

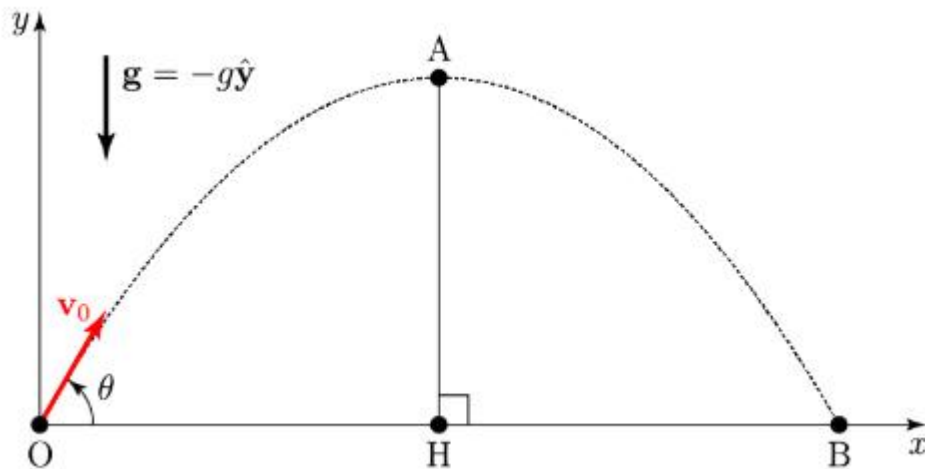
Theme 3. 포물선 운동

1. 포물선 운동

사실 포물선 운동은 물2에서 중요하게 다루어지는 내용입니다.

하지만, 포물선 운동은 일반물리학 내신, 다양한 올림피아드, PEET 등에서 자주 출제 되는 요소이기 때문에 다뤄보기로 했습니다.

‘포물선 운동’은 대표적인 2차원 운동입니다.



‘포물선 운동’은 위 그림과 같이 물체가 초기 속도 v_0 , 발사각도 θ 로 출발하고,

중력을 받으며 운동하는 경우에 물체의 운동을 의미한다. (공기저항은 무시한다.)

물체는 y 방향으로 $-g$ 가속도를 받는다.

시간에 따른 물체의 속력은 $v_x = v_0 \cos \theta$, $v_y = v_0 \sin \theta - gt$ 이다.

시간에 따른 물체의 위치는 $x = v_0 \cos \theta t$, $y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2$ 이다.

최고점인 A에서 물체의 y 방향 속력은 0이니 최고점 도달시간은 $t_A = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$ 이다.

최고점 도달시간에서 y 좌표를 구하면 $y_A = \overline{HA} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$ 이다.

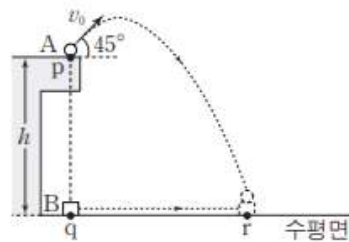
B에 도달하기까지 걸린 시간은 최고점 도달시간의 2배이니 $t_B = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$ 이다.

B의 x 좌표를 구하면, $x_B = \overline{OB} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$ 이다. x_B 는 $\theta = 45^\circ$ 일 때 최대이

고, 여각 관계(합쳐서 90°)의 두 각은 같은 x_B 값을 가진다.

위 내용을 이용해 간단한 문제를 풀어봅시다.

17. 그림과 같이 수평면으로부터 높이가 h 인 점 p에서 물체 A를 수평 방향과 45° 의 각을 이루며 v_0 의 속력으로 던진 순간, p의 연직 아래 수평면 위의 점 q에 정지해 있던 물체 B가 등가속도 운동을 시작하였다. A는 포물선 운동을 하여 B와 동시에 수평면 위의 점 r에 도달하며, A의 최고점의 높이는 수평면으로부터 $\frac{9}{8}h$ 이다.



B의 가속도의 크기는? (단, 중력 가속도는 g 이고, 물체의 크기는 무시한다.) [3점]

물리 2 (171117) 문제입니다.

