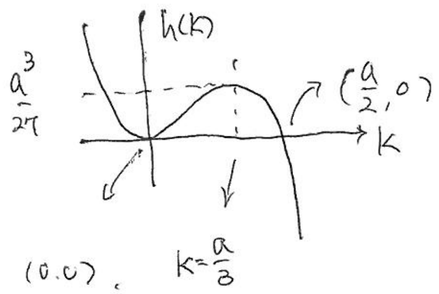
* 2019년 7월 시행 교육청 고3 수학 나형 21번.

$y=x^3-ax^2+3x-5$ (a는 자연수) 에 접하는 직선과 곡선의 교점의 x좌표를 k라 하면

$y'=3x^2-2ax+3$ 이므로 접선 $y=(3k^2-2ak+3)(x-k)+k^3-ak^2+3k-5$ 이고 $(0,t)$를

지난다. 따라서 $t=-2k^3+ak^2-5$.

→ $f(t)$는 곡선 $-2k^3+ak^2$ $(=h(k))$과 직선 $t+5$의 교점의 개수.

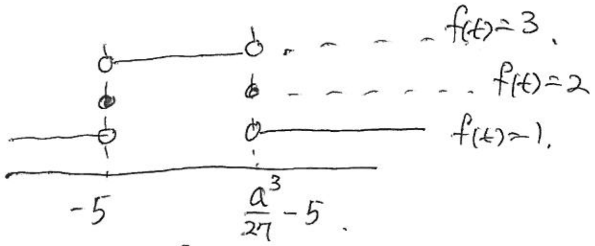


$h(k)=-2k^3+ak^2$

$h'(k)=-6k^2+2ak=k(-6k+2a)$.

$h(\frac{a}{3})=\frac{-2a^3}{27}+\frac{a^3}{9}=\frac{a^3}{27}$.

$$\therefore \begin{cases} t+5>\frac{a^3}{27} & \rightarrow f(t)=1 \\ t+5=\frac{a^3}{27} & \rightarrow f(t)=2 \\ 0<t+5<\frac{a^3}{27} & \rightarrow f(t)=3 \\ t+5=0 & \rightarrow f(t)=2 \\ t+5<0. & \rightarrow f(t)=1. \end{cases}$$



$g(t)=f(f(t))$.

(가) 모든 실수 t에 대하여 $g(t)>1 \Rightarrow g(t)=2$ or 3.

(나) $g(t)$의 치역의 원소의 개수는 1.

(i) $-5\le f(t)\le\frac{a^3}{27}-5$

$\Rightarrow f(f(t))=2$ or 3. → 조건 (나) 위배.

(ii) $-5<f(t)<\frac{a^3}{27}-5 \Rightarrow f(f(t))=3$. → 조건 충족. ∴ (ii)를 만족시키는 자연수 a들 중 최솟값이

m이 된다. $f(t)$의 최댓값은 3이므로 $3<\frac{a^3}{27}-5$ 에서 $6^3<a^3$ 이고 $a=7,8,9,10,\cdots$

∴ $m=7$. $g(m)=3$. (∵ (ii)에서 $f(f(t))=3$ 으로 고정되므로 $g(t)=3$ 이다)

∴ $7+3=10$ //   * (i), (ii) 경우로 나누는 방법에 대해서 생각.