A의 최고점의 높이가 $\frac{9}{8}h$ 이고, A의 초기 속도 v_0 , 발사각도는 45° 이니

$$\frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{9}{8}h - h = \frac{1}{8}h, v_0^2 = \frac{1}{2}gh \text{이다.}$$

이때, A가 수평면과 부딪히는 시간을 t 라 하면,

$$y_r = -h = -\frac{2v_0^2}{g} = v_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) t - \frac{1}{2}gt^2 \text{이다.}$$

t 에 관한 2차 방정식을 풀면 $t = \frac{2\sqrt{2}}{g}v_0$ 이다.

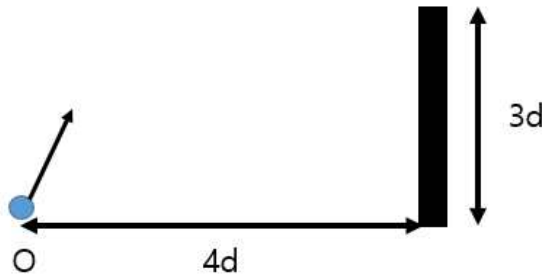
점 r의 x 좌표를 구하면, $v_0(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{2\sqrt{2}}{g}v_0) = \frac{2v_0^2}{g} = h$ 이다.

B의 가속도를 a 라 하면, $\frac{1}{2}a(\frac{2\sqrt{2}}{g}v_0)^2 = \frac{2ah}{g} = h$ 이다. 즉, $a = \frac{1}{2}g$ 이다.

좀 더 어려운 문제로 한 번 더 연습해보죠.

그림과 같이 점 O에서 물체가 발사된다. 점 O에서 $4d$ 만큼 떨어져 있고, 높이가 $3d$ 인 장애물이 설치되어 있을 때, 장애물을 넘기 위한 공의 최소 초기 속력은? (중력가속도는 g 이고, 물체의 크기, 장애물의 너비, 공기저항은 무시한다.)

(2016년 중등물리 올림피아드 10번)



물체의 초기 속도를 v_0 , 발사 각도를 θ , 물체가 x 방향으로 $4d$ 만큼 움직일 때까지 걸린 시간을 t 라 하자.

$v_0\cos\theta t = 4d, v_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \geq 3d$ 를 만족하는 v_0 를 구해야 한다.

$t = \frac{4d}{v_0\cos\theta}$ 를 대입하면, $4d\tan\theta - \frac{1}{2}g(\frac{4d}{v_0\cos\theta})^2 \geq 3d$ 를 만족해야 한다.

위 식을 정리하면, $v_0^2 \geq \frac{8gd}{4\cos\theta\sin\theta - 3\cos^2\theta} = \frac{8gd}{2\sin 2\theta - \frac{3}{2}\cos 2\theta - \frac{3}{2}}$

이다. 분모가 최대일 때 v_0^2 가 최소가 된다. $2\sin 2\theta - \frac{3}{2}\cos 2\theta$ 의 최댓값은 $\frac{5}{2}$ 이

니 v_0 의 최솟값은 $\sqrt{8gd}$ 이다.

위의 문제에서 t 를 소거해서 y, x 사이의 관계식을 구했습니다.

위와 같은 방법을 통해 포물선의 궤적을 구해봅시다.

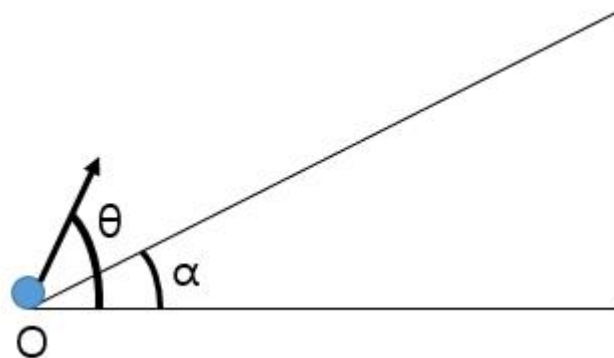
물체가 출발한 위치를 원점이라 생각하면, 시간에 따른 물체의 좌표는

$$x = v_0 \cos \theta t, y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \text{로 표현됩니다.}$$

$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$ 를 y 에 대입하면, $y = \tan \theta x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$ 의 궤도 방정식을 얻을

수 있습니다.

이를 활용해 문제를 풀어봅시다.



O에서 초기 속도를 v_0 , 발사 각도를 θ 로 출발한 물체가 기울기가 α 인 빗면 위로 떨어졌을 때 물체의 변위 L, 변위 L이 최대가 되는 θ 를 α 에 대한 식으로 표현하시오.

물체의 궤도 방정식은 $y = \tan\theta x - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$,

빗면의 방정식은 $y = \tan\alpha x$ 로 표현됩니다.

두 식의 교점을 찾으면, $x = \frac{2v_0^2\cos^2\theta(\tan\theta - \tan\alpha)}{g}$ 입니다.

물체의 변위 $L = \frac{x}{\cos\alpha}$ 이고, 위 식을 대입해 정리하면

$$L = \frac{2v_0^2\cos\theta\sin(\theta - \alpha)}{g\cos^2\alpha} \text{를 얻을 수 있습니다.}$$

위 식을 변수인 θ 로 미분하면,

$$\frac{dL}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha}(-\sin\theta\sin(\theta - \alpha) + \cos\theta\cos(\theta - \alpha)) \text{이고,}$$

$$\frac{dL}{d\theta} = 0 \text{를 만족하는 } \theta \text{가 } L \text{가 최대가 됩니다.}$$

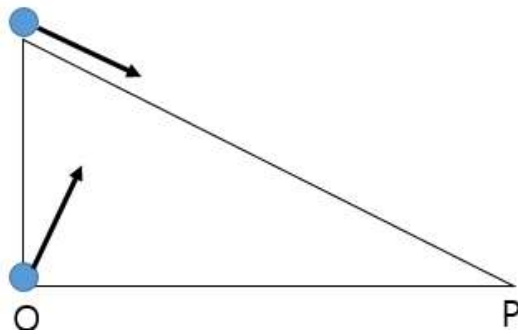
이때, $\theta = \frac{\pi + 2\alpha}{4}$ 입니다.

연습문제

물리 2 기출을 푸는 것이 정말 큰 도움이 될 것입니다!!!

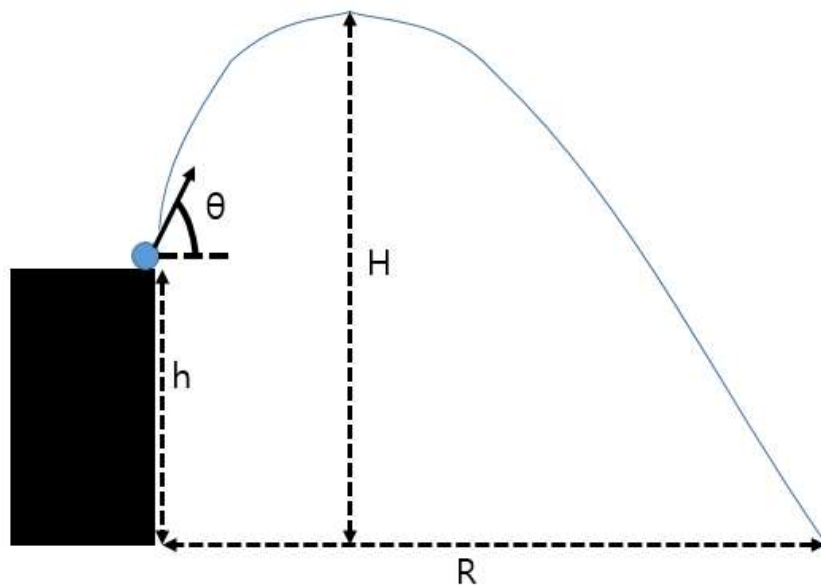
- 그림과 같이 한 물체는 빗면을 내려오고, 한 물체는 포물선 운동을 한다. 두 물체는 동시에 O에서 출발하고, 동시에 같은 속력으로 P에 도착한다. 물체를 던진 각도를 θ 라고 하면 $\cos\theta$ 는?

(300 CREATIVE PHYSICS PROBLEMS, LASZLO HOLICS, Problem 12)

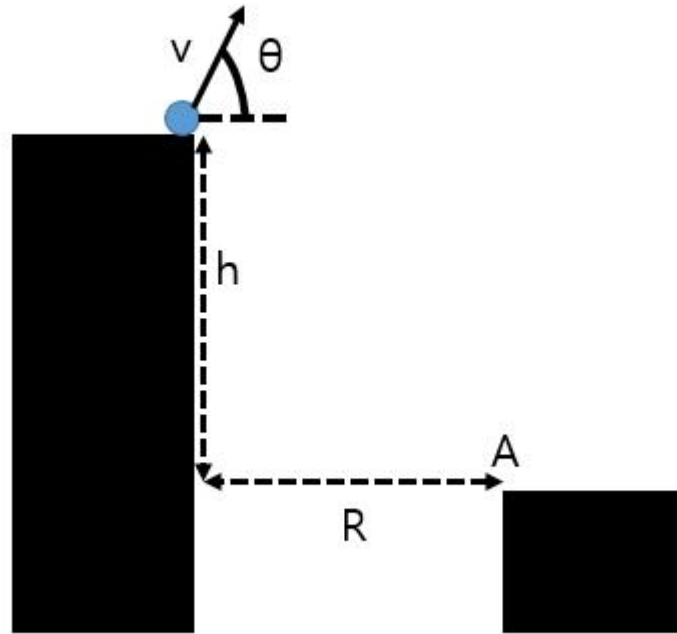


- 높이가 h 인 건물 위에서 물체를 θ 로 발사시키니 수평으로 R 만큼 날아갔다. 최고 점의 높이 H 를 h, θ, R 로 표현하시오.

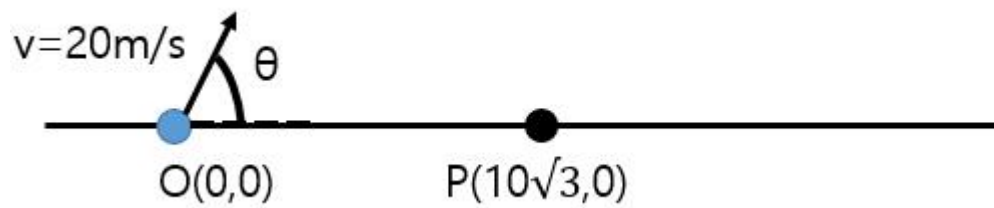
(그림 발췌 죄송합니다. $\pi\pi\pi$ 곡선을 어떻게 그리는지 모르겠네요.)



3. 그림과 같이 건물 사이 거리가 R 이고, 높이 차이가 h 인 건물 2개가 있다. 왼쪽 건물 끝에서 물체를 속력 v , 각도 θ 로 발사시킨다. 오른쪽 건물의 왼쪽 끝 지점인 A라 할 때, 물체가 A에 도달할 수 있는 속력 v 가 최소가 되기 위한 각 θ 는?
(단, 중력가속도는 g 이고, 공기저항과 물체의 크기는 무시한다.)



4. 물체는 원점 O에서 $v = 20\text{m/s}$, $\theta = 60^\circ$ 로 출발해 다시 수평면과 부딪힌다. $P(10\sqrt{3}, 0)$ 과 물체 사이의 거리가 최소가 될 때, 물체의 x 좌표는?



5. 그림과 같이 막대가 수직면과 30도 각도를 이루며 벽에 기대어 있고, 그 접점은 $(0, h)$ 이다. 물체는 원점에서 v 의 속력과 $\theta = 30^\circ$ 로 발사된다. 이때, 물체가 막대와 부딪히기 위한 v 의 범위를 구하라. (중력가속도는 g 이고, 막대의 두께는 무시한다.)

